

Eduardo Guimarães Pedrosa Filho

**Desenvolvimento de um sistema *Ball on Plate*:
Uma aplicação de controle robusto**

Brasil

2024

Eduardo Guimarães Pedrosa Filho

Desenvolvimento de um sistema *Ball on Plate*: Uma aplicação de controle robusto

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca avaliadora do curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Estado do Amazonas como pré-requisito para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Universidade do Estado do Amazonas – UEA

Escola Superior de Tecnologia – EST

Engenharia de Controle e Automação

Orientador: Rodrigo Farias Araújo

Coorientador: Luiz Alberto Queiroz Cordovil Júnior

Brasil

2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

G963dd Pedrosa Filho, Eduardo Guimarães
Desenvolvimento de um sistema Ball on Plate: Uma
aplicação de controle robusto / Eduardo Guimarães Pedrosa
Filho. Manaus : [s.n], 2024.
82 f.: color.; 297 cm.

TCC - Graduação em Engenharia de Controle e
Automação; - Universidade do Estado do Amazonas,
Manaus, 2024.

Inclui bibliografia

Orientador: Rodrigo Farias Araújo

Coorientador: Luiz Alberto Queiroz Cordovil Júnior

1. modelagem de sistemas. 2. controle robusto. 3.
filtro de Kalman. 4. controle digital. I. Rodrigo Farias
Araújo (Orient.). II. Luiz Alberto Queiroz Cordovil
Júnior (Coorient.). III. Universidade do Estado do
Amazonas. IV. Desenvolvimento de um sistema Ball on
Plate: Uma aplicação de controle robusto

Eduardo Guimarães Pedrosa Filho

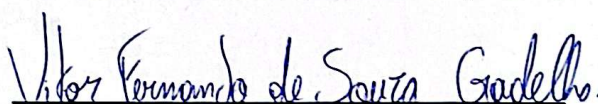
Desenvolvimento de um sistema *Ball on Plate*: Uma aplicação de controle robusto

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca avaliadora do curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Estado do Amazonas como pré-requisito para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

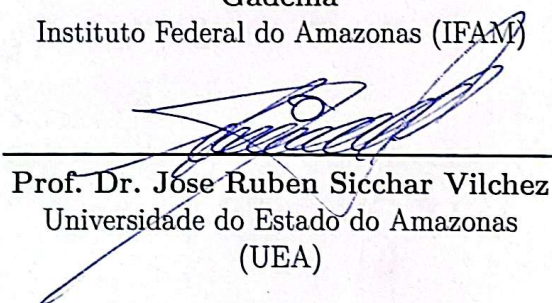
Trabalho aprovado. Brasil, 27 de fevereiro de 2024:



Prof. Dr. Iury Valente de Bessa
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)



Prof. Esp. Vitor Fernando de Souza
Gadelha
Instituto Federal do Amazonas (IFAM)



Prof. Dr. José Ruben Sicchar Vilchez
Universidade do Estado do Amazonas
(UEA)

Brasil
2024

À minha mãe.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à minha mãe pelo apoio e incentivo durante não somente a graduação, mas também durante a vida.

À Mariana, pelo suporte e companheirismo.

Ao meu orientador, professor Rodrigo, pela motivação e inspiração para dar os primeiros passos nessa área tão vasta de teoria de controle.

Ao meu coorientador, Luiz Cordovil, pela revisão textual.

Aos meus amigos de turma, Henrique, João, Marcos, Sandro, Victor e Vitoriano, por estarem comigo desde o início da graduação e tornar os dias bons melhores e os dias ruins mais amenos. Não teria chegado até aqui sem a amizade de vocês.

A todos os amigos que fiz ao longo da graduação, em especial, Dar'c Pabla, Luiz Antônio, Felipe e Ana Beatriz.

Aos professores coordenadores e membros do Pilar Atração da Academia STEM, Femtolab e Ocean FabLab, pelo suporte no desenvolvimento deste trabalho.

À Universidade do Estado do Amazonas, por ser minha segunda casa ao longo dessa jornada.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente na realização deste trabalho.

Por fim, mesmo que este trabalho seja intitulado de conclusão, que não seja um fim, mas o começo de uma jornada maior.

“Ver o pequeno mundo, e o grande, eis o mister.” (Goethe, Fausto I)

Resumo

A estabilização de um sistema dinâmico é o princípio mais importante de um sistema de controle. A estabilidade de tais sistemas deve ser capaz de resistir a problemas do mundo real, como saturação dos atuadores, ruído nos sensores de medição e distúrbios que afetem o sistema. À luz de tal problemática, este trabalho se propõe ao projeto de uma plataforma *Ball on Plate* onde são aplicados um controlador de realimentação de estados robusto \mathcal{H}_∞ que garante estabilidade na presença de saturação do sinal de controle e um filtro de Kalman para estimação ótima dos estados e filtragem do sinal de entrada. Os algoritmos são implementados utilizando técnicas de controle digital em um microcontrolador ESP32. Para obtenção dos dados de entrada é utilizada uma tela de toque resistiva e 2 servomotores como atuadores do sistema. O trabalho mostra a eficiência e robustez do controlador realizado através de desigualdades matriciais lineares, assim como a estimação ótima obtida através do filtro.

Palavras-chave: modelagem de sistemas, controle robusto, filtro de Kalman, controle digital.

Abstract

The stabilization of a dynamical system is the most important principle of a control system. The stability of such systems must be able to resist real-world problems, such as actuator saturation, noise in measurement sensors and disturbs that might affect the system. In light of that problem, this research proposes the design of a Ball on Plate platform where a robust \mathcal{H}_∞ state-feedback control law that gaurantees stability under actuator saturation and a Kalman filter for optimal state estimation and filtering of the input signal. The algorithms are implemented using digital control techniques on a ESP32 microcontroller. To obtain the input data a resistive touch-screen is used and 2 servomotors are used as system actuators. This work demonstrates the efficiency and robustness of a control law realized through linear matrix inequalities, as well as the optimal estimation obtained by the Kalman filter.

Keywords: system modelling, robust control, Kalman filter, digital control.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Projeto mecânico do sistema <i>Ball on Plate</i>	19
Figura 2 – Sistema <i>Ball on Plate</i>	22
Figura 3 – Processo de Modelagem por Fusão e Deposição (FDM).	23
Figura 4 – Estrutura da tela de toque resistiva.	25
Figura 5 – Arquitetura das telas de toque com 4 e 5 terminais.	25
Figura 6 – Sinal de tensão analógico quando um objeto toca a tela.	26
Figura 7 – Circuito que representa um servomotor <i>DC</i>	27
Figura 8 – Diagrama de blocos para o servomotor.	27
Figura 9 – Microcontrolador TMS1000.	27
Figura 10 – Amostragem de um sinal analógico.	29
Figura 11 – Segurador de ordem zero mantendo o sinal constante.	30
Figura 12 – Modulação de largura de pulso emulando uma onda analógica.	30
Figura 13 – Estabilidade assintótica.	32
Figura 14 – Estabilidade de Lyapunov.	33
Figura 15 – $\nabla V \cdot f < 0$ apontando para o ponto de equilíbrio.	34
Figura 16 – Amplificador com realimentação negativa de Black.	38
Figura 17 – Norma \mathcal{H}_∞ como a maior amplificação de um diagrama de Bode.	40
Figura 18 – Sistema sujeito a distúrbios.	41
Figura 19 – Função de saturação do sinal de controle.	43
Figura 20 – Funções densidade probabilidade de medições de uma variável \mathbf{x}	45
Figura 21 – A combinação de várias medições pode ser usada para minimizar a variância do valor que se deseja estimar.	46
Figura 22 – Propagação da medida de um instante de tempo anterior até o tempo atual através de um modelo.	47
Figura 23 – Plataforma ESP32-DevKitC e seus circuitos auxiliares.	49
Figura 24 – Esquema de pinos do ESP32.	49
Figura 25 – Conversor analógico-digital com zona de saturação.	50
Figura 26 – Tela de toque resistiva de 5 terminais.	50
Figura 27 – Leitura do sinal digital e conversão para posição.	52
Figura 28 – Servomotor TowerPro 996R.	52
Figura 29 – Esquemático do circuito.	53
Figura 30 – Projeto da PCB do sistema <i>Ball on Plate</i>	54
Figura 31 – Placa de circuito impresso produzida.	54
Figura 32 – Modelo 3D de rótula radial.	55
Figura 33 – Modelo do rolamento 608zz.	55
Figura 34 – Desenho da plataforma. Todas as medidas em milímetros.	56

Figura 35 – Modelo 3D da plataforma e junta de ligação.	56
Figura 36 – Desenho do primeiro elo. Todas as medidas em milímetros.	56
Figura 37 – Modelo 3D do primeiro elo do sistema.	57
Figura 38 – Vista de corte do primeiro elo com a rótula e rolamento.	57
Figura 39 – Haste de encaixe do servomotor.	57
Figura 40 – Desenho do segundo elo. Todas as medidas em milímetros.	58
Figura 41 – Modelo 3D do segundo elo.	58
Figura 42 – Desenho da base. Todas as medidas em milímetros.	59
Figura 43 – Modelo 3D da base.	59
Figura 44 – Vista de corte do ponto onde a base é acoplada à plataforma por meio da rótula.	59
Figura 45 – Desenho e modelo do <i>guard-rail</i> . Todas as medidas em milímetros. . . .	60
Figura 46 – Modelo completo do sistema <i>Ball on Plate</i> desenvolvido.	60
Figura 47 – Protótipo do sistema <i>Ball on Plate</i> montado.	62
Figura 48 – Rótulas do sistema.	62
Figura 49 – Posição medida e estimada pelo filtro de Kalman.	64
Figura 50 – Traço da matriz P^+	65
Figura 51 – Resposta transitória no eixo x . O gráfico do sinal de controle mostra na linha tracejada o limite de saturação do atuador.	70
Figura 52 – Resposta transitória no eixo y . O gráfico do sinal de controle mostra na linha tracejada o limite de saturação do atuador.	70
Figura 53 – Resposta transitória no eixo x com a esfera sendo posicionada mais próxima à origem. O gráfico do sinal de controle mostra na linha tracejada o limite de saturação do atuador.	71
Figura 54 – Resposta transitória no eixo y com a esfera sendo posicionada mais próxima à origem. O gráfico do sinal de controle mostra na linha tracejada o limite de saturação do atuador.	72
Figura 55 – Trajetórias para diferentes condições iniciais. As posições iniciais são denotadas por um “×”.	72
Figura 56 – Resposta em estado estacionário no eixo x	73
Figura 57 – Resposta em estado estacionário no eixo y	73
Figura 58 – Diagrama de estados para diferentes condições iniciais, denotadas por “×”.	74
Figura 59 – Distúrbios aplicados no eixo x	75
Figura 60 – Distúrbios aplicados no eixo y	75

Lista de tabelas

Tabela 1 – Posição na tela e nível digital correspondente.	51
Tabela 2 – Lista de peças e materiais utilizados no protótipo.	61
Tabela 3 – Tempo de impressão das peças.	61

Lista de abreviaturas e siglas

AC	Alternating Current
DC	Direct Current
CNC	Controle Numérico por Computador
CAD	Computer-Assisted Design
ABS	Acrylonitrile Butadiene Styrene
PLA	Polylactic acid
CPU	Central Processing Unit
ROM	Read-Only Memory
RAM	Random-Access Memory
EEPROM	Electrically Erasable Programmable Read-Only Memory
LMI	Linear matrix inequality
PWM	Pulse-Width Modulation
ADC	Analog-to-Digital Converter
DAC	Digital-to-Analog Converter
KF	Kalman Filter
SISO	Single-Input Single-Output
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
FDM	Fused Deposition Modeling
LTI	Linear Time-Invariant
BRL	Bounded Real Lemma

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Motivação	15
1.2	Objetivos	16
1.2.1	Gerais	16
1.2.2	Específicos	16
1.3	Notação	17
1.4	Estrutura do Trabalho	17
2	REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1	Sistema <i>Ball on Plate</i>	18
2.1.1	Estrutura do sistema	18
2.1.2	Modelagem matemática do sistema <i>Ball on Plate</i>	20
2.2	Manufatura Aditiva	22
2.3	Hardware	23
2.3.1	Sensores digitais	23
2.3.1.1	Tela de toque resistiva como sensor	24
2.3.2	Atuadores	26
2.3.3	Microcontroladores	27
2.4	Sistemas Digitais	29
2.4.1	Conversão de sinais	29
2.4.2	Modelos no espaço de estados discreto	31
2.5	Estabilidade de Lyapunov	32
2.5.1	Estabilidade no sentido de Lyapunov	32
2.5.2	Crítério de estabilidade de Lyapunov	33
2.5.3	Determinação de funções de Lyapunov para sistemas lineares e invariantes no tempo	35
2.6	Desigualdades matriciais lineares	35
2.6.1	Síntese de controladores por meio de desigualdades matriciais lineares	36
2.7	Controle Robusto e Otimização da Norma \mathcal{H}_∞	37
2.7.1	Sistemas de controle e robustez	37
2.7.2	Norma \mathcal{H}_∞	39
2.7.3	Sistemas sujeitos a distúrbios	41
2.7.4	<i>Bounded Real Lemma</i>	41
2.7.4.1	<i>Bounded Real Lemma</i> no tempo discreto	42
2.8	Saturação na Entrada de Controle	43

2.9	Filtro de Kalman	44
2.9.1	Motivação	44
2.9.2	Filtro de Kalman Discreto	45
3	MATERIAIS E MÉTODOS	48
3.1	Projeto da plataforma <i>Ball on Plate</i>	48
3.1.1	Microcontrolador: <i>ESP32-WROOM-32E</i>	48
3.1.2	Sensor: Tela de Toque Resistiva	50
3.1.2.1	Leitura das coordenadas	51
3.1.3	Atuador: Servomotor	52
3.1.4	Placa de Circuito Impresso	53
3.1.5	Estrutura Mecânica	53
3.1.5.1	Plataforma para a tela	55
3.1.5.2	Elos de revolução	55
3.1.5.3	Base e ponto de contato da plataforma	58
3.1.5.4	<i>Guard-Rail</i>	59
3.1.6	Impressão das peças e montagem	60
3.2	Modelagem, filtragem e síntese do controlador	62
3.2.1	Modelagem matemática	62
3.2.2	Estimação de Estados e Filtragem do Ruído	64
3.2.3	Síntese da lei de controle por meio de otimização convexa	65
4	RESULTADOS	69
4.1	Síntese do Controlador	69
4.2	Implementação no protótipo	69
4.2.1	Análise do estado transitório	69
4.2.2	Análise do estado estacionário	71
4.2.3	Estabilidade na presença de distúrbios	74
5	CONCLUSÕES	76
	REFERÊNCIAS	77

1 Introdução

1.1 Motivação

A garantia de estabilidade é, talvez, o princípio mais importante na teoria de controle. Os trabalhos seminais de Routh (1877) e Hurwitz (1895) para determinar se as raízes de um dado polinômio estão localizadas no semi-plano esquerdo do plano complexo, assim como o critério de Nyquist (NYQUIST, 1932), foram extensamente utilizados por engenheiros e pesquisadores no projeto de controladores no domínio da frequência. Em meados dos anos 50 e 60, a teoria de estabilidade de Lyapunov, publicada em 1892 porém largamente esquecida até os estudos de Chetayev em 1930, ganhou maior desenvolvimento devido aos desafios que controladores clássicos encontraram ao tentar estabilizar sistemas cada vez mais complexos como os criados durante a corrida espacial e Guerra Fria (PARKS, 1992). A estabilidade de Lyapunov se tornou o *de facto* critério de estabilidade de sistemas dinâmicos na segunda metade do século XX.

Paralelamente a esse desenvolvimento, os estudos de Kalman a respeito de modelos paramétricos no espaço de estados (KALMAN, 1959) deram origem à *teoria de controle moderno*, que se baseia largamente em modelos no domínio do tempo, em contraste à teoria clássica no domínio da frequência, e com maior facilidade para analisar sistemas MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*). Contudo, os novos avanços na teoria de controle encontraram problemas de implementação devido à necessidade do modelo matemático ser preciso. Para que as técnicas novas fossem realizáveis foi necessário construir métodos para estabilização na presença de distúrbios e cujas plantas não podiam ser precisamente conhecidas (SAFONOV, 2012). A partir daí, a teoria de controle moderno amadureceu, dando origem, entre outras, à área de pesquisa dos chamados *controladores robustos* que garantem a estabilidade de sistemas na presença de fatores como variação paramétrica e distúrbios exógenos. A síntese de tais controladores, que até então era uma tarefa custosa e complexa, eventualmente evoluiu para o problema de otimização convexa por meio de desigualdades matriciais lineares durante a década de 80 (BOYD, 1995).

Tais avanços na teoria de controle permitiram que problemas mais complexos fossem enfrentados com maior eficiência. Aqueles aos quais este trabalho dá foco são:

- Os estados de um sistema nem sempre são mensuráveis, e quando são, possuem ruído na medição em decorrência da natureza dos sensores;
- O ruído de medição e os distúrbios que ocorrem naturalmente na planta influenciam na eficiência do controlador em garantir a estabilidade, tornando a rejeição a

distúrbios um fator importante;

- Além disso, a saturação do sinal de controle é um problema persistente em sistemas reais, onde os atuadores possuem limites físicos e energéticos.

Assim, este trabalho propõe a construção de um sistema *Ball on Plate*, que consiste de uma superfície plana capaz de ser inclinada, onde sobre ela se encontra uma esfera. O objetivo do sistema é equilibrar a esfera na origem do sistema de coordenadas, problema que é conhecido na teoria de controle como problema de regulação. Para tal, serão utilizados servomotores como atuadores do sistema e para medição da posição da esfera será utilizada uma tela de toque resistiva. O sistema *Ball on Plate* é um sistema com dois graus de liberdade, que contém não-linearidades e é instável em malha aberta, sendo assim um excelente candidato para se aplicar técnicas modernas de controle.

O controlador utilizado na planta é baseado na teoria de controle robusto e busca minimizar a norma \mathcal{H}_∞ do sistema ao mesmo tempo que garante estabilidade na presença de saturação do sinal de controle. Mais adiante o problema será formulado por meio de um problema de otimização convexa. Dado que nem todos os estados são mensuráveis, o sistema de controle conta ainda com um filtro de Kalman (KALMAN, 1960) para além de estimar os estados não mensuráveis ser capaz de filtrar a saída do sistema, minimizando o ruído de medição.

1.2 Objetivos

1.2.1 Gerais

Desenvolver um sistema prático do tipo *Ball on Plate* e projetar um sistema de controle robusto que em conjunto com o filtro de Kalman seja capaz de garantir a estabilidade na presença de distúrbios e saturação do sinal de controle.

1.2.2 Específicos

1. Modelar o projeto mecânico do sistema em *software* de modelagem 3D;
2. Imprimir as peças modeladas através de impressora 3D;
3. Projetar a placa de circuito impresso, *PCB* (*Printed-Circuit Board*), para controle do sistema;
4. Confeccionar a *PCB* através de máquina de CNC (Controle Numérico por Computador);
5. Integrar o sistema mecânico e elétrico;

6. Desenvolver o algoritmo do microcontrolador para que o sistema processe o sinal do sensor e gere os comandos do atuador de maneira correta;
7. Realizar pesquisa acerca da estimação ótima de estados por meio do filtro de Kalman e técnicas de controle robusto;
8. Projetar um controlador utilizando técnicas de controle robusto que garanta estabilidade na presença de saturação do sinal de controle;
9. Implementar o filtro de Kalman em um microcontrolador e validar seu funcionamento no sistema;
10. Implementar o controlador projetado em um microcontrolador;
11. Analisar a resposta do sistema real em estado transitório e estado estacionário.

1.3 Notação

Uma variável temporal escalar ou vetorial x , ou matricial M , é representada em tempo contínuo pela notação $x(t)$ ou $M(t)$. Para suas contrapartes no tempo discreto a notação utilizada é x_k e M_k . A notação A_f , B_f , e C_f representam matrizes de sistemas em malha fechada tanto de sistema de tempo contínuos quanto discretos e no texto será explicitado seu domínio.

Uma matriz é dita ser definida positiva (negativa) se todos os seus autovalores forem maiores (menores) do que zero, representada por $M > 0$ ($M < 0$). Dadas duas matrizes M e N de dimensões apropriadas, a notação $M > N$ é equivalente a $M - N > 0$ e $M < N$ equivalente a $M - N < 0$. Para matrizes em que pelo menos um dos autovalores é igual a zero, a matriz é dita ser semi-definida positiva (negativa), representado como $M \geq 0$ ($M \leq 0$). O símbolo $*$ é utilizado para indicar que um elemento de uma matriz é um termo simétrico, de tal forma que

$$\begin{bmatrix} a & * \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b^\top \\ b & c \end{bmatrix}$$

1.4 Estrutura do Trabalho

O [Capítulo 2](#) deste trabalho apresenta o referencial teórico relacionado à estrutura física do sistema, dos sensores e atuadores utilizados e sobre a teoria de controle digital e robusta. O [Capítulo 3](#) apresenta os métodos de projeto e construção do protótipo desenvolvido, assim como a síntese da lei de controle. O [Capítulo 4](#) apresenta os resultados obtidos na implementação do controlador no sistema. Por fim, o [Capítulo 5](#) apresenta as conclusões e a perspectiva de trabalhos futuros.

2 Referencial Teórico

Neste capítulo são apresentadas as referências para escolha do modelo do sistema, fabricação do protótipo por manufatura aditiva e uma breve descrição de microcontroladores, sensores, atuadores e sistemas digitais. Além disso, são mostrados resultados referentes à estabilidade de sistemas dinâmicos por meio do critério de Lyapunov, uma breve introdução a respeito do uso de desigualdades matriciais lineares no contexto de sistemas de controle, critérios de estabilidade robusta, filtro de Kalman e condições de estabilidade na presença de saturação do sinal de controle.

2.1 Sistema *Ball on Plate*

Um sistema *Ball on Plate* é um sistema dinâmico consistindo de uma superfície plana com capacidade de ser inclinada, onde uma esfera é livre para se movimentar. O objetivo do sistema é torná-lo capaz de equilibrar a esfera em diferentes posições da superfície através do controle da inclinação. É um sistema bastante comum, utilizado em diversas literaturas para testar técnicas de controle pelo menos desde os anos 90 (HIROCHI; YOKOMICHI; SHIMA, 1995).

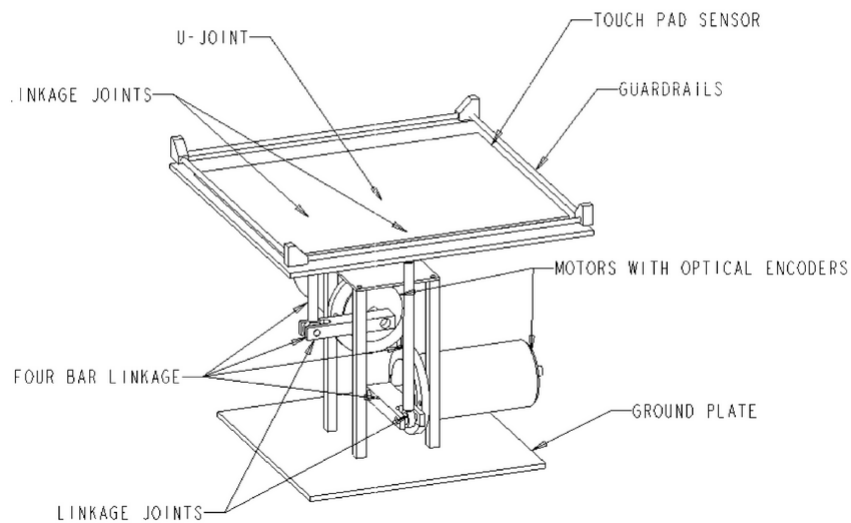
2.1.1 Estrutura do sistema

Awtar et al. (2002) apresentam a construção de um sistema *Ball on Plate*. A Figura 1 apresenta a estrutura mecânica básica do sistema em que é possível ver barras que auxiliam na atuação dos dois motores para inclinar a superfície.

A aquisição das informações de posição da esfera é uma das principais questões a ser levada em consideração nesse sistema. Existem algumas opções, as quais possuem vantagens e desvantagens (AWTAR et al., 2002):

1. Sensor de toque: baixo custo, precisão limitada;
2. Câmera digital com processamento de imagem: boa precisão, mas necessita de *software* adicional, assim como de uma estrutura própria para montagem da câmera;
3. Rede resistiva (potenciômetro 2D): baixo custo, mas possui resolução limitada e fiação excessiva;
4. Rede de sensores infravermelhos: baixo custo, mas possui resolução limitada e fiação excessiva;

Figura 1 – Projeto mecânico do sistema *Ball on Plate*
BALL-ON-PLATE BALANCING CONTROL SYSTEM



Fonte: (AWTAR et al., 2002, p.5)

5. *3D-motion tracking* (Rastreamento em 3 dimensões) da esfera através de um *transponder* ultrassônico acoplado à esfera, o qual se comunica com 3 receptores de sinal localizados remotamente: Mais preciso, porém requer um equipamento próprio com um alto custo adicional e a necessidade de adaptar a esfera para acoplar o *transponder*.

Awtar et al. (2002) também levantam as possíveis formas de se projetar o mecanismo de atuação do sistema apontam suas vantagens e desvantagens:

1. Dois atuadores lineares conectados em dois lados perpendiculares da base da superfície, a qual seria apoiada por uma articulação esférica axial: Boa precisão porém alto custo;
2. Acoplar a superfície em um *gimbal ring* onde um motor atua na rotação de um eixo e outro motor atua na rotação da superfície em relação ao anel: Solução não-simétrica pois um motor precisa mover o anel inteiro junto à superfície, assim possuindo uma carga de inércia muito grande quando comparado ao segundo motor;
3. Uso de cabos e polias para rotacionar a superfície utilizando dois motores: Ideia já utilizada anteriormente, sendo uma alternativa viável;
4. Mecanismo de acoplamento espacial para que a superfície seja inclinada por dois motores, consistindo de dois acopladores, cada um atuando em um eixo de rotação da superfície.

Para o modelo construído em (AWTAR et al., 2002), os autores decidiram por utilizar a tela de toque resistiva e os motores com acoplamento de inclinação. Outros artigos na literatura, como em (SUMEGA et al., 2018) e (NGUYEN et al., 2012) também propõem estruturas com essas mesmas configurações de sensores e atuadores. Com base nos métodos levantados, neste trabalho será utilizado como sensor uma tela de toque resistiva por oferecer a forma mais compacta, consistente e barata de se adquirir os dados de entrada do sistema, i.e., dados de posição da esfera na superfície. Para o atuador serão utilizados servomotores com acoplamento, como será descrito no Capítulo 3.

2.1.2 Modelagem matemática do sistema *Ball on Plate*

A modelagem matemática do sistema *Ball on Plate* pode ser feita utilizando as leis de Newton ou mesmo a equação de Euler-Lagrange. Nokhbeh e Khashabi (2011) apresentam uma modelagem matemática do sistema cuja superfície é inclinada por um motor de corrente contínua, visto na Figura 2. Para tal, os autores assumem as seguintes condições:

- A esfera não desliza sobre a superfície;
- A esfera é completamente simétrica e homogênea;
- Todas as fricções são negligenciadas;
- A esfera está sempre em contato com a superfície.

O modelo do sistema, determinado a partir da equação de Euler-Lagrange, possui 4 graus de liberdade: 2 para o movimento da esfera e 2 para a inclinação da superfície. A coordenada generalizada do sistema é x e y para a posição da esfera e α e β para as inclinações da superfície nas direções x e y , respectivamente, e a origem das coordenadas da esfera é no centro da superfície.

O torque exercido na superfície nas direções x, y é definido como τ_x e τ_y . A massa da esfera é denotada por m_b e o raio por r_b . O momento de inércia da esfera é denotado por I_b e o momento de inércia da superfície por I_p . Assim, o modelo matemático do sistema é bem conhecido e as seguintes equações diferenciais não-lineares descrevem o sistema dinâmico *Ball on Plate* (NOKHBEH; KHASHABI, 2011):

$$\left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}\right) \ddot{x} - m_b (x\dot{\alpha}^2 + y\dot{\alpha}\dot{\beta}) + m_b g \sin \alpha = 0 \quad (2.1)$$

$$\left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}\right) \ddot{y} - m_b (y\dot{\beta}^2 + x\dot{\alpha}\dot{\beta}) + m_b g \sin \beta = 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\tau_x = & \left(I_p + I_b + m_b x^2\right) \ddot{\alpha} + 2m_b x \dot{x} \dot{\alpha} + m_b x y \ddot{\beta} \\ & + m \dot{x} y \dot{\beta} + m_b x y \dot{\beta} + m_b g x \cos \alpha\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}\tau_y = & \left(I_p + I_b + m_b y^2\right) \ddot{\beta} + 2m_b y \dot{y} \dot{\beta} + m_b y x \ddot{\alpha} \\ & + m_b \dot{x} y \dot{\alpha} + m_b x y \dot{\alpha} + m_b g y \cos \beta\end{aligned}\quad (2.4)$$

Essas equações descrevem a posição da esfera em relação à superfície e a relação de um torque externo aplicado ao sistema nas direções x e y . Um modelo linear para o sistema pode ser obtido assumindo as seguintes aproximações (NOKHBEH; KHASHABI, 2011):

- O momento de inércia da esfera é dado por $I_b = \frac{2}{5} m_b r_b^2$;
- O ângulo de inclinação da superfície é $\pm 5^\circ$. Dessa forma $\alpha \ll 1$ e $\beta \ll 1 \rightarrow \sin \alpha \approx \alpha$, $\sin \beta \approx \beta$;
- Taxa de variação lenta para as inclinações da superfície: $\dot{\alpha} \ll 0$, $\dot{\beta} \ll 0$, logo $\dot{\alpha}\dot{\beta} \approx 0$, $\dot{\alpha}^2 \approx 0$, $\dot{\beta}^2 \approx 0$.

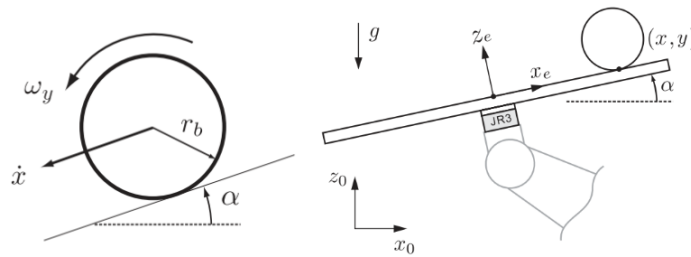
Assim, se consideramos servomotores atuando sobre os ângulos de inclinação, o modelo dinâmico linear para o sistema *Ball on Plate* é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{7}{5} \ddot{x} + g\alpha &= 0 \\ \frac{7}{5} \ddot{y} + g\beta &= 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

Note que a [Equação 2.5](#) é muito mais simples que as EDOs não-lineares, além da dinâmica das posições x e y estarem desacopladas, permitindo um sistema de controle isolado para cada uma. Podemos ainda levar em consideração forças dissipativas devido ao atrito do movimento da esfera na superfície (CASTRO et al., 2013), tal que o sistema linear é:

$$\begin{aligned}\frac{7}{5} \ddot{x} + g\alpha + \frac{1}{m_b} f_c \dot{x} &= 0 \\ \frac{7}{5} \ddot{y} + g\beta + \frac{1}{m_b} f_c \dot{y} &= 0\end{aligned}\quad (2.6)$$

em que f_c é o coeficiente de atrito.

Figura 2 – Sistema *Ball on Plate*.

Fonte: Adaptado de (NOKHBEH; KHASHABI, 2011, p.3)

2.2 Manufatura Aditiva

De forma a atender aos objetivos desta pesquisa, o projeto mecânico do sistema *Ball on Plate* será realizado por meio de impressão 3D, que pode ser definida como o processo de realizar um objeto físico a partir de uma representação geométrica computadorizada através do depósito sucessivo e ordenado de materiais (SHAHRUBUDIN; LEE; RAMLAN, 2019). O processo de manufatura aditiva é o contrário de processos subtrativos, que extraem material de um objeto para se obter o produto desejado.

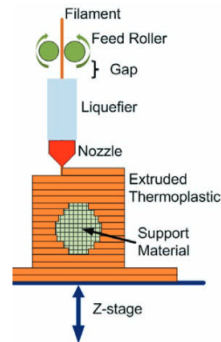
A forma mais popular de manufatura aditiva é a impressão 3D. O processo para se construir um objeto através de impressão 3D pode ser sintetizado na seguinte forma:

1. Projetar um modelo em *software* de CAD (*Computer-Assisted Design*);
2. Gerar um arquivo capaz de ser lido por software de fatiamento, normalmente no formato *.STL*;
3. Utilizar software de fatiamento para ajustar o modelo às especificações da impressora e da produção, definindo detalhes como a resolução da peça e a sua porcentagem de preenchimento interno;
4. Enviar o arquivo à impressora 3D para que possa começar o processo de criação do objeto, camada por camada.

O método mais popular para se realizar a impressão é a Modelagem por Fusão e Deposição, FDM (*Fusion Deposition Modeling*) que consiste na extrusão de termoplásticos ou cera (CAMPBELL et al., 2011) através de um bico aquecido que deposita o material em camadas, como exibido na Figura 3. Como o plástico é aquecido até a temperatura de fusão, ele se torna liquefeito e passa pelo bico do extrusor livremente, esfriando novamente ao ser depositado na peça, endurecendo. Quando a impressora termina de realizar uma camada, ela sobe seu eixo Z em 1 unidade e começa a depositar o plástico da próxima

camada, até completar o objeto. O plástico é enviado para o extrusor na forma de um filamento fino, alimentado por roletes.

Figura 3 – Processo de Modelagem por Fusão e Deposição (FDM).



Fonte: (CAMPBELL et al., 2011, p.4)

Existem também outras técnicas para realizar a impressão 3D, como estereolitografia, utilizada nas primeiras impressoras 3D, capaz de realizar a síntese de objetos poliméricos e metálicos (CAMPBELL et al., 2011). Na Impressão 3D, em especial na impressão por FDM, o material mais comumente utilizado é plástico do tipo ABS (*Acrylonitrile butadiene styrene*) ou PLA (*Polylactic acid*).

As vantagens da manufatura aditiva com impressão 3D para esta pesquisa são principalmente a capacidade que ela proporciona para rápida prototipação de modelos e facilidade de repor peças. Dessa forma, será possível testar e modificar o modelo a ser utilizado no sistema *Ball on Plate* até que ele esteja de acordo com as necessidades da pesquisa, assim como repor rapidamente peças que possam eventualmente vir a quebrar.

2.3 Hardware

De forma a capturar os dados de entrada do sistema, *i.e.* posições da esfera, e aplicar um sinal de controle aos servomotores, o presente trabalho irá utilizar sensores e atuadores eletrônicos, assim como embarcar os algoritmos e rotinas em um microcontrolador.

2.3.1 Sensores digitais

Um sensor é um dispositivo capaz de detectar mudanças de magnitude em uma dada grandeza física e que converte essa mudança em um sinal utilizável por sistemas de controle (ALCIATORE, 2012). O sinal de saída dos sensores normalmente é convertido por um transdutor para grandezas pneumáticas ou elétricas. Esses sinais são de natureza

analógica, portanto torna-se necessário a utilização de um conversor analógico-digital (ADC) para que seu sinal seja utilizado por sistemas digitais.

Assim, os sensores digitais podem ser caracterizados como sensores cuja saída é uma grandeza de amplitude discreta e com uma taxa fixa de amostragem, normalmente tensão ou corrente elétrica, que tem seus valores definidos em intervalos fixos pela resolução do ADC e que variam entre um limite inferior e superior. Isso apresenta uma grande vantagem sobre sensores analógicos, pois são menos suscetíveis a ruído (TOCCI; WIDMER; MOSS, 2011). Para se escolher um sensor adequado, normalmente são consideradas algumas de suas características como intervalo de medição, tipo de sinal de saída, taxa máxima de amostragem, alimentação necessária e se ele necessita de circuitos auxiliares.

Os sensores são de fundamental importância em sistemas de controle realimentados, pois através deles é possível verificar o quanto a saída do sistema difere de sua referência, caracterizado como o erro do sistema. Sensores podem ser inseridos em qualquer lugar da malha de controle, mas normalmente são inseridos no ramo de realimentação do sistema em malha fechada (DORF; BISHOP, 2017).

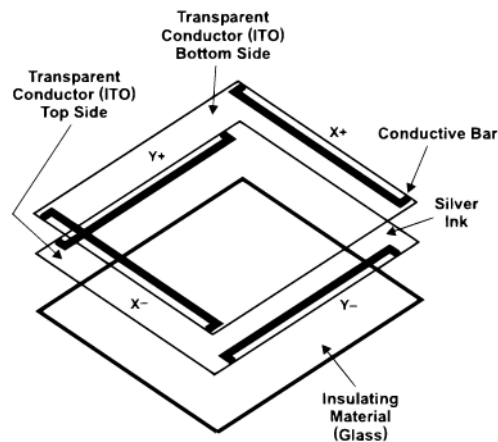
2.3.1.1 Tela de toque resistiva como sensor

Neste trabalho, será utilizado uma tela de toque resistiva como sensor de forma a adquirir as informações de posição da esfera no sistema *Ball on Plate*. Esse tipo de sensor é comumente utilizado em interfaces humano-computador onde sua principal funcionalidade é de permitir que um usuário clique nos elementos gráficos que aparecem na tela. Como pode ser visto na Figura 4, sua estrutura é constituída de 3 camadas de material: a camada isolante, normalmente vidro; uma camada de material condutor e uma camada de material resistivo. Quando um usuário aplica uma pressão com os dedos na tela, as camadas entram em contato e um sinal elétrico é gerado (DOWNS, 2005).

As telas de toque resistiva são instrumentos utilizados em grande parte devido ao seu baixo custo e boa precisão comparada a outras alternativas na mesma faixa de preço. Elas podem, no geral, ser divididas em duas categorias: telas de toque com 4 terminais e telas de toque com 5 terminais. Um esquema dos dois tipos pode ser visto na Figura 5. Para a tela de toque com 5 terminais, o quinto é um terminal de saída do sinal, oculto na figura.

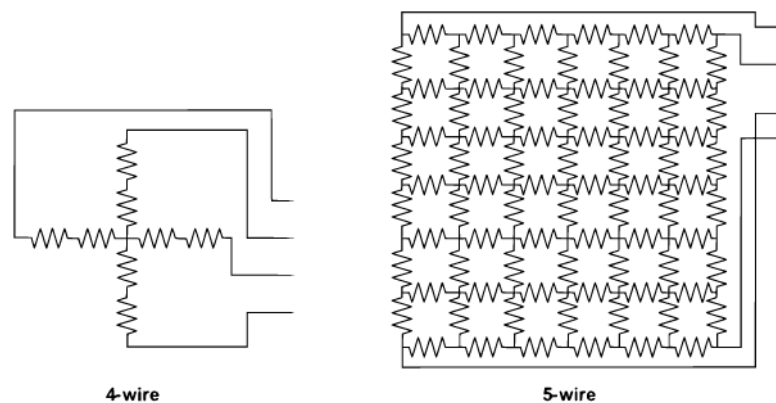
De forma a se obter informações de coordenada a partir do toque em uma tela com 4 terminais, aplica-se uma tensão elétrica entre os terminais dos eixos x e y . Quando ocorre um sinal na tela de toque, sua estrutura se deforma e as camadas condutoras entram em contato, criando um divisor de tensão. A variação na tensão causada pela deformação pode ser então utilizada para se determinar a coordenada onde foi realizado o toque.

Figura 4 – Estrutura da tela de toque resistiva.



Fonte: (DOWNS, 2005, p.1)

Figura 5 – Arquitetura das telas de toque com 4 e 5 terminais.

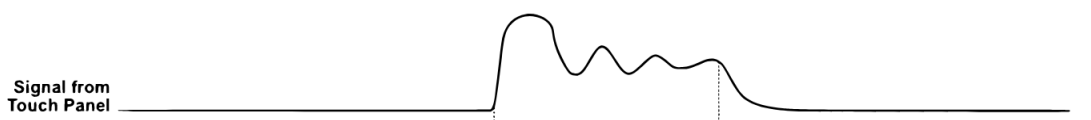


Fonte: (DOWNS, 2005, p.1)

Para as telas com 5 terminais, a camada superior atua como o quinto terminal e serve para sentir diferenças de tensão nas direções x e y . As coordenadas são obtidas através do correto chaveamento dos seus 4 terminais, de forma que o quinto terminal atua como a saída do sistema. Se os terminais dos cantos superiores estiverem com uma tensão positiva em relação aos terminais dos cantos inferiores, a saída do quinto terminal será a tensão análoga à posição no eixo y . Se os terminais dos cantos esquerdo estiverem com uma tensão positiva em relação aos terminais do canto direito, a saída será a tensão análoga à posição no eixo x . Dessa forma, para se obter o sinal de saída do par de coordenadas, deve-se chavear terminais da tela de toque de tal forma que a cada ciclo de operação sejam realizadas duas leituras.

Uma dificuldade apresentada ao se trabalhar com as telas de toque resistivas é o transiente gerado pelo toque na tela. Como mostra a [Figura 6](#), quando um toque é feito na tela, o nível de tensão cresce até que chega ao nível correspondente à posição do objeto. No entanto, o sinal possui um transiente subamortecido que necessita de um certo tempo para estabilizar no nível correto. Dada essa natureza do sensor, é necessário escolher o tempo de amostragem correto de forma que a leitura da coordenada não seja muito afetada por esse transiente. Além disso, a natureza de leitura das coordenadas, que se baseia no chaveamento constante entre dois estados de tensão, induz um ruído no sinal se este possuir um tempo de amostragem muito pequeno. O uso da tela de toque apresenta então dois distúrbios no sinal de posição que deverão ser minimizados através do filtro que será desenvolvido: o transiente de tensão e o distúrbio do sinal causado pelo chaveamento.

Figura 6 – Sinal de tensão analógico quando um objeto toca a tela.



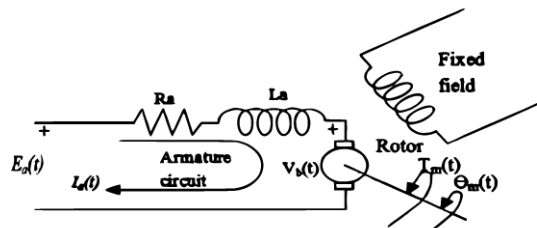
Fonte: Adaptado de ([DOWNS, 2005](#), p.2)

2.3.2 Atuadores

Atuadores são os elementos de um sistema mecatrônico capazes de agir sobre alguma variável, seja através de um movimento mecânico como o abrir e fechar de uma válvula ou variar a saída de algum sinal como tensão ou corrente elétrica. Um dos atuadores mais utilizados pela indústria é o motor elétrico ([ALCIATORE, 2012](#)), devido à sua grande versatilidade e precisão. Existem diversos tipos de motores, classificados quanto à sua alimentação, corrente *AC* ou *DC*, e quanto à sua construção, se possui ou não escovas ou ao número de fases dentre outras características. Um dos tipos mais utilizados de motor elétrico é o servomotor, pois ele permite controle preciso sobre o ângulo de rotação do seu eixo ([BATOOL et al., 2022](#)).

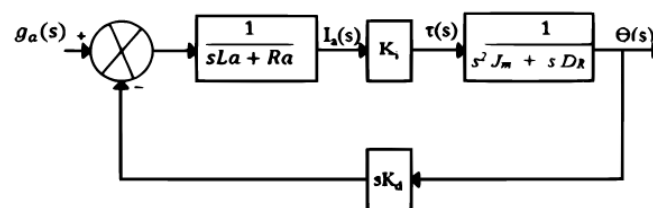
O servomotor *DC* pode ser entendido como um circuito resistivo-indutivo e um eixo rotor, descrito na [Figura 7](#). Quando um sinal de tensão é enviado ao rotor, este gera um torque devido à força eletromotriz e começa a girar. Ao controlar o nível de tensão enviada para o motor é possível controlar sua rotação.

O servomotor por meio da realimentação do ângulo, usa este sinal para regular a tensão que é enviada para o motor de forma a controlar a angulação do eixo, como descrito no diagrama de blocos em malha fechada da [Figura 8](#), em que é possível ver o fluxo de conversão do sinal de corrente para torque e por fim para ângulo, que é então realimentado.

Figura 7 – Circuito que representa um servomotor *DC*.

Fonte: (ABDULLAH; AZIZ; SHNEEN, 2022, p.2)

Figura 8 – Diagrama de blocos para o servomotor.



Fonte: (ABDULLAH; AZIZ; SHNEEN, 2022, p.2)

2.3.3 Microcontroladores

Microcontroladores podem ser definidos como circuitos integrados que unificam em um único dispositivo diferentes circuitos e funcionalidades (OJHA; SIKKA, 2021) e podem ser programados utilizando linguagens de programação para realizar diferentes tarefas a depender de quais funcionalidades eles possuem. O primeiro microcontrolador comercialmente disponível, o TMS1000, descrito na Figura 9, foi inicialmente utilizado em calculadoras portáteis e contava com unidade de processamento (CPU), memória ROM, RAM e um temporizador de 4 bits (RAGHUNATHAN, 2021).

Figura 9 – Microcontrolador TMS1000.



Fonte: (RICHARDS, 1976)

O Intel 8061 introduziu a funcionalidade de modulação de largura de pulso, PWM (*Pulse-Width Modulation*), originalmente utilizado para controle eletrônico de motores em veículos Ford. O uso de PWM permite ao dispositivo digital criar sinais analógicos de tensão, simulando-os através da modulação do pulso digital. Outra funcionalidade

importante dos microcontroladores, introduzida no Motorola 68HC11 foi um conversor analógico-digital de 8 *bits*, desenvolvido originalmente com o propósito de controle de motores automotivos da *General Motors* (RAGHUNATHAN, 2021). Através desse conversor é possível para o microcontrolador obter dados de sensores analógicos e utilizá-los em seus algoritmos (RAGHUNATHAN, 2021).

Um dos avanços mais significativos veio com as memórias reprogramáveis. Os primeiros microcontroladores possuíam memória ROM, sem a possibilidade de sobrescrita e memória RAM, cujos dados são perdidos caso haja falha de energia. Essa inflexibilidade tornava custoso o processo de introduzir um novo aparelho comercial. Para cada um era necessário reprojeter e fabricar novos circuitos integrados. O já mencionado 68HC11 foi o primeiro microcontrolador a contar com memória EEPROM, podendo ser eletronicamente reprogramado, e a fabricante Toshiba desenvolveu a memória *FLASH*, capaz de reprogramar blocos individuais de memória (RAGHUNATHAN, 2021). Essa vantagem permite aos microcontroladores serem reutilizados em diferentes cenários onde a necessidade de pequenas mudanças de parâmetros nos algoritmos são necessárias (NEALE; NELSON; MOORE, 1970):

- Computadores de bordo onde diferentes dados para uma particular operação são necessários;
- Sistemas de controle industriais, onde certas instruções precisam ser alteradas para acomodar nova instrumentação ou procedimentos de teste;
- Projetos de automação e processamento onde, apesar de o produto final possuir instruções fixas, é vantajoso poder alterar o algoritmo durante os estágios de desenvolvimento.

No contexto de sistemas de controle realimentados, houve primeiramente a mudança de paradigma na qual os controladores mecânicos foram substituídos por controladores elétricos devido à maior facilidade de modelagem matemática dos sistemas (AGUIRRE, 2020). A próxima mudança de paradigma foi o desenvolvimento da eletrônica digital e dos microcontroladores, originando dispositivos mais compactos, robustos e capazes de realizar tarefas complexas com rápida mudança de configuração, fazendo com que os microcontroladores suplantassem os controladores analógicos e sistemas digitais modulares. Em especial no período da Guerra Fria, houve grande desenvolvimento da teoria de controle digital para o projeto e implementação de controladores digitais que pudessem rapidamente ser embarcados e customizados em sistemas aeroespaciais (DORF; BISHOP, 2017). O microcontrolador escolhido para uso neste trabalho, como será mostrado no Capítulo 3, possui e utiliza todas essas funcionalidades de maneira extensiva para cumprir os objetivos desejados.

2.4 Sistemas Digitais

Os sinais produzidos por sistemas dinâmicos podem ser classificados nas seguintes categorias (AGUIRRE, 2023):

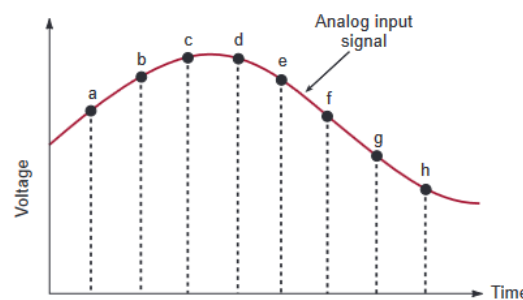
- Um sinal $f(t)$ é definido contínuo no tempo se $t \in \mathbb{R}$.
- Um sinal $f(t)$ é definido discreto no tempo se $f(t)$ for conhecido apenas em instantes de tempo $t_1, t_2 \dots t_n$ onde $t_n \in \mathbb{R}$. Se esses instantes forem igualmente espaçados no tempo, ou seja, $T = t_n - t_{n-1}$, pode-se escrever $t_1 = T, t_2 = 2T \dots t_k = kT$ e $f(t)$ pode ser representado por $f(kT)$ onde $k \in \mathbb{Z}$. Tais sistemas também são denominados *sistemas amostrados*. Um exemplo pode ser visto na Figura 10 em que o sinal é conhecido apenas nos instantes a, b, c, \dots, h .

Um sistema é dito analógico se ele possuir amplitude $f(t) \in \mathbb{R}$ e digital se a amplitude do sinal for quantizada e assumir apenas certos valores discretos (OGATA, 1987).

2.4.1 Conversão de sinais

Os sistemas dinâmicos reais muitas vezes possuem sinais analógicos: uma tensão elétrica, o torque de um motor, a velocidade de um carro e outros são sinais de interesse para o projeto de controladores. Para utilizar o sinal de sensores em microcontroladores, as grandezas que não são de natureza elétrica, como pressão ou temperatura, precisam ser convertidas para um sinal elétrico análogo a esse e então convertido para um sinal digital. Isso se dá por meio de dispositivos *transdutores* que convertem os sinais para tensão ou corrente elétrica de forma proporcional à grandeza física medida. A saída elétrica analógica do transdutor é então convertida em sinal digital por meio de um conversor analógico-digital, que realiza a amostragem, como indicado na Figura 10 e converte o sinal para digital.

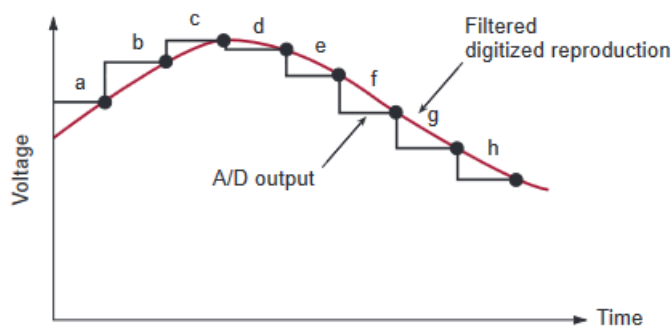
Figura 10 – Amostragem de um sinal analógico.



Fonte: (TOCCI; WIDMER; MOSS, 2011, p.747)

O conversor mais utilizado na prática é o segurador de ordem zero (OGATA, 1987), que amostra o sinal em instantes igualmente espaçados de tempo e mantém constante o sinal amostrado entre esses instantes, como indicado na Figura 11. Seguradores de ordem superior introduzem atraso no sinal, que não é desejado em operações sensíveis a atraso de tempo (OGATA, 1987).

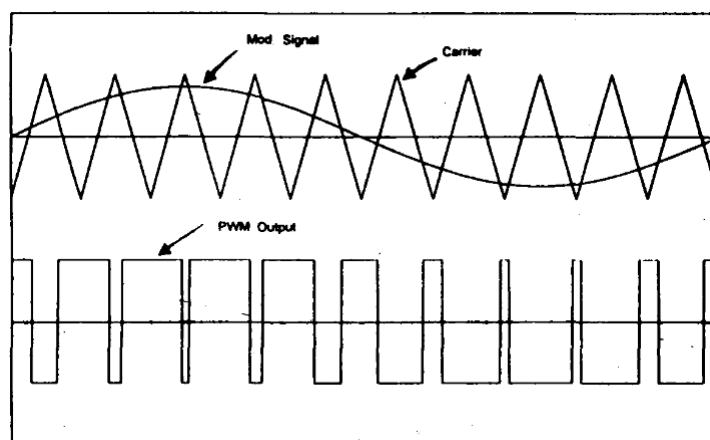
Figura 11 – Segurador de ordem zero mantendo o sinal constante.



Fonte: (TOCCI; WIDMER; MOSS, 2011, p.747)

Por exemplo, o sensor utilizado no projeto do sistema *Ball on Plate* converte pressão em tensão por meio do toque na tela, como mostrado na Figura 6, que por sua vez é um sinal analógico que precisa ser convertido para um sinal digital por meio de um ADC. Já a saída do controlador que irá atuar no servomotor do sistema *Ball on Plate* é convertida por meio da técnica de modulação de largura de pulso, que através do chaveamento controlado de uma saída digital consegue simular um sinal de tensão analógica, como ilustrado na Figura 12. Uma demonstração matemática desse processo está disponível em (JALNEKAR; JOG, 2000).

Figura 12 – Modulação de largura de pulso emulando uma onda analógica.



Fonte: (JALNEKAR; JOG, 2000, p.4)

2.4.2 Modelos no espaço de estados discreto

Para o projeto de controladores digitais, o modelo do sistema precisa ser convertido do tempo contínuo para o tempo discreto. Para isso, toma-se inicialmente um sistema SISO linear e invariante no tempo representado no espaço de estados de tempo contínuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $D \in \mathbb{R}$.

Considerando que o período de amostragem T_s do sistema é fixo e que o sinal de entrada muda apenas em instantes igualmente espaçados, correspondente a um segurador de ordem zero, a representação no tempo discreto das matrizes de estado é dada por (OGATA, 1987):

$$\begin{aligned} A_d &= e^{AT_s} \\ B_d &= \int_0^{T_s} e^{A\lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que $\lambda = T_s - t$. Como a saída de um sistema no espaço de estados é algébrica, a discretização não altera as matrizes C e D (AGUIRRE, 2023). Se A_d for não singular, a matriz B_d pode ser simplificada para:

$$B_d = (e^{AT_s} - I)A^{-1}B \quad (2.9)$$

Uma forma de se obter diretamente as matrizes de estado discretas é através da seguinte propriedade (DECARLO, 1989):

$$\begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_s} \quad (2.10)$$

Portanto, um sistema SISO linear e invariante no tempo representado no espaço de estados discreto pode ser definido como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned} \quad (2.11)$$

Em que x_{k+1} é a notação utilizada para representar $x[k+1]$ e x_k para representar $x[k]$. A estabilidade do sistema discreto (2.11) é formulada por meio do critério de Lyapunov na [subseção 2.6.1](#).

2.5 Estabilidade de Lyapunov

Na literatura existem diversos métodos para análise de estabilidade, dentre eles os discutidos em [Routh \(1877\)](#), [Hurwitz \(1895\)](#) e mais notavelmente o critério desenvolvido em [Nyquist \(1932\)](#). No entanto, todos esses critérios se limitam à análise no domínio da frequência de sistemas lineares. O critério de Lyapunov, publicado originalmente em 1892 ([PARKS, 1992](#)) possui a vantagem de ser aplicável a sistemas não-lineares, multivariáveis e sistemas no espaço de estados. Para definir o critério de Lyapunov, primeiro é necessário definir o significado de *estabilidade no sentido de Lyapunov* ([AGUIRRE, 2020](#)).

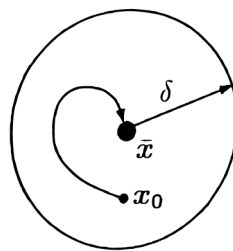
2.5.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov

Considere primeiramente um sistema não-linear autônomo no tempo contínuo representado pela equação diferencial vetorial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) \quad (2.12)$$

em que $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e f um campo vetorial. Para a [Equação 2.12](#) um ponto de equilíbrio, ou ponto onde o campo vetorial é nulo, é definido por $f(\mathbf{x}) = 0$, indicado por $\bar{\mathbf{x}}$ e ilustrado na [Figura 13](#). Para sistemas onde os pontos de equilíbrio estão isolados uns dos outros, estes podem ser deslocados por meio de uma transformação de coordenadas para a origem, de forma que pode-se assumir $f(0) = 0$, sem perda de generalidade ([OGATA, 1987](#)).

Figura 13 – Estabilidade assintótica.



Fonte: ([AGUIRRE, 2020](#), p.143)

Considere ainda, no caso \mathbb{R}^2 , uma vizinhança de $\bar{\mathbf{x}}$ representada por $U_\delta \subset \mathbb{R}^2$ como um círculo de raio $0 < \delta \ll 1$, indicando que a região U_δ é pequena. Para uma condição inicial $\mathbf{x}_0 \in U_\delta$ em t_0 , ou seja, $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$. Se

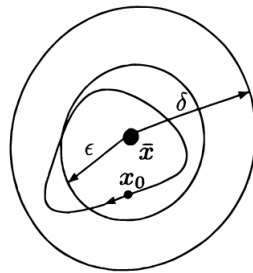
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \rightarrow 0, \quad t > t_0 \quad (2.13)$$

então o ponto fixo $\bar{\mathbf{x}}$ é dito *assintoticamente estável*. Em outras palavras, para uma determinada condição inicial dos estados, sua trajetória converge para o ponto de equilíbrio

quando t cresce indefinitivamente se a condição inicial se encontrar no chamado *domínio de atração* de $\bar{\mathbf{x}}$ (OGATA, 1987).

Considere novamente um caso \mathbb{R}^2 para a vizinhança do ponto de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ e, além da região U_δ , uma outra região circular U_ϵ com raio $0 < \epsilon < \delta \ll 1$, descrito na Figura 14. Dada uma condição inicial $x_0 \in U_\epsilon$, se $\exists \delta > 0$ tal que $\mathbf{x}(t) \in U_\delta, \forall t > t_0$ então $\bar{\mathbf{x}}$ é um centro e *estável*. Em outras palavras, se a condição inicial se encontrar em uma região U_ϵ , sua trajetória é limitada pela vizinhança do ponto de equilíbrio. Essa estabilidade recebe o nome de *estabilidade de Lyapunov* (AGUIRRE, 2020).

Figura 14 – Estabilidade de Lyapunov.



Fonte: (AGUIRRE, 2020, p.143)

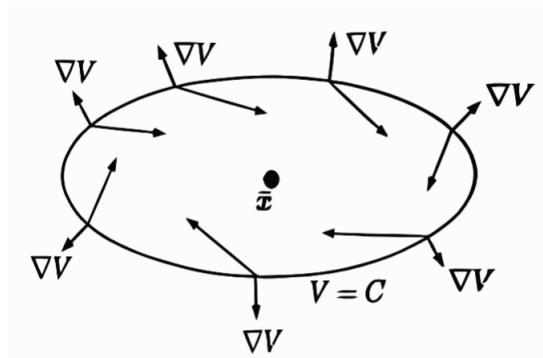
Pode-se ver que para Lyapunov, a estabilidade de um sistema em torno de um ponto de equilíbrio tem por foco a ideia de que as trajetórias dos estados estão limitadas a uma região na vizinhança do ponto. Para casos *n-dimensionais*, a ideia de um círculo em torno de um ponto estende-se à ideia de uma hipersuperfície fechada onde os estados são limitados pela superfície do domínio de atração (OGATA, 1987).

2.5.2 Critério de estabilidade de Lyapunov

Para determinar a estabilidade de um ponto, assumindo que a origem é um ponto de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$, define-se uma função escalar $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\exists \dot{V}, V(0) = 0$ e $V(\mathbf{x}) = C$, onde $C > 0$ é um caminho fechado em torno da origem e para cada C o caminho é diferente. Tal função é denominada *função de Lyapunov candidata* (AGUIRRE, 2020).

Considerando novamente o caso \mathbb{R}^2 , o vetor gradiente ∇V é normal à curva de nível $V(\mathbf{x}) = C$ e considerando que o produto interno de dois vetores é negativo se o ângulo entre eles for obtuso, pode-se verificar que, se o produto interno entre o campo vetorial f e ∇V for negativo, a trajetória de f é obtusa em relação a C , e aponta para dentro da curva, indicando que o campo vetorial segue em direção ao ponto de equilíbrio conforme t cresce indefinitivamente e é portanto assintoticamente estável, como ilustrado na Figura 15. Assim, tem-se como condição de estabilidade assintótica:

$$\nabla V \cdot f < 0 \quad (2.14)$$

Figura 15 – $\nabla V \cdot f < 0$ apontando para o ponto de equilíbrio.

Fonte: (AGUIRRE, 2020, p.148)

No caso de $\nabla V \cdot f \leq 0$, o ponto é estável, mas não de maneira assintótica (OGATA, 1987). Considerando ainda a Equação 2.12, pode-se reescrever (2.14) como

$$\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} < 0 \quad (2.15)$$

e pela regra da cadeia sabe-se que $\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}}$ (AGUIRRE, 2020), tornando possível formular o critério de estabilidade, também conhecido como *método direto de Lyapunov* como sendo:

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0 \\ \dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

e se $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, então o ponto deixará de possuir estabilidade assintótica, porém ainda será estável no sentido de Lyapunov, ou seja, as trajetórias dos estados ainda estarão limitadas por uma região na vizinhança do ponto de equilíbrio.

Analogamente, para sistemas discretos, como o descrito em (2.11), o critério de estabilidade toma a seguinte forma (ZHOU; DOYLE, 1998):

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0 \\ \Delta V(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

O critério de Lyapunov pode ser entendido como uma função de energia do sistema que, quando se encontra no domínio de atração de um ponto de equilíbrio, dissipa sua energia até que ela atinja um ponto mínimo no ponto de equilíbrio. No geral, existem infinitas funções de Lyapunov candidatas que atendem às condições do critério, tornando as funções de Lyapunov um instrumento mais amplo para determinação de estabilidade de sistemas dinâmicos (OGATA, 1987). O problema de determinação de pontos de equilíbrio estáveis de sistemas discretos então se resume a encontrar uma função $V(\mathbf{x})$ que satisfaça a Equação 2.17.

2.5.3 Determinação de funções de Lyapunov para sistemas lineares e invariantes no tempo

Considere o sistema linear autônomo e invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.18)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se A for não singular, o único ponto de equilíbrio do sistema é a origem. Deseja-se encontrar uma função de Lyapunov tal que $x(t)$ seja estável. Para sistemas lineares e invariantes no tempo as funções candidatas de Lyapunov podem ser definidas como funções quadráticas $V(x(t)) = x(t)^\top Px(t)$ em que $P = P^\top > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Assim, para que a condição de (2.16) seja verdadeira, temos que $P > 0$ e a derivada temporal da função candidata pela regra do produto deve ser negativa:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^\top(t)Px(t) + x^\top(t)P\dot{x}(t) \\ \dot{V}(x) &= x^\top(t)A^\top Px(t) + x^\top(t)PAx(t) \\ \dot{V}(x) &= x^\top(t)(A^\top P + PA)x(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para isso, é necessário que $A^\top P + PA < 0$ (OGATA, 1987). Reformulando (2.16), tem-se que a origem do sistema dinâmico linear autônomo e invariante no tempo definido por (2.18) é assintoticamente estável se existir uma matriz P simétrica tal que

$$\begin{cases} P > 0 \\ A^\top P + PA < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Desta forma, pode-se considerar P como uma variável matricial que deve ser encontrada para verificar a estabilidade assintótica. De forma análoga, para o caso de um sistema discreto sujeito a (2.17) com funções candidatas de forma quadrática o critério é reformulado como (ZHOU; DOYLE, 1998):

$$\begin{cases} P > 0 \\ A_d^\top PA_d - P < 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

2.6 Desigualdades matriciais lineares

Uma desigualdade matricial linear, ou LMI (*Linear Matrix Inequality*), pode ser definida da seguinte forma (BOYD, 1995):

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.22)$$

em que $x_i \in \mathbb{R}^m$ são as variáveis de decisão e as matrizes $F_i = F_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são dadas. Tal equação é uma restrição convexa de x de forma que o conjunto $\{x \mid F(x) > 0\}$ é convexo.

Por meio de (2.22) é possível representar uma gama de problemas relacionados a restrições convexas em x (BOYD, 1995). Além disso, múltiplas LMIs podem ser solucionadas simultaneamente ao se criar uma nova LMI cuja diagonal principal são as LMIs originais.

É possível também utilizar matrizes como variáveis de decisão em uma LMI, como a desigualdade de Lyapunov em (2.20) onde a matriz P é uma variável e a matriz A é dada (BOYD, 1995). Assim, o problema de se determinar a estabilidade de um sistema se dá por meio da verificação de existência das variáveis de decisão que satisfaçam as restrições convexas impostas ou provar que tais variáveis não existem.

As condições de estabilidade e desempenho relacionadas ao projeto de controladores desta pesquisa são desenvolvidas por meio de LMIs, visto que a reformulação dos problemas para esse formato permite utilizar ferramentas de matemática computacional capazes de determinar a factibilidade das variáveis de decisão. Assim, ao reformular os diversos problemas relacionados ao projeto de controladores na forma de desigualdades matriciais lineares, é possível determinar e sintetizar os controladores apenas chegando-se à formulação na forma de LMI, que então por métodos iterativos, ou *solvers*, é solucionada ou provada infactível (AGUIRRE et al., 2007).

2.6.1 Síntese de controladores por meio de desigualdades matriciais lineares

Considere a lei de controle por realimentação de estados clássica

$$u_k = Kx_k.$$

Substituindo em (2.11), temos o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_d + B_d K)x_k \\ y_k &= (C + DK)x_k \end{aligned} \quad (2.23)$$

Note que o sistema em malha fechada é um sistema autônomo. Logo a estabilidade pode ser verificada por (2.17) e seu consequente critério de Lyapunov para sistemas lineares e invariantes no tempo, de tempo discreto (2.21), tal que:

$$\begin{cases} P > 0 \\ (A_d + B_d K)^\top P (A_d + B_d K) - P < 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

em que K também é uma variável de decisão, criando uma não-linearidade devido ao seu produto com a matriz P . Para linearizar a desigualdade, a segunda parte de (2.24) é reescrita como $P - (A_d + B_d K)^\top P (P^{-1}P) (A_d + B_d K) > 0$ e faz-se uso do complemento de Schur (BOYD, 1995):

$$\begin{bmatrix} P & (A_d + B_d K)^\top P \\ P(A_d + B_d K) & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.25)$$

Aplicando a transformação de similaridade com $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1})$, temos que:

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}A_d^\top + P^{-1}K^\top B_d^\top \\ A_dP^{-1} + B_dKP^{-1} & P^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.26)$$

Finalmente, fazendo-se uso das variáveis linearizantes $Q = P^{-1} > 0$ e $Y = KP^{-1}$

$$\begin{bmatrix} Q & QA_d^\top + Y^\top B_d^\top \\ A_dQ + BY & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (2.27)$$

Note que a desigualdade acima é linear e pode, portanto, ter suas variáveis de decisão Q e Y encontradas ou ser provada infactível por programas de matemática computacional. A matriz P e os ganhos são recuperados pelas relações $P = Q^{-1}$ e $K = YP$.

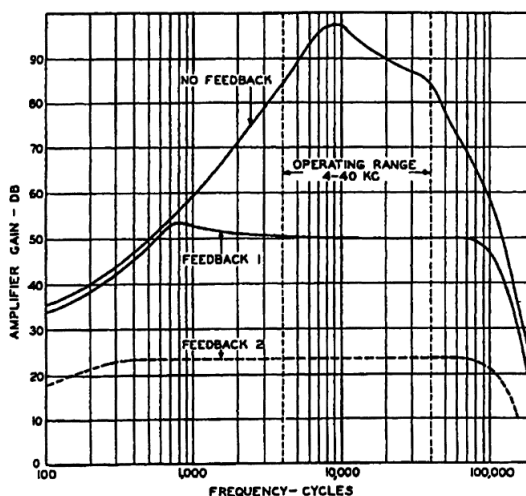
2.7 Controle Robusto e Otimização da Norma \mathcal{H}_∞

2.7.1 Sistemas de controle e robustez

O desenvolvimento de sistemas realimentados sempre esteve, de certa forma, preocupado com a ideia de robustez. Mesmo antes do uso de equações diferenciais para entender processos dinâmicos, os projetistas dos primeiros sistemas realimentados, como as válvulas governadoras, tinham ciência de que os sistemas estavam sujeitos a distúrbios externos ao processo (AGUIRRE, 2020). Com o advento do formalismo matemático para a engenharia de controle, e o desenvolvimento do projeto de controladores por meio do domínio da frequência de Laplace, a síntese dos controladores era implicitamente robusta até certo ponto, visto que era comum dar uma margem de ganho ou fase a mais para o sistema ser capaz de resistir a pequenas variações e permanecer estável (SAFONOV, 2012). Um notável exemplo da preocupação com robustez, mesmo antes da formalização do projeto de controladores no domínio da frequência, se encontra no artigo seminal de Black (1934) que, além de ser um dos primeiros artigos a estudar realimentação negativa, também explora técnicas para rejeição de distúrbios no contexto de sinais de telecomunicação no domínio da frequência. Black, em seu artigo, ao sacrificar o ganho do sistema em troca de uma melhor rejeição do distúrbio por meio da realimentação negativa, como visto na Figura 16, estava, indiretamente, reduzindo a norma \mathcal{H}_∞ da relação *saída/distúrbio*, problema que está intimamente ligado ao projeto de controladores robustos.

Apesar da síntese de controladores por meio dos métodos de *lugar das raízes* e *diagrama de Bode* terem sido amplamente utilizados na primeira metade do século XX, em meados dos anos 60, pesquisadores da área de controle distanciaram-se da *prática da engenharia de controle* ao rejeitar os métodos clássicos por serem considerados demasiado simples para enfrentar os novos sistemas multivariáveis e complexos criados no contexto da emergente indústria aeroespacial durante o pós-guerra. Nesse período ocorreu um foco

Figura 16 – Amplificador com realimentação negativa de Black.



Fonte: (BLACK, 1934, p.12)

no desenvolvimento de controladores otimizados, como o regulador quadrático gaussiano, e métodos para controle no espaço de estados. No entanto ao considerarem os modelos dos sistemas como suficientemente exatos, e não incorporarem os distúrbios e incertezas no modelo, a síntese dos controladores otimizados por meio das novas técnicas levou a resultados insatisfatórios, ou mesmo catastróficos, ao serem testados em sistemas reais (SAFONOV, 2012). Tais resultados levaram a um maior distanciamento entre a prática de sistemas de controle e o seu desenvolvimento acadêmico.

Os novos métodos desenvolvidos para otimização eram aplicáveis a sistemas reais ao serem modificados incorporando conceitos da teoria tradicional e adaptações pragmáticas, e ficou claro para os pesquisadores que os modelos utilizados não capturavam com precisão a dinâmica dos sistemas que eles tentavam controlar (SAFONOV, 2012). Athans (1971) discorre sobre o problema de se implementar reguladores quadráticos gaussianos em sistemas reais alegando que seu maior desafio era a imprecisão dos modelos. Enquanto Harvey e Stein (1978), de maneira similar, apontam que uma das fraquezas da implementação de reguladores gaussianos era que inevitavelmente decaíam em processos de tentativa e erro. Fica claro, assim, que a *teoria de controle moderno* nasceu com fundamentos matemáticos sólidos e ideias novas, mas que eram dependentes de modelos precisos para serem implementados. Por certo tempo as novas teorias foram rejeitadas por engenheiros devido aos problemas acima citados até que houve uma mudança de foco em busca de maneiras de incorporar matematicamente as incertezas paramétricas e distúrbios nas técnicas desenvolvidas ao longo dos anos 60 e 70. Dessa forma, a teoria de controle robusto nasceu (SAFONOV, 2012). Um dos grandes frutos desse esforço, que também é o foco de implementação desta pesquisa, foi o controle \mathcal{H}_∞ .

2.7.2 Norma \mathcal{H}_∞

Considere um espaço vetorial V sobre um conjunto \mathbb{R} ou \mathbb{C} , que possui uma norma $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$. Naturalmente, por meio dessa norma é possível definir uma função de diferença tal que seja possível comparar dois vetores definidos em V (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996). Para casos em que $V = \mathbb{R}^2$, essa diferença é a norma euclidiana, que corresponde à distância entre dois vetores bidimensionais. Em casos *n-dimensionais*, tal operador de diferença é denominado *métrica induzida pela norma*.

Os espaços \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n , que são de interesse para esta seção, possuem uma *p-norma* associada a eles definida por (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996):

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.28)$$

em que $0 < p < \infty$ e também uma norma $\|\cdot\|_\infty$ definida por

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (2.29)$$

Dessa forma é possível obter informações a respeito de elementos nesses espaços vetoriais de maneira que o conceito de distância da norma em \mathbb{R}^2 seja estendido para casos mais generalizados. Além disso, é possível definir normas de matrizes como *normas matriciais induzidas por normas vetoriais*. Em específico, a norma de uma matriz $M \in \mathbb{C}^{p \times m}$ é induzida pela norma vetorial $\|\cdot\|_\infty$ tal que

$$\|M\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^m |m_{ij}| \right). \quad (2.30)$$

Considere, o sistema descrito pela [Equação 2.7](#) com condição inicial nula. Visto que o conceito de norma \mathcal{H}_∞ foi primeiramente utilizado para sistemas analisados no domínio da frequência, faz-se primeiramente uma referência à sua definição e interpretação no contexto de sistemas de controle no domínio da frequência antes de se formular um critério no espaço de estados.

No domínio da frequência, a [Equação 2.7](#) é descrita por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.31)$$

que é equivalente à seguinte forma matricial descrita por Zhou, Doyle e Glover (1996) como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

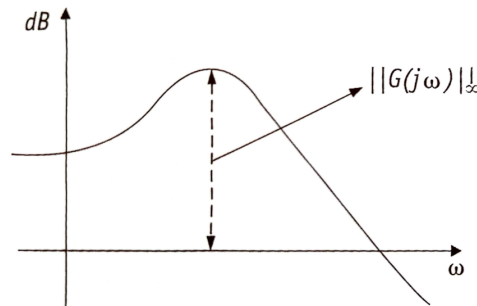
que permite entender $G(s)$ como uma função matricial complexa monovariável.

Dois espaços de funções matriciais complexas definidas em $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ tal que $f(s) : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$ de interesse são os espaços \mathcal{H}_∞ e \mathcal{RH}_∞ . O espaço \mathcal{H}_∞ é o espaço vetorial de todas as funções matriciais complexas monovariáveis que são analíticas no semiplano direito aberto e limitadas. Em outras palavras, é um espaço que contém todas as funções de transferência estáveis de norma finita. Ele possui um subespaço denominado \mathcal{RH}_∞ que é o espaço de funções contidas no espaço \mathcal{H}_∞ que também são racionais e próprias. Para esses espaços, a norma (2.30) é definida como

$$\|G\|_\infty = \sup_{\forall \omega} (G(j\omega)) \quad (2.33)$$

que é intuitivamente entendida como a maior distância entre a origem e um ponto na curva de um diagrama de Nyquist, ou a máxima amplificação de um sinal em um diagrama de Bode, como ilustrado na Figura 17. Entende-se então que minimizar a norma \mathcal{H}_∞ é o mesmo que minimizar a influência de um sinal de entrada no sinal de saída de um sistema definido no domínio da frequência (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996).

Figura 17 – Norma \mathcal{H}_∞ como a maior amplificação de um diagrama de Bode.



Fonte: (AGUIRRE et al., 2007, p.137)

Para sistemas discretos o espaço \mathcal{H}_∞ é definido com o espaço de todas as funções que são analíticas fora do círculo unitário fechado e limitadas (STOORVOGEL, 1992). De forma similar, o espaço \mathcal{RH}_∞ é um subespaço de \mathcal{H}_∞ de funções racionais e próprias. Para esses espaços no domínio discreto a norma é definida por

$$\|G\|_\infty = \sup_{z \in \delta D^+} [G(z)] \quad (2.34)$$

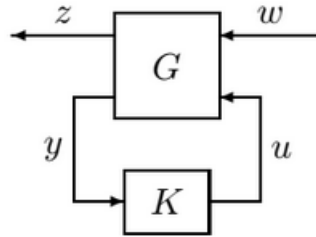
e o papel do semiplano direito no tempo contínuo é assumido pela região externa ao círculo unitário no tempo discreto.

Por meio dessas interpretações gráficas é possível obter tais normas de maneira estimada ao analisar os gráficos de resposta em frequência de sistemas LTI SISO. Um algoritmo para uma aproximação das normas é mostrado em (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996) conhecido como *Algoritmo de Bisseção*, que utiliza a função de transferência.

2.7.3 Sistemas sujeitos a distúrbios

Considere o sistema SISO linear e invariante no tempo contínuo sob o efeito de distúrbios descrito na [Figura 18](#).

Figura 18 – Sistema sujeito a distúrbios.



Fonte: (ZHOU; DOYLE, 1998, p.269)

No espaço de estados o sistema é definido por ([AGUIRRE et al., 2007](#))

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \\ y(t) = Ix(t) \end{cases} \quad (2.35)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, $u \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $D \in \mathbb{R}^n$, $B_w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $D_{zu} \in \mathbb{R}$ e $D_{zw} \in \mathbb{R}$. Para uma lei de controle da forma $u(t) = Kx(t)$. Em malha fechada obtém-se a representação matricial

$$G_{zw}(s) = \begin{bmatrix} A + B_u K & B_w \\ C_z + D_{zu} K & D_{zw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_f & B_w \\ C_f & D_{zw} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Uma formulação útil para caracterizar a norma \mathcal{H}_∞ é descrita em ([AGUIRRE et al., 2007](#)) como $\|z\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w\|_2^2$, assumindo $\|G\|_\infty \leq \gamma$, e $\gamma \in \mathbb{R}$ dado. Tal relação permite formular a condição:

$$\|G\|_\infty < \gamma \iff z^T z - \gamma^2 w^T w < 0 \quad (2.37)$$

em que deseja-se minimizar a relação entre a variável de saída $z(t)$ e o distúrbio $w(t)$ por meio de uma lei de controle $u(t) = Kx(t)$ que minimize a norma \mathcal{H}_∞ do sistema equivalente no domínio da frequência como descrito pela relação 2.31. Para isso, é assumido que $G_{zw}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ e, portanto, a energia dos sinais $z(t)$ e $w(t)$ é finita e limitada. A mesma relação (2.37) é válida para sistemas no tempo discreto ([AGUIRRE et al., 2007](#)).

2.7.4 Bounded Real Lemma

Talvez o resultado mais importante para este trabalho seja o chamado *Bounded Real Lemma* (BRL). Este resultado é considerado um dos grandes marcos da teoria de con-

trole moderno ao relacionar o conceito de norma \mathcal{H}_∞ , definida no domínio da frequência, a condições de estabilidade no domínio do tempo.

Lema 1 (*Bounded Real Lemma*). ([BROGLIATO et al., 2020](#)) Dada uma matriz de transferência da forma (2.36), um ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada (A_f, B_w, C_f, D_{zw}) no tempo contínuo é assintoticamente estável e possui norma $\mathcal{H}_\infty < \gamma$ para um $\gamma > 0 \iff \exists P = P^\top > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A_f^\top P + PA_f & PB_w & C_f^\top \\ B_w^\top P & -\gamma^2 I & D_{zw}^\top \\ C_f & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.38)$$

A Equação 2.38 pode ser reescrita por meio do complemento de Schur como

$$A_f^\top P + PA_f - (PB_w + C_f^\top D_{zw})(D_{zw}^\top D_{zw} - \gamma^2 I)^{-1}(B_w^\top P + D_{zw}^\top C_f) + C_f^\top C_f < 0 \quad (2.39)$$

em que $A_f^\top P + PA_f < 0$ e é possível inferir que se $P = P^\top > 0$ então A_f é Hurwitz. A parcela inversa da equação é bem definida, pois a desigualdade matricial implica que

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 I & D_{zw}^\top \\ D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0$$

e, portanto, possui posto completo ([BROGLIATO et al., 2020](#)). Através do *Bounded Real Lemma* é possível garantir um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema sem precisar realizar análises no domínio da frequência.

2.7.4.1 Bounded Real Lemma no tempo discreto

A versão do *Bounded Real Lemma* para sistemas no tempo discreto é apresentada a seguir.

Lema 2 (*Bounded Real Lemma discreto*). ([GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2019](#)) Dada uma matriz de transferência da forma (2.36), um ponto de equilíbrio do sistema (A_f, B_w, C_f, D_{zw}) no tempo discreto é assintoticamente estável e possui norma $\mathcal{H}_\infty < \gamma$ para um $\gamma > 0 \iff \exists P = P^\top > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} -P & * & * & * \\ PA_f & -P & * & * \\ C_f & 0 & -I & * \\ 0 & B_w^\top & D_{zw}^\top & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.40)$$

De forma análoga, podemos rescrever (2.40) ao se aplicar o complemento de Schur ([GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2019](#)) como

$$\begin{cases} A_f^\top PA_f - P + (D_{zw}^\top C_f + B_w^\top PA_f)^\top R_d^{-1}(D_{zw}^\top C_f + B_w^\top PA_f) + C_f^\top C < 0 \\ R_d = \gamma^2 I - D_{zw}^\top D_{zw} - B_w^\top PB_w \end{cases}, \quad (2.41)$$

em que é possível ver, de maneira similar a (2.39), que $A_f^\top P A_f - P < 0$ atende ao critério de Lyapunov para sistemas discretos e, portanto, A_f , neste caso, também é *Hurwitz* e a parcela inversa da equação é bem definida. O projeto de controladores que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ da relação *saída/distúrbio* é então formulado na forma de um problema de minimização de uma variável linearizante $\delta = \gamma^2$, sujeita às restrições do BRL, que garante um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ .

2.8 Saturação na Entrada de Controle

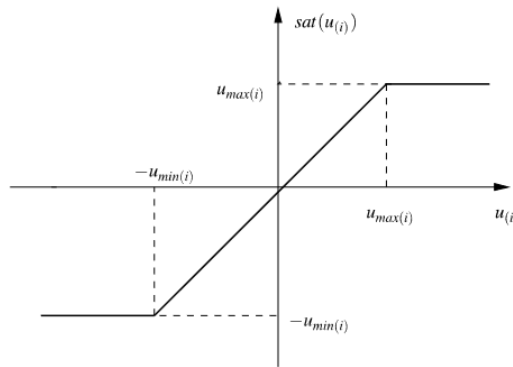
Para um sistema no espaço de estados discreto SISO com lei de controle $u_k = Kx_k$ sujeito a saturação $\text{sat}(Kx_k)$

$$x_{k+1} = Ax_k + B\text{sat}(Kx_k) \quad (2.42)$$

em que a função de saturação, exibida na Figura 19, é definida como

$$\text{sat}(Kx_k) = \begin{cases} u_{\max}; & \text{se } Kx_k > u_{\max} \\ Kx_k; & \text{se } -u_{\min} \leq Kx_k \leq u_{\max} \\ -u_{\min}; & \text{se } Kx_k < -u_{\min} \end{cases} \quad (2.43)$$

Figura 19 – Função de saturação do sinal de controle.



Fonte: (TARBOURIECH et al., 2011, p.6)

Define-se uma função que descreve a função de saturação como uma não-linearidade setorial $\phi(Kx_k) = Kx_k - \text{sat}(Kx_k)$ e assume-se que a saturação é simétrica de módulo $u_0 > 0$ tal que

$$\phi(Kx_k) = \begin{cases} Kx_k - u_0; & \text{se } Kx_k > u_0 \\ 0; & \text{se } -u_0 \leq Kx_k \leq u_0 \\ Kx_k + u_0; & \text{se } Kx_k < -u_0 \end{cases} \quad (2.44)$$

e o sistema em malha fechada se torna

$$x_{k+1} = (A_d + B_d K)x_k - B_d \phi(Kx_k). \quad (2.45)$$

Lema 3. (*TARBOURIECH et al., 2011*) Considerando funções candidatas de Lyapunov discretas de forma quadrática $x_k^\top P x_k > 0$ com $P = P^\top > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para um sistema no espaço de estados discreto sujeito a saturação no sinal de controle da forma (2.45), a estabilidade do ponto de equilíbrio é garantida dado que as seguintes LMIs sejam factíveis

$$\begin{bmatrix} -W & -Z^\top & W(A_d + B_d K)^\top \\ -Z & -2S & S B_d^\top \\ (A_d + B_d K)W & B_d S & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (2.46)$$

$$\begin{bmatrix} W & W K^\top - Z^\top \\ K W - Z & u_0^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.47)$$

em que $W = W^\top = P^{-1} > 0$, $S > 0 \in \mathbb{R}$ e $Z \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Corolário 1. Se (2.46) e (2.47) forem satisfeitas, a desigualdade abaixo é satisfeita, em que $G \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $T = S^{-1}$

$$2\phi(Kx_k)^\top T(\phi(Kx_k) - Gx_k) \leq 0 \quad (2.48)$$

e a seguinte região para o sinal de controle é definida

$$D_u = \{x_k : |K - G|x_k \leq u_0\} \quad (2.49)$$

2.9 Filtro de Kalman

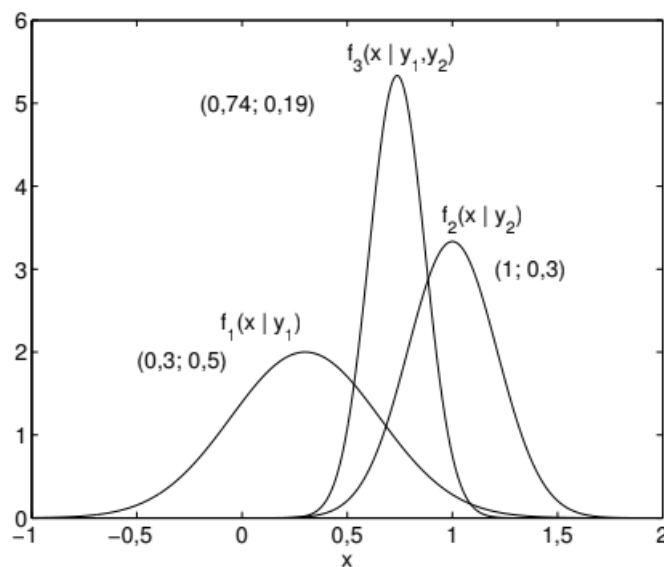
2.9.1 Motivação

Um dos problemas citados na [seção 1.1](#) diz respeito ao ruído de medição presente em sensores eletrônicos e a incapacidade de mensurar diretamente certos estados de um sistema. O Filtro de Kalman, ou KF (*Kalman Filter*), é um estimador recursivo muito utilizado para se solucionar esses dois problemas em projetos práticos de controle ([AGUIRRE, 2014](#)). Ele pode ser entendido como um estimador que busca, através de um modelo, minimizar a covariância da medição atual propagando a medida e a covariância do instante de tempo anterior, ao mesmo tempo em que estima a matriz de estados do sistema.

Quando um sensor realiza uma medida, seja ela de posição, velocidade, tensão ou outra grandeza, é inerente que o valor encontrado seja incerto até certo ponto. Para esses casos, pode-se pensar na medição do sensor como uma função de densidade de probabilidade ([AGUIRRE, 2014](#)), em que, para distribuições normais, a medida possui média e variância. Ao se tomar várias medidas de um mesmo evento, como na [Figura 20](#),

cada uma delas, por possuir incerteza, tem uma densidade de probabilidade diferente. Ao observar f_1 , por exemplo, somos levados a acreditar que o valor medido está próximo de 0,3, porém a função possui uma variância grande, dando pouca confiabilidade à medida. Já f_2 possui uma variância menor, indicando que provavelmente o valor que se deseja encontrar está em torno de 1. Supondo uma medida f_3 que combine as duas anteriores, de tal forma que a variância seja menor do que as variâncias das medidas isoladas, podemos estimar um valor para a variável x que seja estatisticamente mais confiável, graficamente representada na [Figura 21](#) (AGUIRRE, 2014).

Figura 20 – Funções densidade probabilidade de medições de uma variável x .



Fonte: (AGUIRRE, 2014, p.359)

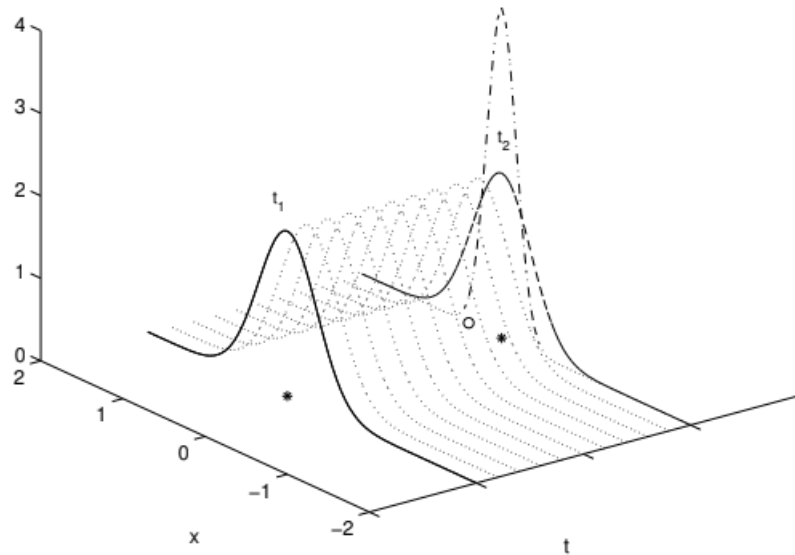
No caso estático descrito anteriormente, ao se tomar várias medições de um mesmo evento e combiná-las é possível ter uma certeza maior de que o valor medido está próximo do valor real. Em (AGUIRRE, 2014) uma forma de ponderar duas medidas em um caso estático é dada.

Para o caso dinâmico de interesse para este trabalho, o processo é similar. Tendo uma medida em um instante de tempo k , ao combiná-la com a estimativa de um modelo que *propaga* a medição do instante $k - 1$ até o instante k , é possível por meio de uma ponderação reduzir a covariância de medição em k . Tal problema pode ser solucionado por meio do filtro de Kalman.

2.9.2 Filtro de Kalman Discreto

Para a discussão a respeito do filtro, o foco será dado ao filtro para sistemas discretos, visto que sua implementação será feita em um microcontrolador. Assim, para

Figura 21 – A combinação de várias medições pode ser usada para minimizar a variância do valor que se deseja estimar.



Fonte: (AGUIRRE, 2014, p.362)

um sistema linear e invariante no tempo discreto

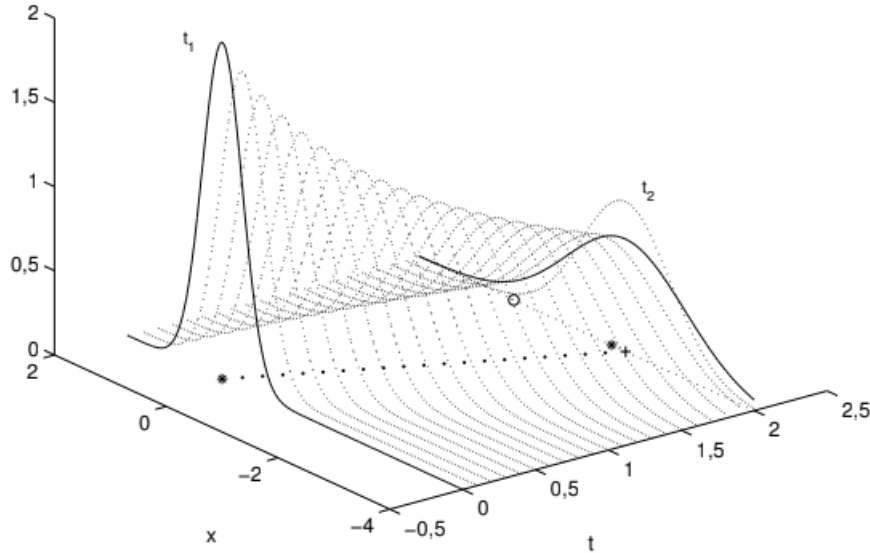
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k + B_w w_k \\ y_k &= C x_k + v_k \end{aligned} \quad (2.50)$$

em que A_d , B_d e C são as matrizes que descrevem o sistema, w_k e v_k variáveis aleatórias de média nula, comumente denominadas ruído de processo ou ruído dinâmico e ruído de medição respectivamente. O problema a ser resolvido pelo filtro consiste então de encontrar uma estimativa \hat{x}_{k+1} , dado o modelo (2.50), condições iniciais estimadas \hat{x}_0 , as saídas do sistema y_k , sequência dos sinais de controle u_k e a matriz de covariância P_0 da condição inicial.

Podemos dividir o processo do filtro entre estimações *a priori* e estimações *a posteriori* (AGUIRRE, 2014). A primeira parte do KF, chamada de *etapa de propagação* se dá quando chega uma nova medida x_k , que é então aplicada no modelo, e a predição de \hat{x}_{k+1}^- e de sua covariância P_{k+1}^- é feita. Essa medida, indicada pelo sobrescrito $-$ é a medição antes de chegar a informação do instante de tempo $k+1$, também denominada de estimação *a priori*. Desta forma, a etapa de propagação do filtro busca utilizar o modelo para prever o próximo estado do sistema.

Quando a medida é lida, representada por y_{k+1} , ela é ponderada com a estimativa *a priori* de forma a se obter uma estimativa ótima dos estados de \hat{x}_{k+1}^+ , cujo sobrescrito $+$ indica que é uma medição *a posteriori*, que possui, pela natureza do filtro, covariância P^+ menor do que P^- , possuindo assim maior confiabilidade estatística. Tal etapa é dita *etapa de assimilação*, ilustrada na Figura 22.

Figura 22 – Propagação da medida de um instante de tempo anterior até o tempo atual através de um modelo.



Fonte: (AGUIRRE, 2014, p.365)

O filtro de Kalman como descrito em (AGUIRRE, 2014) é então definido como o seguinte conjunto de equações

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1}^- = A_d \hat{x}_k^+ + B_d u_k \\ P_{k+1}^- = A_d P_k^+ A_d^\top + \Upsilon_k Q \Upsilon_k^\top \\ K_{k+1} = P_{k+1}^- C^\top [C P_{k+1}^- C^\top + R]^{-1} \\ \hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} [y_{k+1} - C \hat{x}_{k+1}^-] \\ P_{k+1}^+ = P_{k+1}^- - K_{k+1} C P_{k+1}^- \end{cases} \quad (2.51)$$

em que as duas primeiras equações compõem a etapa de propagação e as duas últimas compõem a etapa de assimilação. O valor K é chamado de *ganho de Kalman*, que é calculado de forma a ponderar a medição e a predição de forma que a covariância seja minimizada após a assimilação. Esse conjunto de equações, por estar no tempo discreto, é diretamente implementável em sistemas digitais como microcontroladores. As matrizes Q e R são matrizes diagonais de ponderação para o filtro, onde cada elemento diagonal de Q é o fator de ponderação do estado e cada elemento diagonal de R é o fator de ponderação da saída.

3 Materiais e Métodos

Neste capítulo são apresentados os métodos pelos quais os objetivos propostos são alcançados. A primeira seção trata do desenvolvimento do protótipo, em suas características de *hardware*, mecânica e eletrônica. A segunda seção trata da escolha do modelo, sua discretização, a implementação do filtro de Kalman e por fim o desenvolvimento do problema de otimização para a síntese do controlador.

3.1 Projeto da plataforma *Ball on Plate*

Para a construção do sistema, de forma a implementar e testar as técnicas de controle descritas no referencial teórico, o projeto foi realizado dividindo o processo nos seguintes itens, que serão detalhados nesta seção.

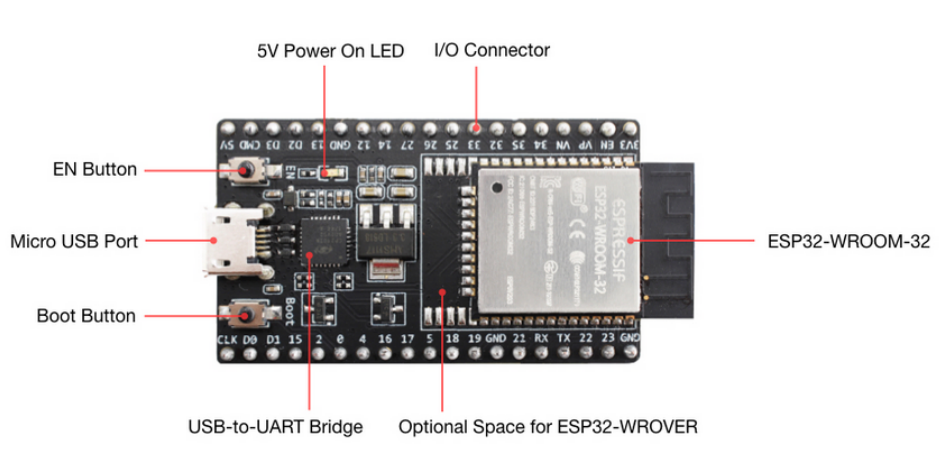
1. Escolher o microcontrolador, os sensores e os atuadores que atenda às demandas de processamento do sistema, seja adequado para captar os dados de entrada, e capaz de aplicar a lei de controle ao sistema, respectivamente;
2. Projetar a PCB para interface entre microcontrolador, sensores e atuadores;
3. Projetar a estrutura mecânica;
4. Unir o sistema eletrônico ao sistema mecânico.

3.1.1 Microcontrolador: *ESP32-WROOM-32E*

O microcontrolador escolhido para a implementação dos algoritmos é o ESP32-WROOM-32E, produzido pela fabricante Espressif. A versão escolhida do microcontrolador é instalada em uma plataforma de baixo custo ESP32-DevKitC, a partir daqui denominada simplesmente ESP32, exibida na [Figura 23](#) com alguns de seus circuitos periféricos, que dão suporte ao microcontrolador. O ESP32 é popularmente utilizado em projetos de robótica e IoT (*Internet of Things*) por possuir comunicação *WiFi* e *Bluetooth* embutidas no chip. Apesar de estas funcionalidades não serem utilizadas no desenvolvimento deste projeto, elas são um atestado ao poder de processamento do microcontrolador.

Os circuitos periféricos mais importantes são o conversor *USB-to-UART* que converte o protocolo USB para o protocolo UART, tornando possível programar e se comunicar com o dispositivo por meio de uma porta USB e os botões *EN* e *Boot* que permitem reiniciar e ativar o modo de programação do *chip*, respectivamente. O ESP32 expõe os pinos do microcontrolador por meio de terminais, permitindo sua rápida inserção em

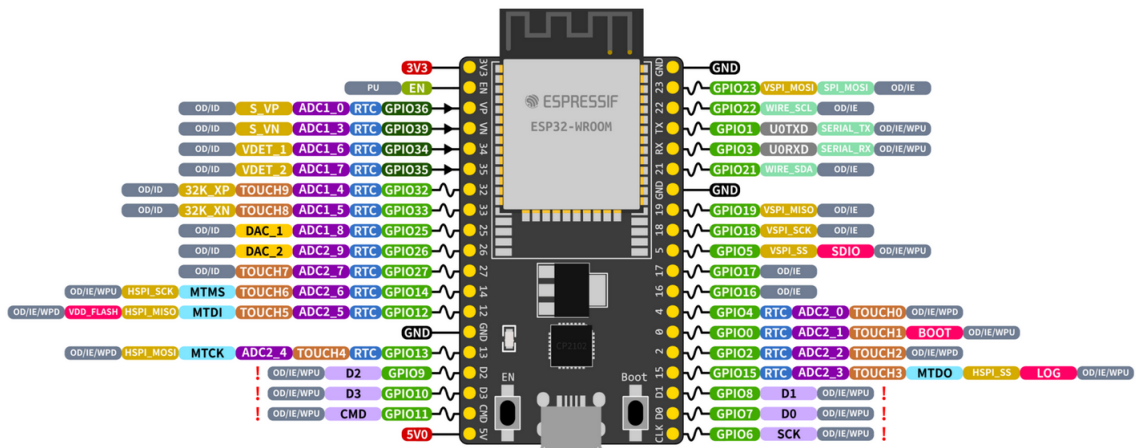
Figura 23 – Plataforma ESP32-DevKitC e seus circuitos auxiliares.



Fonte: (Espressif Systems, 2024)

soquetes. Quase todos os pinos do ESP32 podem ser usados como entrada ou saída, comumente chamados de GPIO (*General-Purpose Input-Output*), e alguns desses pinos podem assumir funções específicas de interface. O microcontrolador possui 18 canais conversores analógico-digital de 12 bits e 16 canais capazes de produzir sinais de PWM (Espressif Systems, 2024). Uma descrição mais detalhada dos pinos pode ser encontrada na Figura 24, e uma lista exaustiva em Espressif Systems (2024). Como alimentação a plataforma aceita 5 ou 3,3 volts de tensão, sendo que essa escolha irá determinar o valor máximo de tensão na escala dos conversores ADC e DAC. Neste projeto o ESP32 opera com 5V de tensão.

Figura 24 – Esquema de pinos do ESP32.

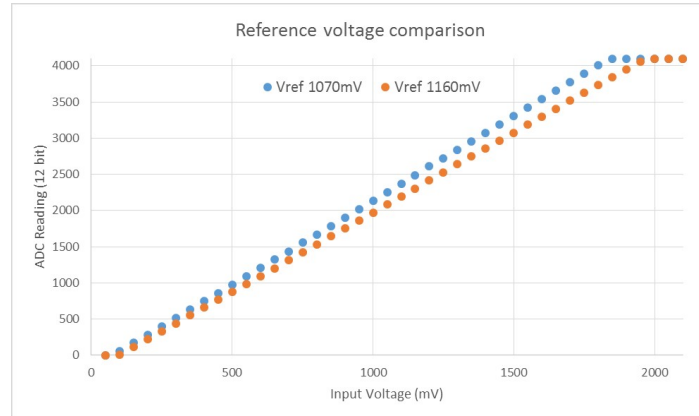


Fonte: Adaptado de (Espressif Systems, 2024)

O ESP32 é programado utilizando linguagem C/C++, sendo capaz de programação orientada a objetos. O ambiente de desenvolvimento utilizado é a Arduino IDE. Um detalhe importante sobre seu conversor analógico digital é que ele possui regiões de não-linearidade, indicadas na Figura 25. A curva do conversor varia em conta da tensão de

referência do chip, que de acordo com a fabricante varia entre as duas curvas (Espressif Systems, 2024).

Figura 25 – Conversor analógico-digital com zona de saturação.



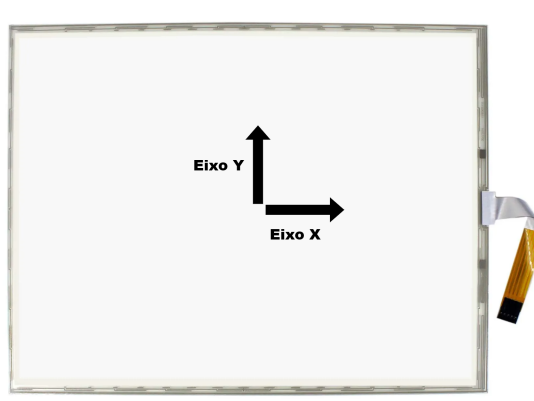
Fonte: (Espressif Systems, 2024)

3.1.2 Sensor: Tela de Toque Resistiva

Para captar os dados de entrada do sistema uma tela de toque resistiva de 5 terminais foi escolhida. As vantagens citadas na [subseção 2.1.1](#) foram levadas em conta, principalmente o custo e praticidade de implementação.

A tela escolhida, exibida na [Figura 26](#), possui 15”, resolução de 1024×768 pixels, com proporção 4 : 3 e área do *display* de $32,4\text{cm} \times 22,8\text{cm}$. A dimensão da tela é grande o suficiente para analisar o comportamento dinâmico tanto próximo ao ponto de equilíbrio quanto distante dele. Por se tratar de um sensor analógico, como explicado na [subseção 2.3.1.1](#), o uso de um conversor analógico-digital se fará necessário para captar os dados do sistema.

Figura 26 – Tela de toque resistiva de 5 terminais.



Fonte: Adaptado de (Shenzhen VS Display Electronic Ltd., 2022)

A calibração da tela foi realizada com o ESP32, que, por possuir um conversor analógico-digital de 12 bits, faz com que cada nível de tensão na tela seja convertido em um sinal digital que varia de 0 a 4095. Devido à natureza resistiva do sensor, foi considerado que a relação *entrada/saída* é linear. Foram tomadas 2 medidas nos eixos x e y , definidos como na [Figura 26](#), de posição em centímetros e seu respectivo sinal digital. Os dados são exibidos na [Tabela 1](#). De posse dos dados, foram determinadas retas de regressão linear, considerando o centro da tela como a origem dos eixos.

Tabela 1 – Posição na tela e nível digital correspondente.

Eixo	Posição (cm)	Nível digital
x	-14,5	954
x	14,5	2733
y	-10,5	1114
y	10,5	2845

Como na perspectiva do microcontrolador o nível de tensão é a entrada e a posição é a saída, a variável dependente é a posição $pos_{x|y}$ e a variável independente é o nível digital $v_{x|y}$. Por meio de regressão linear é possível determinar as duas retas que relacionam as grandezas:

$$pos_x(v_x) = 1.63v_x - 30.05 \quad (3.1)$$

$$pos_y(v_y) = 1.21v_y - 24.02 \quad (3.2)$$

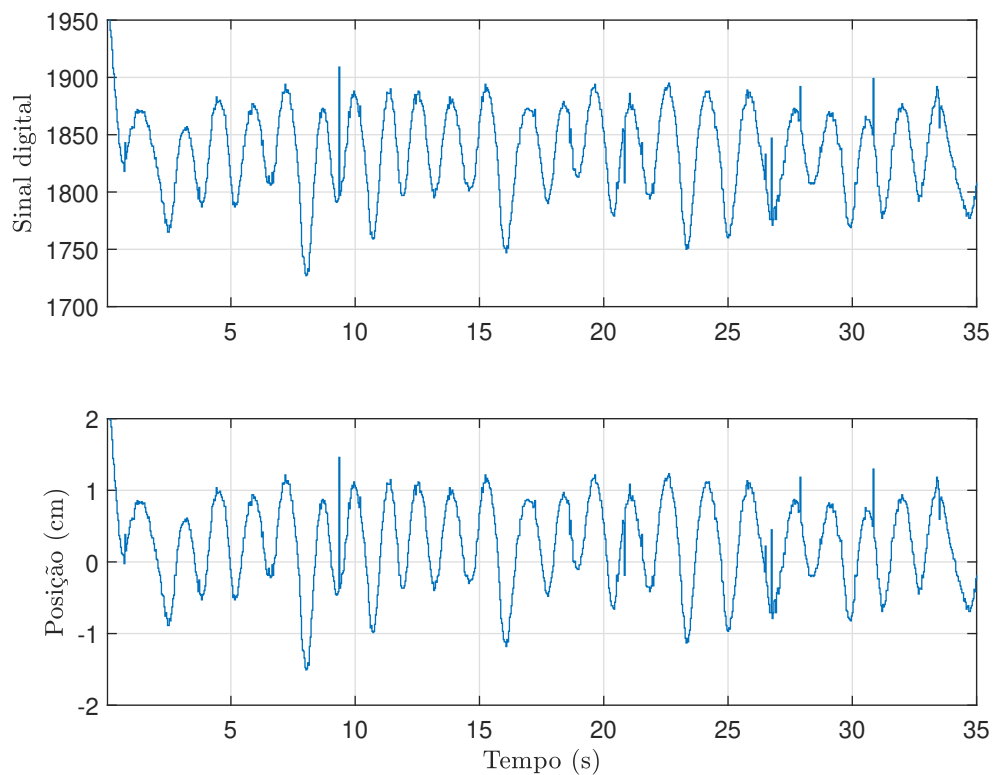
em que é possível inferir que, para as dimensões da tela, o nível digital do ADC do microcontrolador não entra na zona de saturação descrita na [Figura 25](#).

3.1.2.1 Leitura das coordenadas

Para a leitura de coordenadas, os cantos esquerdo inferior e direito superior são chaveados de forma alternada, assim mudando o gradiente de tensão na tela tal como descrito na [subseção 2.3.1.1](#). Devido ao efeito transiente descrito na mesma subseção, é necessário escolher um tempo de amostragem para o sistema que consiga capturar as dinâmicas da planta sem causar muito ruído no sinal do sensor. Por meio de testes experimentais, o período de amostragem do sistema foi definido como $T_s = 35\text{ms}$. Esse valor, que foi delimitado pela leitura do sensor, será usado como o período de amostragem da planta ao realizar-se a discretização do modelo.

Como experimento, foi realizada uma leitura do sinal captado pela tela no microcontrolador movendo uma esfera ao longo de sua superfície. Através da [Figura 27](#), é possível ver que o sinal do sensor possui ruídos de alta frequência, causando picos no sinal digital. Ao converter os dados de nível digital para posição, os picos do sinal digital influenciam na posição. Minimizar este ruído de medição será feito mediante a aplicação do filtro de Kalman.

Figura 27 – Leitura do sinal digital e conversão para posição.



3.1.3 Atuador: Servomotor

Para este trabalho, é utilizado como atuador o servomotor *TowerPro 996R*, exibido na [Figura 28](#), por seu baixo custo comparado a outros servomotores disponíveis comercialmente e por já possuir controle em malha fechada para a posição angular.

Figura 28 – Servomotor TowerPro 996R.



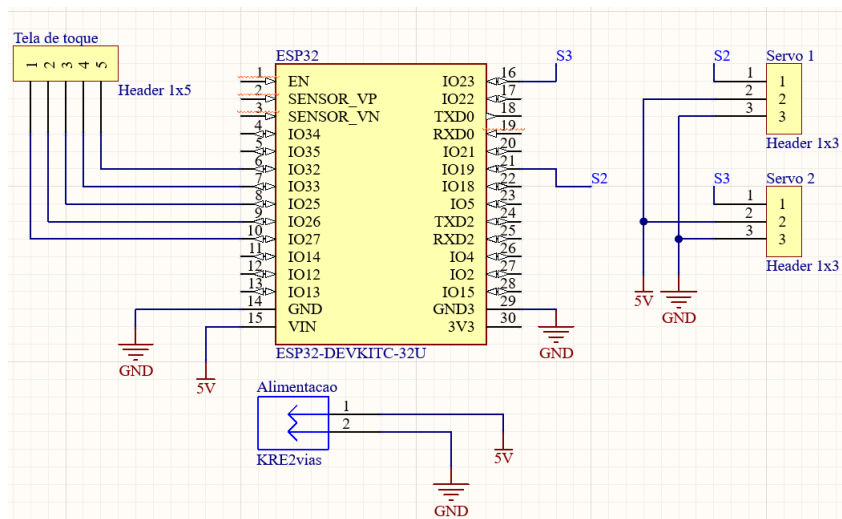
Esse servomotor toma como entrada pulsos de PWM de forma a controlar o ângulo do seu eixo. Sua alimentação é de 5V a 12V e seu eixo gira em uma angulação de até 180°. Por possuir uma malha interna para o controle de posição que garante que o ângulo de

referência seja alcançado sem sobressinal, considera-se que a sua dinâmica é muito mais rápida que a dinâmica da planta.

3.1.4 Placa de Circuito Impresso

Para o projeto da PCB, foi utilizado o software *Altium Designer*, que realiza o projeto do diagrama, trilhas da placa e gera os arquivos de fabricação. Para o projeto, é necessário conectar a tela de toque, que possui 5 terminais, e os dois servomotores, cada um com 3 terminais, além do próprio microcontrolador que possui 30 pinos. Também é inserido um *borne* para alimentar o sistema por fonte de energia externa. Por padrão o circuito foi projetado para ser alimentado com 5V de tensão. O esquemático com as conexões é exibido na [Figura 29](#).

Figura 29 – Esquemático do circuito.



Após o projeto esquemático, a placa de circuito foi projetada. As trilhas condutivas possuem 1mm de espessura e os furos possuem 1mm de diâmetro. Os furos do *borne* possuem 1,5mm de diâmetro. O projeto é exibido na [Figura 30](#). A manufatura da placa foi feita na máquina de CNC PCB-PROTO. A placa usinada é exibida na [Figura 31](#).

3.1.5 Estrutura Mecânica

A escolha da estrutura foi feita com base no referencial teórico, e optou-se por um sistema similar aos desenvolvidos por [Castro et al. \(2013\)](#) e [Awtar et al. \(2002\)](#), em que a tela é fixada em um ponto central rotatório. Esse ponto de fixação também garante que não existam singularidades no modelo, dado que existe apenas uma posição onde a tela fica perfeitamente horizontal. Em modelos da plataforma *Ball on Plate* que utilizam uma plataforma de *Stewart*, como em [\(KASSEM; HADDAD; ALBITAR, 2015\)](#), uma modelagem mais complexa é necessária para levar esses pontos em consideração por meio de modelos de cinemática reversa. Os servomotores são posicionados de maneira

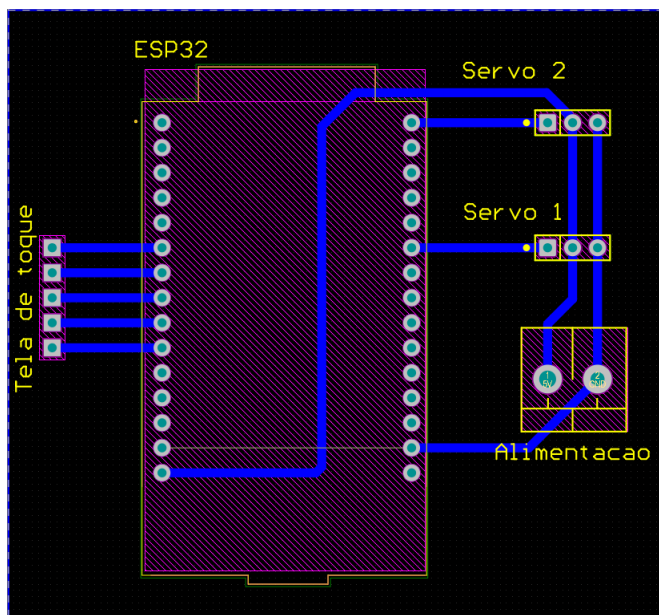
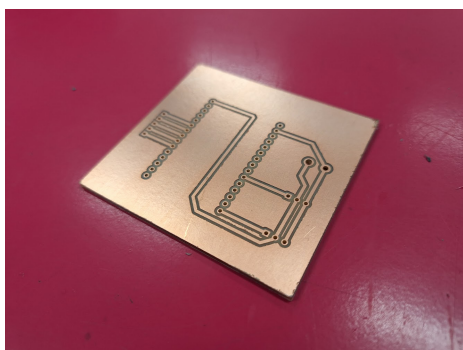
Figura 30 – Projeto da PCB do sistema *Ball on Plate*.

Figura 31 – Placa de circuito impresso produzida.

(a) Vista inferior das trilhas.



(b) Vista superior com componentes e sensores.



perpendicular, tendo seu ponto de contato com a plataforma através de dois elos de revolução. O *software* utilizado para a modelagem CAD foi o *Autodesk Fusion*.

Para o elo mais próximo da plataforma foram usadas rótulas radiais, pois quando a plataforma é inclinada elas permitem que os elos sejam inclinados também, eliminando o estresse mecânico causado pelas inclinações. Uma rótula radial também foi utilizada para permitir que a plataforma gire em torno de um ponto fixo, como será visto adiante. Para os outros elos foi utilizado um rolamento. Um modelo 3D da rótula radial escolhida, e um modelo mostrando uma visão de corte onde é possível ver o espaço no qual ela se movimenta, é exibido na [Figura 32](#). As rótulas escolhidas possuem diâmetro interno de 12mm, diâmetro externo de 26mm, largura do anel interno de 15mm e largura do anel externo de 9mm. Os rolamentos escolhidos foram do tipo 608zz, com diâmetro de furo 8mm, diâmetro externo de 22mm e largura de 7mm. Um modelo 3D dos rolamento pode ser visto na [Figura 33](#).

Figura 32 – Modelo 3D de rótula radial.

(a) Vista isométrica.

(b) Vista de corte.

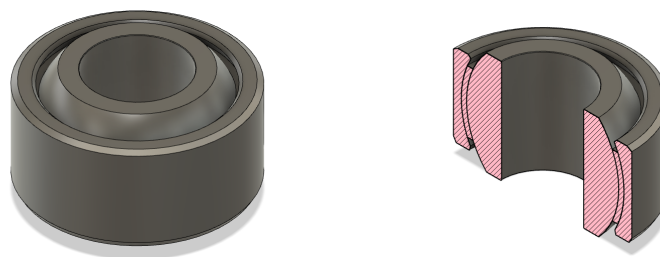
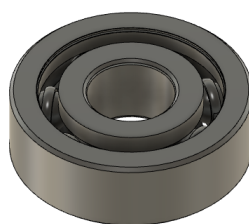


Figura 33 – Modelo do rolamento 608zz.



3.1.5.1 Plataforma para a tela

O projeto começa com a plataforma que irá acomodar a tela de toque resistiva. Primeiramente ela foi desenhada como descrito na [Figura 34](#). As dimensões garantem que a tela fique centralizada e possua apoio em todas as direções para evitar que as inclinações do sistema provoquem pressão excessiva em algum dos quadrantes da tela. Os furos laterais são para o acoplamento de um *guard-rail* que será descrito posteriormente. A vista superior mostra os encaixes ao longo dos eixos para os pontos de contato dos elos. A vista inferior mostra o encaixe por onde a plataforma será acoplada à base do sistema por meio de uma rótula. A partir do desenho, o modelo 3D foi criado, como descrito na [Figura 35\(a\)](#). A espessura foi definida como 5mm. Uma junta foi projetada para unir os elos à plataforma por meio do encaixe da rótula, como pode ser visto na [Figura 35\(b\)](#).

3.1.5.2 Elos de revolução

Os elos que se encaixam na rótula da junta descrita na [Figura 35\(b\)](#) foram inicialmente projetados como descrito na [Figura 36](#). É possível ver na vista lateral que o encaixe superior possui duas espessuras diferentes. A espessura menor permite o encaixo do anel interno da rótula, enquanto a espessura maior impede que ela avance até o fim, dando espaço para a rótula rotacionar. O encaixe inferior serve para acoplar o anel externo do rolamento.

O modelo 3D foi então realizado a partir do desenho, exibido isolado e com o rolamento e rótula encaixados na [Figura 37](#). Uma vista de corte do elo com os rolamentos,

Figura 34 – Desenho da plataforma. Todas as medidas em milímetros.

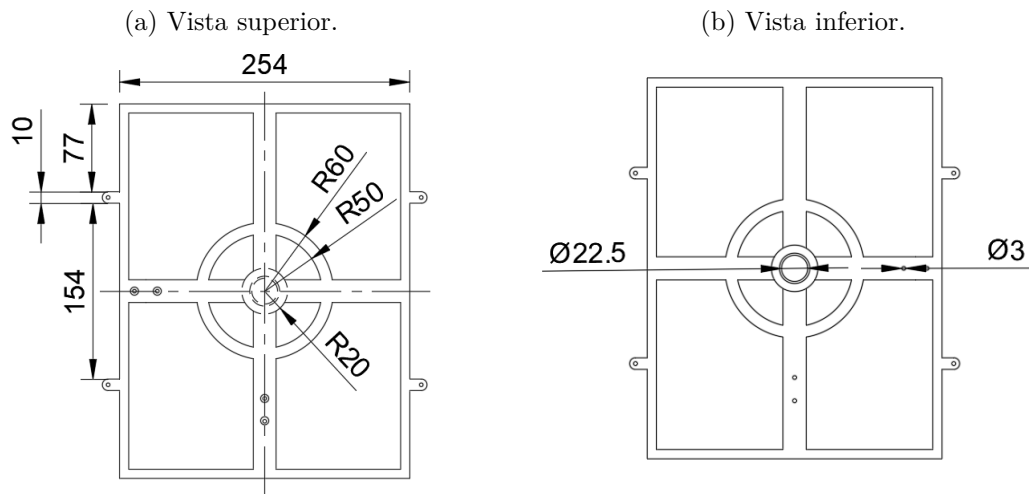


Figura 35 – Modelo 3D da plataforma e junta de ligação.

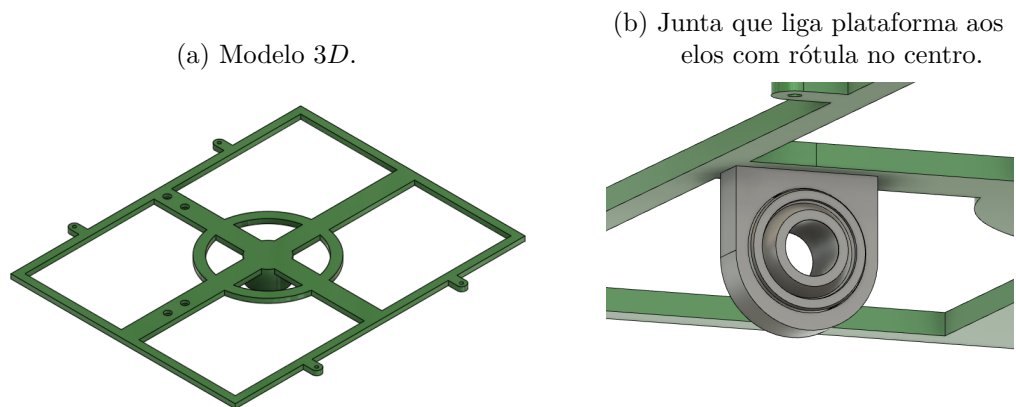
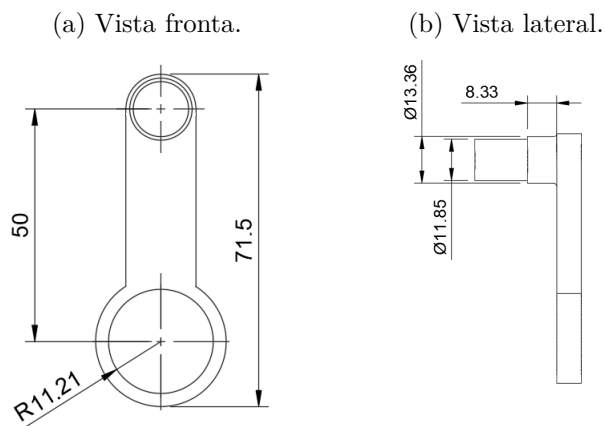


Figura 36 – Desenho do primeiro elo. Todas as medidas em milímetros.



exibido na [Figura 38](#) permite ver como o encaixe da rótula é limitado pela espessura maior do encaixe superior, de forma que ela pode rotacionar livremente.

Figura 37 – Modelo 3D do primeiro elo do sistema.

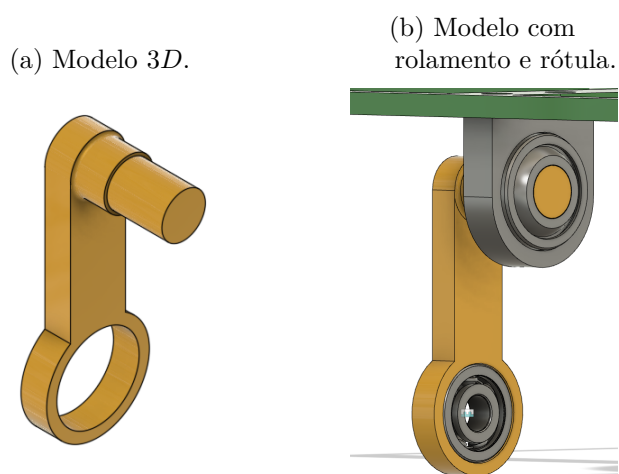
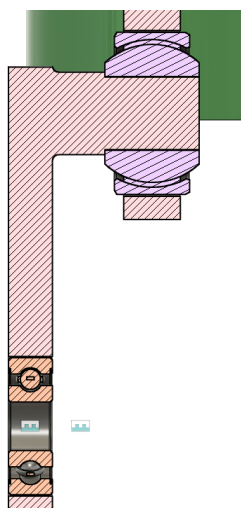


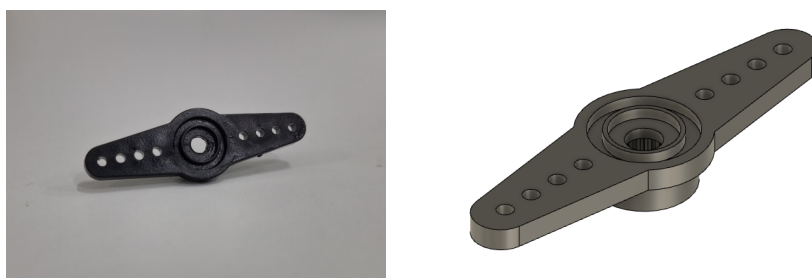
Figura 38 – Vista de corte do primeiro elo com a rótula e rolamento.



Para o acoplamento dos servomotores, foi utilizada a haste de encaixe que acompanha o servomotor, exibida na [Figura 39](#) junto de seu modelo 3D. A partir de suas dimensões o segundo elo do sistema foi desenhado de forma a encaixá-la.

Figura 39 – Haste de encaixe do servomotor.

- (a) Haste que acompanha o servomotor.
- (b) Modelo 3D da haste.



Também foi realizado um encaixe para o anel interno do rolamento. O desenho pode ser visto na [Figura 40](#). A partir do desenho, o modelo 3D foi criado. Ele é exibido na [Figura 41](#) junto de sua vista com o rolamento e a haste encaixadas. Na figura é possível ver como o movimento de revolução do servomotor atua nos elos do sistema, que permitem a inclinação da plataforma com a tela de toque.

Figura 40 – Desenho do segundo elo. Todas as medidas em milímetros.

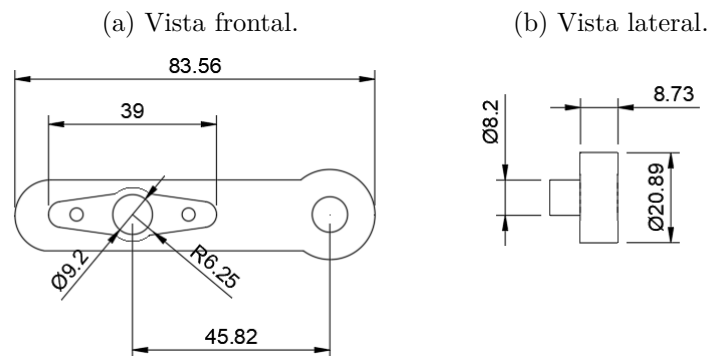
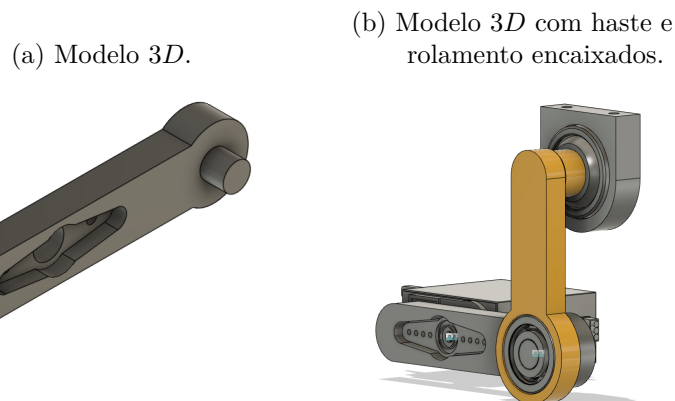


Figura 41 – Modelo 3D do segundo elo.



3.1.5.3 Base e ponto de contato da plataforma

A base do sistema, que sustenta tanto a plataforma quanto os servomotores, foi projetada para aguentar o estresse mecânico e vibrações provocadas pela atuação do sistema. Desta forma, os servomotores são fixados horizontalmente em duas plataformas elevadas que permitem a livre rotação de seu eixo acoplado ao segundo elo. No centro da base, encontra-se a estrutura que dá sustentação à plataforma. De maneira similar ao primeiro elo, ela possui uma espessura menor e uma espessura maior para que a rótula fique encaixada e com espaço para se movimentar. O desenho pode ser visto na [Figura 42](#) e o modelo 3D na [Figura 43](#). Uma vista de corte do ponto onde a rótula é encaixada na base e na plataforma pode ser vista na [Figura 44](#), onde percebe-se que o encaixe permite à rótula ser movimentada livremente.

Figura 42 – Desenho da base. Todas as medidas em milímetros.

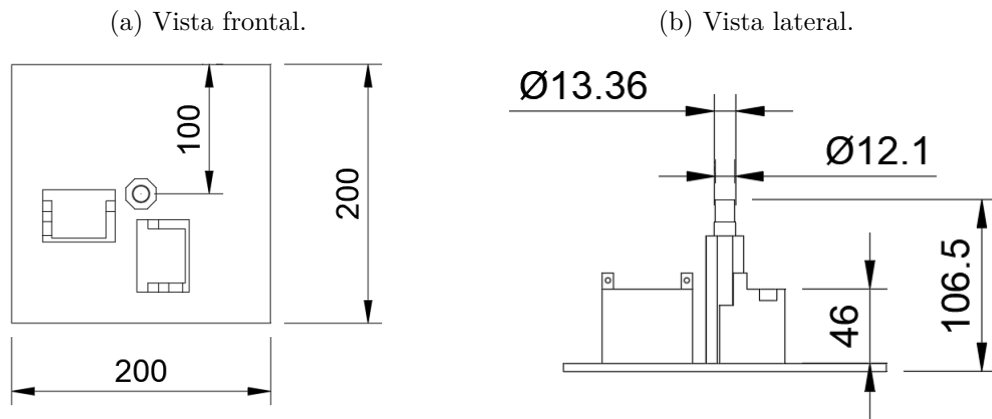


Figura 43 – Modelo 3D da base.

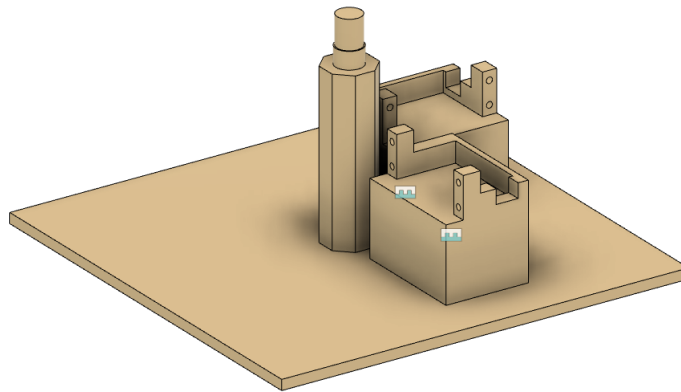
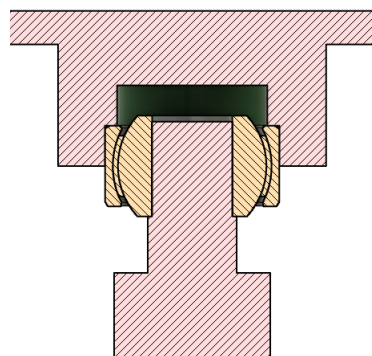


Figura 44 – Vista de corte do ponto onde a base é acoplada à plataforma por meio da rótula.

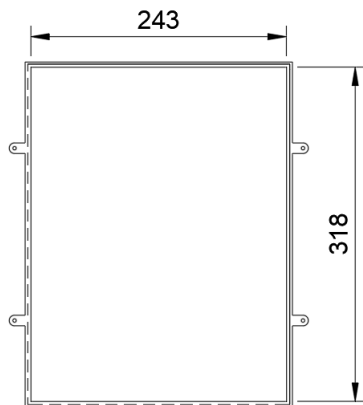


3.1.5.4 *Guard-Rail*

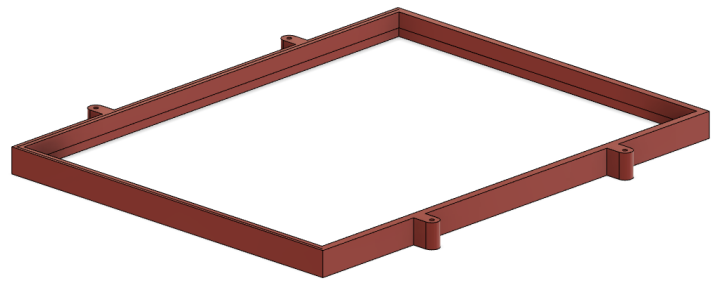
Para realizar os testes de maneira mais eficiente foi também projetado um *guard-rail* para evitar que a esfera caia da plataforma. O *guard-rail* também auxilia na instalação da tela na estrutura para que esteja centralizada. O desenho e modelo são exibidos na [Figura 45](#).

Figura 45 – Desenho e modelo do *guard-rail*. Todas as medidas em milímetros.

(a) Vista frontal do desenho.

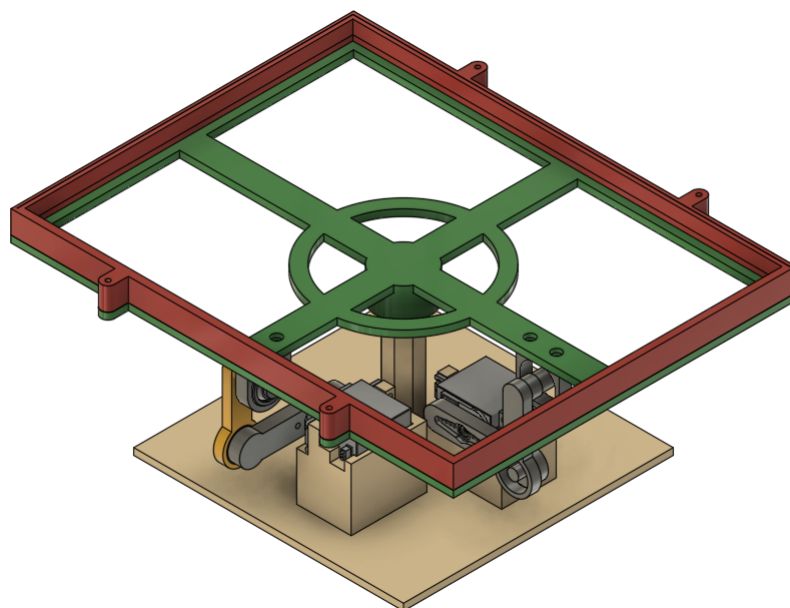


(b) Modelo 3D.



3.1.6 Impressão das peças e montagem

O modelo completo do sistema montado é exibido na [Figura 46](#) e uma relação de todas as peças projetadas e componentes mecânicos utilizados é exibido na [Tabela 2](#). As peças em PLA foram impressas em uma impressora 3D *Sethi3D S4X*. O preenchimento interno das peças em PLA, que consistem da plataforma e do *guard-rail* foi escolhido como 20%. Ao dar leveza às peças o atuador necessita de menos esforço para vencer a inércia e atuar no sistema. As peças em ABS foram impressas em uma *GTMax3D Core H5*. Como as peças em ABS compõe as peças que dão sustentação à plataforma e os elos, seu preenchimento foi escolhido como 50% para melhor rigidez estrutural.

Figura 46 – Modelo completo do sistema *Ball on Plate* desenvolvido.

A escolha do ABS para as peças que dão sustentação se dá pela característica de

Tabela 2 – Lista de peças e materiais utilizados no protótipo.

Peça	Quantidade	Material de impressão
Suporte para tela de toque	1	PLA
<i>Guard-rail</i>	1	PLA
Junta do suporte com o primeiro elo	2	ABS
Primeiro elo	2	ABS
Segundo elo	2	ABS
Base da plataforma	1	ABS
Haste de encaixe do servomotor	2	-
Parafuso M3	16	-
Rolamento 608zz	2	-
Rótula radial	3	-

alta resistência do ABS quando comparado ao PLA. Por outro lado, devido à sua menor tendência de deformação, foi decidido que as peças da plataforma seriam feitas em PLA. Devido às dimensões da *GTMax3D Core H5*, as peças da plataforma e *guarda-rail* não poderiam ser impressas inteiras na máquina. Assim, optou-se por imprimi-las na *Sethi3D S4X*.

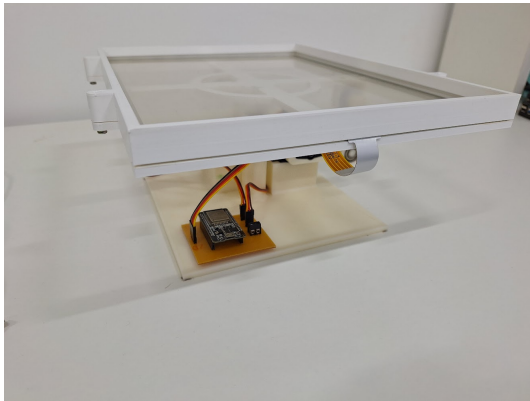
O processo de impressão das peças se deu pelo ajuste das dimensões e encaixes para se levar em conta variações no material, portanto foi um processo iterativo até se alcançarem as medidas indicadas nas cotas dos desenhos. O tempo aproximado de impressão das peças é exibido na [Tabela 3](#). O protótipo montado, com a tela e servos posicionados, rolamentos, rótulas e parafusos, é exibido na [Figura 47\(a\)](#), com a placa de circuito já posicionada e conectada, e na [Figura 47\(b\)](#) em uma vista superior. Além disso, Na [Figura 48\(a\)](#) e (b) é possível ver como as rótulas radiais se movimentam livremente quando a plataforma é inclinada, evitando estresse mecânico.

Tabela 3 – Tempo de impressão das peças.

Peça	Quantidade	Tempo de impressão (horas)
Base da plataforma	1	10
Suporte para tela de toque	1	7
Primeiro elo	2	5
Segundo elo	2	5
<i>Guard-rail</i>	1	2
Junta do suporte com o primeiro elo	2	1
Total	-	30

Figura 47 – Protótipo do sistema *Ball on Plate* montado.

(a) Protótipo com placa de circuito instalada.



(b) Vista superior do protótipo.

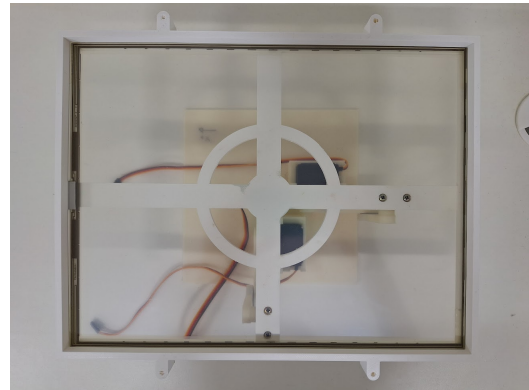
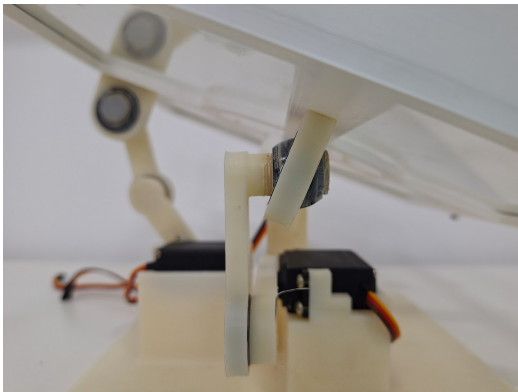
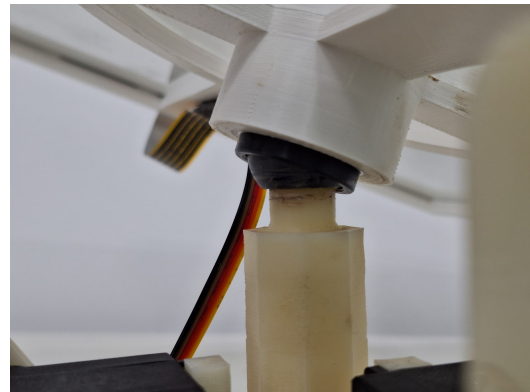


Figura 48 – Rótulas do sistema.

(a) Rótula do segundo elo com a plataforma.



(b) Rótula de fixação da plataforma.



3.2 Modelagem, filtragem e síntese do controlador

Esta seção apresenta a obtenção do modelo do sistema em tempo discreto, o projeto do filtro de Kalman e sua validação e, por fim, a síntese de um controlador por realimentação de estados realizado com otimização convexa garantindo estabilidade na presença de saturação do sinal de controle.

3.2.1 Modelagem matemática

O modelo escolhido para o sistema é o modelo com forças dissipativas, apresentado por [Castro et al. \(2013\)](#), que são reproduzidas nesta seção:

$$\begin{aligned} \frac{7}{5}\ddot{x} + g\alpha + \frac{1}{m_b}f_c\dot{x} &= 0 \\ \frac{7}{5}\ddot{y} + g\beta + \frac{1}{m_b}f_c\dot{y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ao considerarmos que o servomotor escolhido tem uma malha de controle interna e dinâmica mais rápida que a planta, tem-se como entrada do sistema os ângulos de

inclinação α e β , e as saídas do sistema são as posições x e y da esfera. Pode-se perceber que o modelo linearizado do sistema *Ball on Plate* é descrito por dois sistemas *Ball and Beam* perpendiculares. Os modelos são linearizados em torno da origem com as mesmas considerações da [subseção 2.1.2](#).

Como o atuador está em contato com a plataforma por meio de dois elos, ao invés da origem como em ([NOKHBEH; KHASHABI, 2011](#)), é utilizada a relação

$$\alpha|\beta = \frac{d}{L}\theta_{\alpha|\beta},$$

em que d é a largura do primeiro elo e L a distância da origem do sistema até o ponto de contato da junta de ligação na [Figura 35\(b\)](#). Considerando que os dois eixos são simétricos e possuem os mesmos parâmetros d e L , a partir daqui considera-se que os dois sistemas são representados pelo mesmo modelo, válido para os dois eixos. Logo, o sinal de entrada do sistema é

$$\theta = \frac{L}{d}\alpha = \frac{L}{d}\beta,$$

x a variável da posição da esfera e y a saída do sistema. Assim, o modelo do sistema no espaço de estados, válido para os dois eixos, é dado por:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-5}{7} \frac{f_c}{m_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-5g}{7} \frac{d}{L} \end{bmatrix} \theta \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.4)$$

Para o protótipo construído os parâmetros d e L dos dois eixos são $d = 0,046$ m e $L = 0,104$ m. A esfera utilizada para os testes possui massa $m_b = 0,11$ kg e raio $r_b = 0,015$ m. O coeficiente de atrito f_c é estimado como 0,02 Ns/m. Após a definição do modelo no tempo contínuo, é feita a discretização do sistema considerando o período de amostragem, definido na [subseção 3.1.2.1](#), de $T_s = 35$ ms. O sistema no espaço de estados discreto, utilizando os valores dos parâmetros, é definido como

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,035 \\ 0 & -0,13 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -0,002 \\ -0,11 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k \end{cases} \quad (3.5)$$

em que o primeiro estado de x_k representa a posição da esfera e u_k é o sinal de controle, definido como o ângulo do servomotor. O segundo estado, que em tempo contínuo corresponde à velocidade da esfera, perde sentido físico em tempo discreto devido à discretização ser realizada apenas tomando a posição como saída. O objetivo então é encontrar uma lei de controle $u_k = Kx_k$ de forma que o sistema (3.5) seja assintoticamente estável em malha fechada.

3.2.2 Estimação de Estados e Filtragem do Ruído

Para que a lei de controle por realimentação de estados possa ser implementada, é necessário utilizar um estimador de estados, visto que não é possível mensurar diretamente a velocidade da esfera. Além disso, para minimizar os ruídos de medição descritos na [subseção 3.1.2.1](#), o uso de um filtro digital para o sistema discreto (3.5) também é necessário. O filtro de Kalman, como descrito na [seção 2.9](#), é diretamente implementado pela [Equação 2.51](#). Portanto os ruídos dinâmico e de medição são considerados ruídos de média nula com distribuição gaussiana. As matrizes Q e R da [Equação 2.51](#) foram experimentalmente determinadas como

$$Q = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = [150]$$

fazendo com que o filtro dê mais peso para a estimativa de posição do que a posição lida pelo sensor.

Na [Figura 49](#) são mostrados os dados de posição da esfera como capturados pelo microcontrolador sobrepostos à sua estimativa feita pelo filtro. Pode-se perceber que os ruídos de alta frequência são minimizados pelo filtro. Um meio de avaliar a eficiência do filtro é verificar que o traço da matriz de covariância estimada converge para algum valor e permanece aproximadamente constante ([AGUIRRE, 2014](#)). Por tal critério também verifica-se a eficiência do filtro na [Figura 50](#).

Figura 49 – Posição medida e estimada pelo filtro de Kalman.

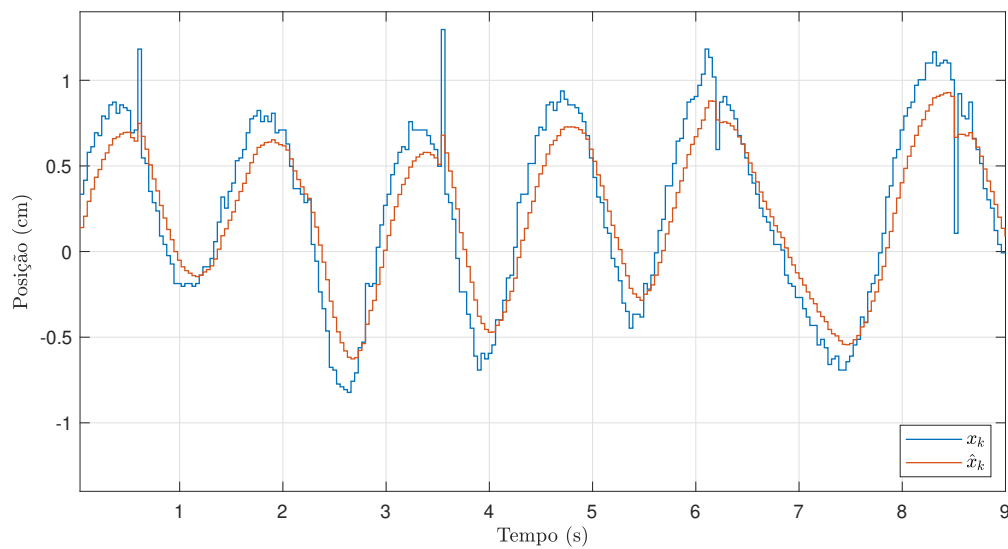
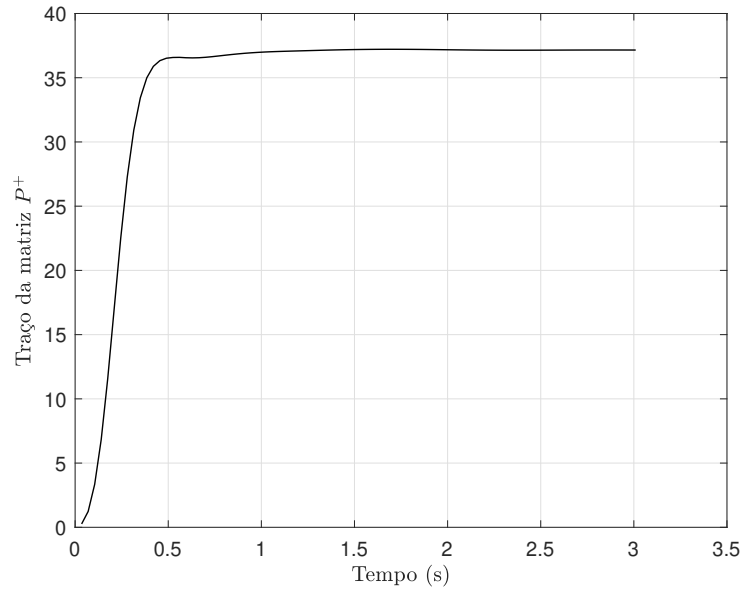


Figura 50 – Traço da matriz P^+ .

3.2.3 Síntese da lei de controle por meio de otimização convexa

Para facilitar a notação, a partir desta seção até o fim do trabalho todos os modelos considerados serão no tempo discreto, portanto $A = A_d$ e $B = B_d$, x e u variáveis discretas. Para formular a lei de controle, considera-se o sistema discreto SISO (3.6) com distúrbio de energia finita, satisfazendo (2.37), e sinal de controle sujeito à saturação

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B \text{sat}(u_k) + B_w w_k \\ z_k = C_z x_k + D_{zu} u_k + D_{zw} w_k \\ y_k = Ix_k \end{cases} \quad (3.6)$$

Deseja-se projetar uma lei de controle por realimentação de estados

$$u_k = Kx_k \quad (3.7)$$

de forma que o sistema seja assintoticamente estável pelo critério de estabilidade de Lyapunov por meio de uma função quadrática $V(x_k) = x_k^\top P x_k > 0$ que satisfaça (2.17). O Teorema 1 a seguir, através dos Lemas 2 e 3, estabelece condições para projeto de controladores por realimentação de estados para o sistema descrito pela Equação 3.6.

Teorema 1. *Dada um limitante do sinal de controle u_0 . O sistema (3.6) é estabilizado em torno do ponto de equilíbrio pela lei de controle (3.7), sendo γ um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ , se existirem as matrizes simétricas $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, e quaisquer*

matrizes $Z \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, tal que as LMIs abaixo sejam satisfeitas.

$$\begin{bmatrix} -Y & * & * & * & * \\ AY + BZ & -Y & * & * & * \\ V & -RB^\top & -2R & * & * \\ C_z Y + D_{zu} Z & 0 & -D_{zu} R & -I & * \\ 0 & B_w^\top & 0 & D_{zw}^\top & -\rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} Y & (Z - V)^\top \\ (Z - V) & u_0^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (3.9)$$

A matriz de Lyapunov pode ser recuperada por $P = Y^{-1}$, os ganhos de realimentação por $K = ZY^{-1}$ e o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ por $\gamma = \sqrt{\rho}$.

Demonstração. Inserindo (2.44) em (3.6) chega-se ao seguinte sistema em malha fechada

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_f x_k - B\phi_k + B_w w_k \\ z_k = C_f x_k - D_{zu}\phi_k + D_{zw} w_k \end{cases} \quad (3.10)$$

em que $A_f = A + BK$, $C_f = C + D_{zu}K$, e impondo as restrições (2.37) e (2.48) ao sistema, junto à condição de Lyapunov $\Delta V < 0$, a seguinte condição de estabilidade assintótica é considerada:

$$\Delta V + z_k^\top z_k - \gamma^2 w_k^\top w_k - 2\phi_k^\top T(\phi - Gx_k) < 0 \quad (3.11)$$

em que $\Delta V = V(x_{k+1}) - V(x_k)$. Expandindo todos os termos e reagrupando-os na forma matricial é possível chegar à seguinte desigualdade

$$\begin{bmatrix} x^\top \\ w^\top \\ \phi^\top \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A_f^\top P A_f - P & * & * \\ B_w^\top P A_f & -\gamma^2 I + B_w^\top P B_w & * \\ -B^\top P A_f + T G & -B^\top P B_w & -2T + B^\top P B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_f^\top \\ D_{zw}^\top \\ -D_{zu}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_f & D_{zw} - D_{zu} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ w \\ \phi \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

em que a matriz dentro da forma quadrática deve ser definida negativa.

Tomando os termos entre parênteses e reescrevendo-os pelo complemento de Schur, a desigualdade abaixo é obtida

$$\begin{bmatrix} A_f^\top P A_f - P & * & * & \vdots & C_f^\top \\ B_w^\top P A_f & \gamma^2 I + B_w^\top P B_w & * & \vdots & D_{zw}^\top \\ -B^\top P A_f + T G & -B^\top P B_w & -2T + B^\top P B & \vdots & -D_{zu}^\top \\ \hline & C_f & D_{zw} & -D_{zu} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

em que a primeira submatriz pode ser reescrita novamente pelo complemento de Schur, de forma que (3.13) é reescrita, trocando as linhas e colunas para se obter uma forma

simétrica.

$$\begin{bmatrix} -P & * & * & * & * \\ PA_f & -P & * & * & * \\ TG & -B^\top P & -2T & * & * \\ C_f & 0 & -D_{zu} & -I & * \\ 0 & B_w^\top P & 0 & D_{zw}^\top & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

Fazendo-se uma transformação de similaridade com $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1}, T^{-1}, I, I)$ e expandindo $A_f = A + BK$ e $C_f = C_z + D_{zu}K$ obtém-se a seguinte equação

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & * & * & * & * \\ (A + BK)P^{-1} & -P^{-1} & * & * & * \\ GP^{-1} & -T^{-1}B^\top & -2T^{-1} & * & * \\ (C_z + D_{zu}K)P^{-1} & 0 & -D_{zu}T^{-1} & -I & * \\ 0 & B_w^\top & 0 & D_{zw}^\top & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.15)$$

que por meio de variáveis linearizantes $P^{-1} = Y$, $T^{-1} = R$, $KP^{-1} = Z$, $GP^{-1} = V$ e $\gamma^2 = \rho$, é reformulada como a seguinte desigualdade matricial linear.

$$\begin{bmatrix} -Y & * & * & * & * \\ AY + BZ & -Y & * & * & * \\ V & -RB^\top & -2R & * & * \\ C_z Y + D_{zu}Z & 0 & -D_{zu}R & -I & * \\ 0 & B_w^\top & 0 & D_{zw}^\top & -\rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

É possível ver que (3.16) atende tanto à restrição de (2.40) quanto à restrição de (2.46) de maneira simultânea. Para a segunda restrição de estabilidade sob saturação (2.47), recorda-se (2.49):

$$D_u = \{x : |K - G|x \leq u_0\}$$

Tomando o módulo da desigualdade

$$\frac{1}{u_0^2} x^\top (K - G)^\top (K - G)x \leq 1 \quad (3.17)$$

que pode ser subtraído da forma quadrática de Lyapunov, de forma que a restrição de estabilidade seja mais conservadora, mas que continue sendo positiva, gerando

$$x^\top Px - \frac{1}{u_0^2} x^\top (K - G)^\top (K - G)x > 0 \quad (3.18)$$

e pelo complemento de Schur

$$\begin{bmatrix} P & (K - G)^\top \\ (K - G) & u_0^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (3.19)$$

em que realizando uma transformação de similaridade com $\text{diag}(P^{-1}, I)$ e reescrevendo os termos com as mesmas variáveis linearizantes $P^{-1} = Y$, $KP^{-1} = Z$ e $GP^{-1} = V$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} Y & (Z - V)^{\top} \\ (Z - V) & u_0^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (3.20)$$

que atende ao critério (2.47). A matriz P pode ser recuperada através de $P = Y^{-1}$, os ganhos de realimentação por $K = ZY^{-1}$ e o limitante superior da norma \mathcal{H}_{∞} por $\gamma = \sqrt{\rho}$. \square

É possível notar que a primeira desigualdade matricial, quando removidas a terceira linha e coluna, se reduz ao Lema 2. De maneira similar se considerarmos (3.9) e desconsiderarmos as linhas e colunas geradas pelo BRL de (3.8), obtemos a condição do Lema 3, ambos apresentados no Capítulo 2.

Um dos objetivos de se levar em consideração a norma \mathcal{H}_{∞} no projeto de controladores é reduzir a relação *saída/distúrbio*, isto é, reduzir o efeito de um distúrbio exógeno no sistema. Sendo assim o Corolário 2 apresenta o problema de otimização capaz de minimizar a norma \mathcal{H}_{∞} sujeito às condições do Teorema 1.

Corolário 2. *O limitante da norma \mathcal{H}_{∞} do sistema pode ser minimizado pelo problema de otimização a seguir:*

$$\begin{aligned} & \min_{Y, Z, V, R} \rho \\ & \text{s.a. (3.8) e (3.9)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

4 Resultados

Este capítulo trata dos resultados obtidos pelos métodos descritos anteriormente. A primeira seção trata da obtenção dos ganhos de realimentação e do limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ . A segunda seção trata da implementação do controlador no protótipo, em conjunto com o filtro de Kalman.

Para todos os testes o sinal de controle é limitado à faixa de $[-25^\circ, 25^\circ]$, dado que essa é a limitação física do protótipo. Para a implementação prática os estados estimados pelo filtro de Kalman foram realimentados para a lei de controle. Todos os resultados são no tempo discreto considerando o período de amostragem $T_s = 35\text{ms}$.

4.1 Síntese do Controlador

As matrizes que ponderam o efeito do distúrbio foram definidas levando em consideração que não há distúrbio no sinal de controle, mas há distúrbio tanto na saída quanto nos estados. Os valores encontrados foram obtidos por meio de testes experimentais onde o sistema em estado estacionário foi observado. As matrizes são definidas como:

$$B_w = [0,2 \quad 0,08]^\top \quad (4.1)$$

$$D_{zu} = [0] \quad (4.2)$$

$$D_{zw} = [0,1] \quad (4.3)$$

e aplicando-se o Corolário 2 ao sistema, impondo um limite de saturação simétrico $u_0 = 25^\circ$ os seguintes ganhos são encontrados:

$$K = [17,8954 \quad 10,0515] \quad (4.4)$$

e a norma é limitada por $\|\mathcal{H}_\infty\| \leq 3,4226$.

4.2 Implementação no protótipo

4.2.1 Análise do estado transitório

Primeiramente foram realizados testes com a esfera sendo posicionada na extremidade da tela de toque. A Figura 51 e Figura 52 mostram a resposta transitória do sistema. É notável a saturação do atuador por boa parte do estado transitório dos eixos, mostrando a eficiência do controlador em manter o sistema estável mesmo na presença de tal não-linearidade.

Figura 51 – Resposta transitória no eixo x . O gráfico do sinal de controle mostra na linha tracejada o limite de saturação do atuador.

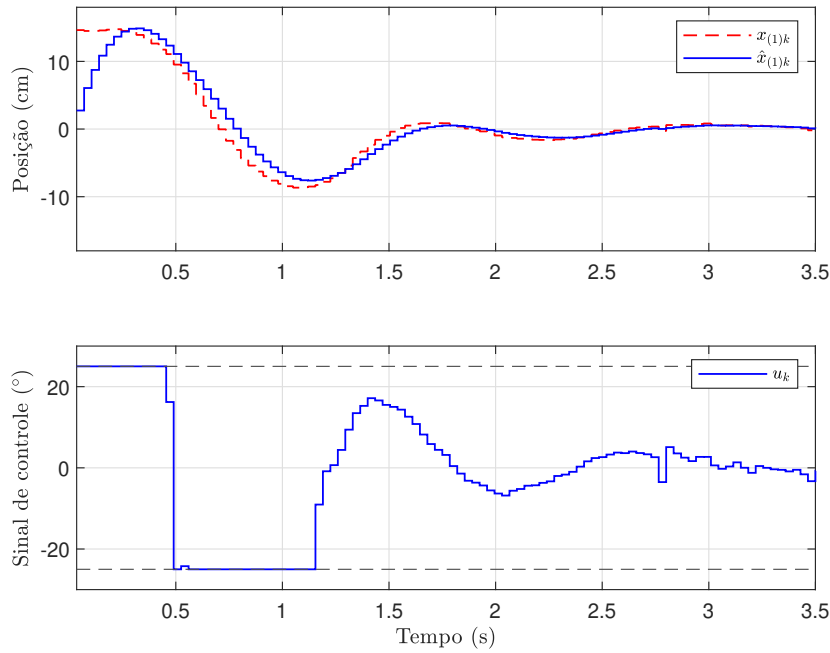
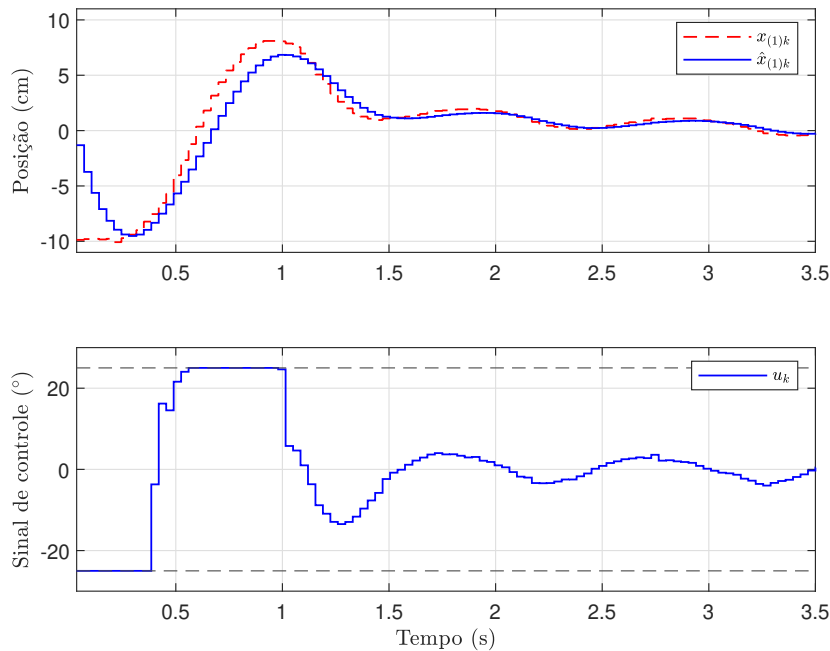


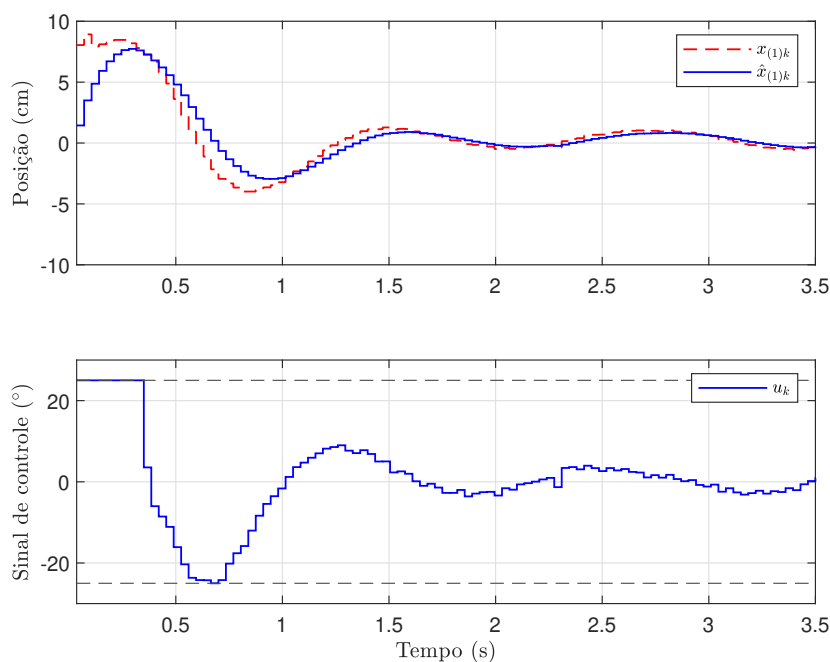
Figura 52 – Resposta transitória no eixo y . O gráfico do sinal de controle mostra na linha tracejada o limite de saturação do atuador.



A posição estimada demora aproximadamente 6 amostras para convergir no valor real devido à propagação do modelo para uma mudança instantânea de posição, porém após convergir o estimador consegue seguir com precisão a dinâmica do sistema.

Em seguida a esfera foi posicionada aproximadamente no ponto médio dos eixos em relação à origem, como exibido na [Figura 53](#) e [Figura 54](#). É possível notar a redução no sobressinal do estado transitório e o menor tempo que o atuador passa no limite de saturação. Uma possível explicação para a melhora da resposta é que a condição inicial está mais próxima do ponto onde o sistema foi linearizado, portanto o controlador feito para o sistema fica com uma resposta mais suave.

Figura 53 – Resposta transitória no eixo x com a esfera sendo posicionada mais próxima à origem. O gráfico do sinal de controle mostra na linha tracejada o limite de saturação do atuador.



Por fim, a [Figura 55](#) mostra um gráfico dos eixos x e y com diferentes condições iniciais de posição da esfera, em que é possível ver que a resposta transitória dos quatro cantos da tela é similar, com um nível de sobressinal semelhante. É possível também notar que as trajetórias mais próximas à origem possuem menos sobressinal, devido ao já mencionado efeito da região linear do modelo utilizado, melhorando a resposta transitória.

4.2.2 Análise do estado estacionário

Após a estabilização, o estado estacionário foi observado e pode ser visto na [Figura 56](#) e [Figura 57](#). É possível notar que o sistema oscila próximo à origem a uma amplitude e frequências aproximadamente constantes. Isso acontece devido ao fato de o servomotor utilizado possuir uma não-linearidade do tipo zona-morta, fazendo com que o sinal de controle não consiga atuar no sistema até que um certo limite seja ultrapassado, gerando o estado oscilatório no estado estacionário.

Figura 54 – Resposta transitória no eixo y com a esfera sendo posicionada mais próxima à origem. O gráfico do sinal de controle mostra na linha tracejada o limite de saturação do atuador.

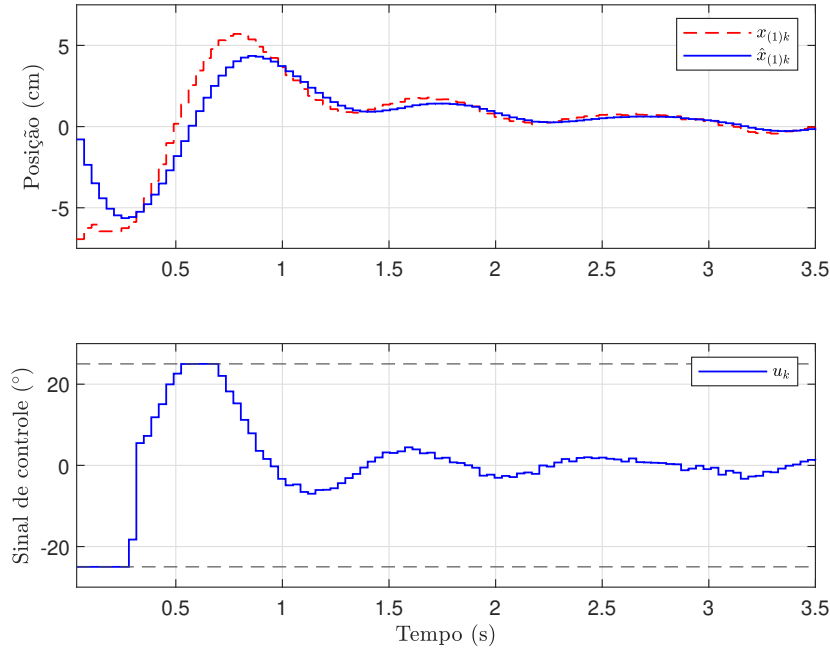
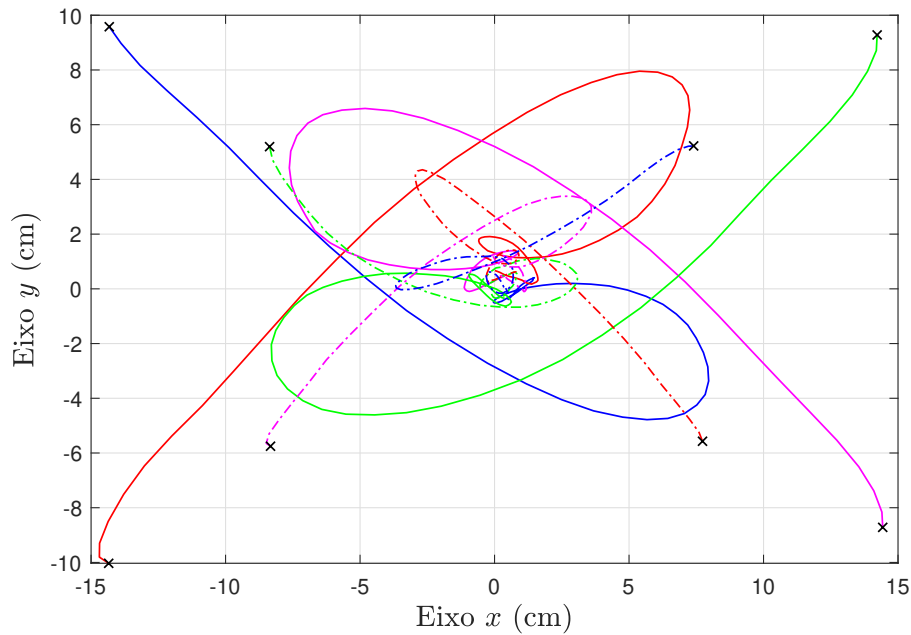


Figura 55 – Trajetórias para diferentes condições iniciais. As posições iniciais são denotadas por um “ \times ”.



É possível ver pela [Figura 58](#) que os estados do sistema vão para a origem em um comportamento que se assemelha a um ciclo limite, indicando que a oscilação causada pela zona-morta do atuador pode ser minimizada por meio de técnicas não-lineares de controle.

Figura 56 – Resposta em estado estacionário no eixo x .

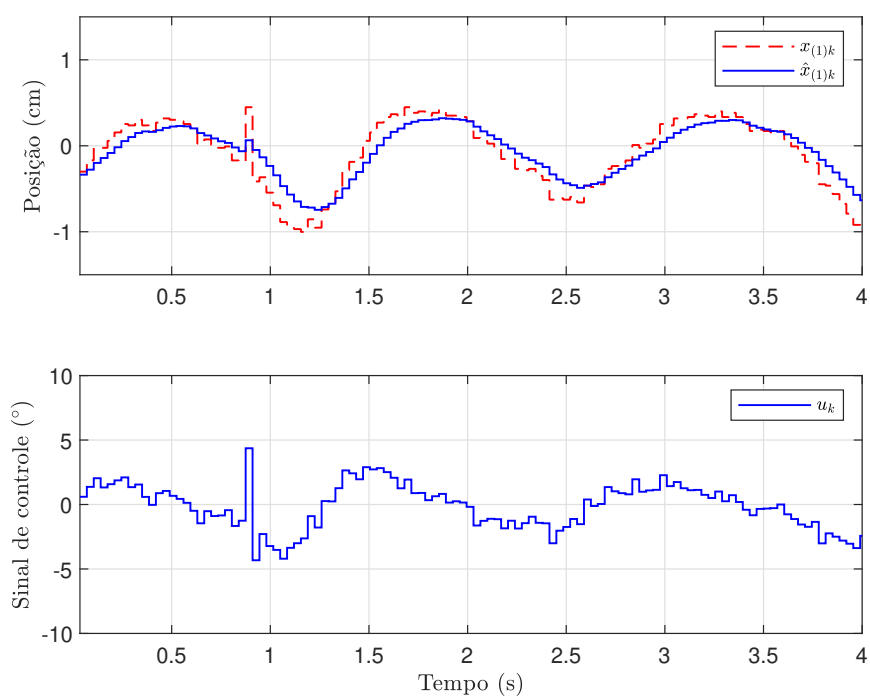


Figura 57 – Resposta em estado estacionário no eixo y .

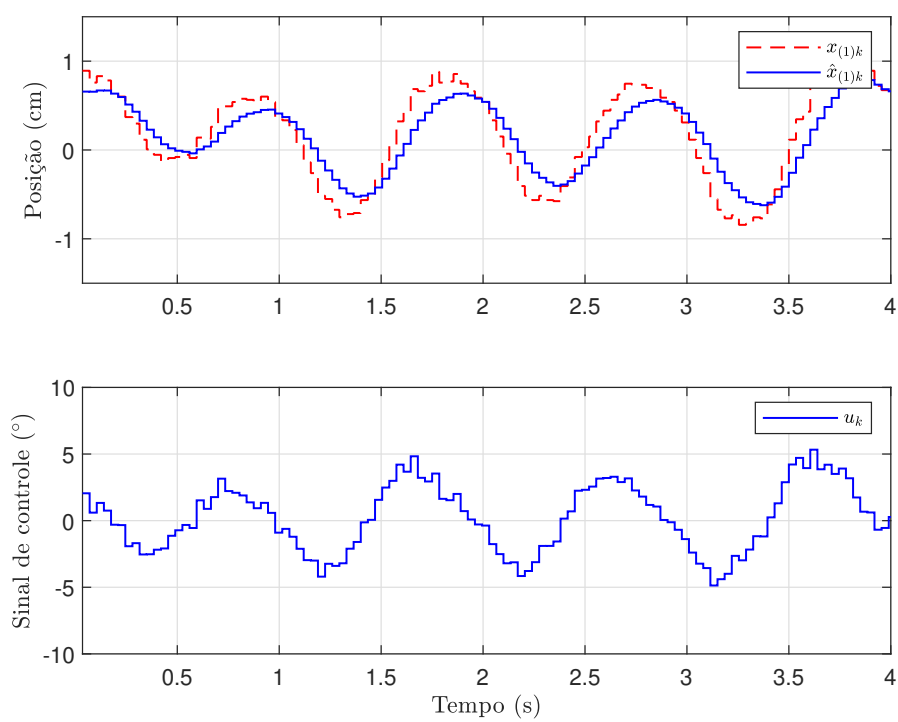
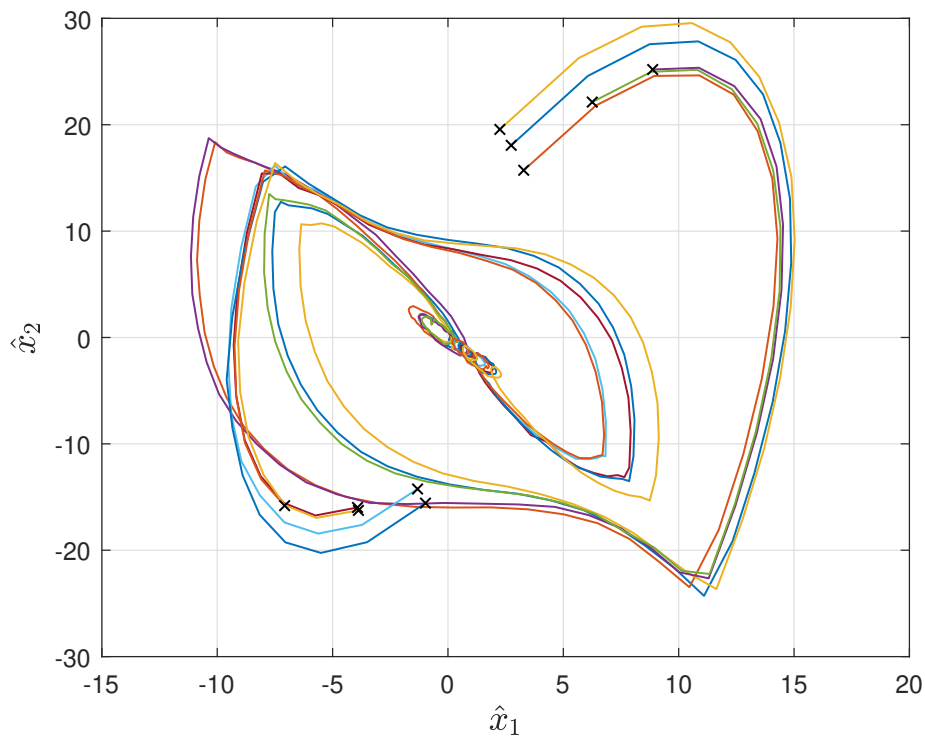


Figura 58 – Diagrama de estados para diferentes condições iniciais, denotadas por “×”.



4.2.3 Estabilidade na presença de distúrbios

Após o sistema entrar em estado estacionário, foram aplicados distúrbios no sistema diretamente na esfera, para avaliar a rejeição a distúrbios do controlador. Os resultados são exibidos nas [Figura 59](#) e [Figura 60](#). Os distúrbios de baixa amplitude são rapidamente corrigidos pelo sinal de controle, que satura por alguns instantes para reestabilizar o sistema. Para distúrbios de alta amplitude o sinal de controle entra na região de saturação para evitar que a esfera caia. Através dos gráficos é possível observar uma boa rejeição a distúrbios para o sistema. O filtro de Kalman também auxilia na estabilidade pois impede que os ruídos do sensor sejam realimentados para a lei de controle, evitando picos momentâneos do sinal de controle causados por ruído, e não a uma movimentação real da esfera.

Figura 59 – Distúrbios aplicados no eixo x .

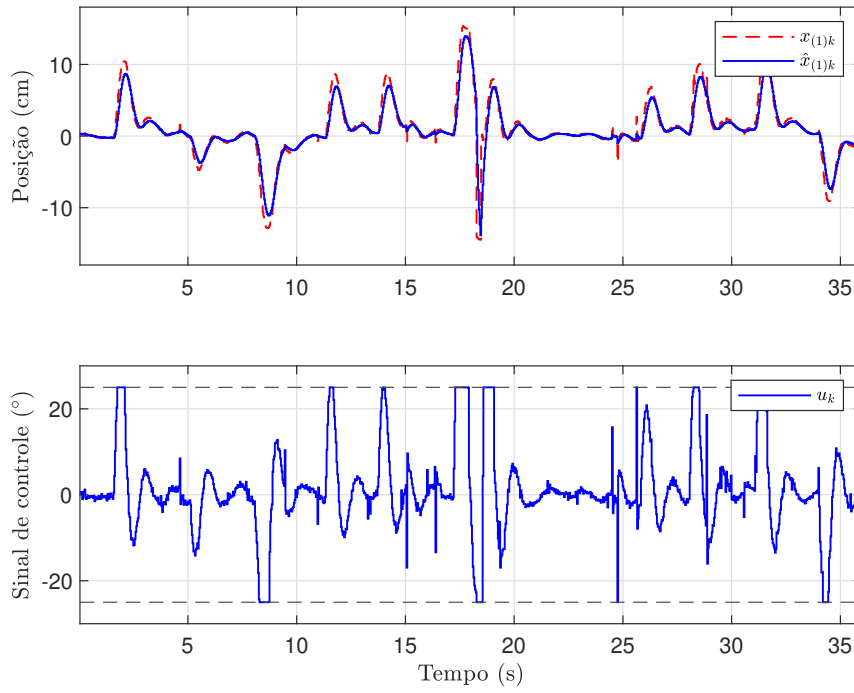
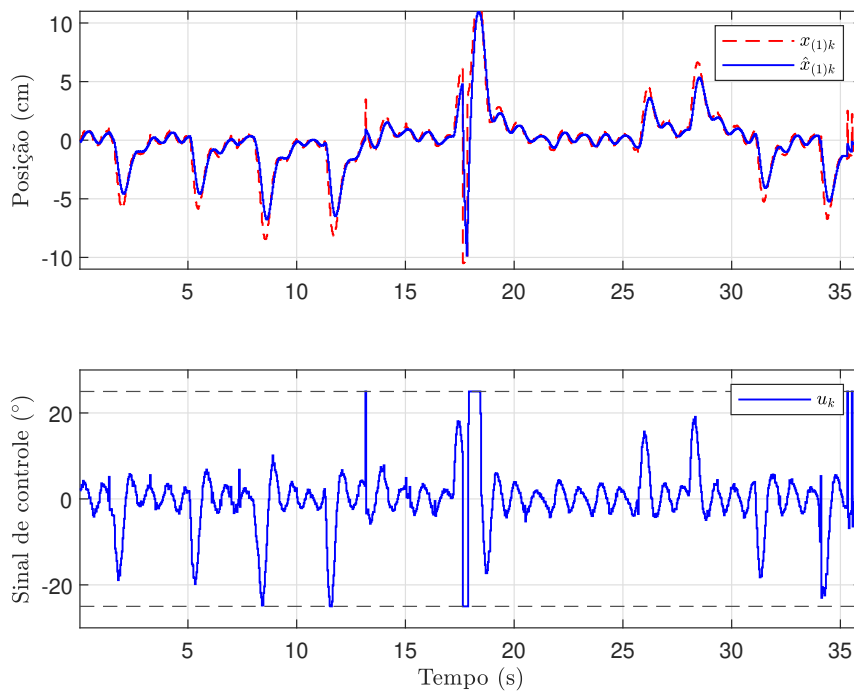


Figura 60 – Distúrbios aplicados no eixo y .



5 Conclusões

Ao longo deste trabalho muitos temas foram abordados. A tarefa de estabilização de sistemas dinâmicos reais não é trivial e muitas mentes brilhantes se esforçaram para que as técnicas de controle modernas pudessem amadurecer. Os resultados obtidos comprovam a eficiência dos controladores robustos realizados por meio de otimização convexa para melhorar a rejeição a distúrbios e também para garantir estabilidade na presença de saturação. Além disso o uso do filtro de Kalman foi fundamental, visto que o controlador por realimentação de estados necessita do segundo estado que não é mensurável, assim como filtrar a medida de posição para garantir um bom sinal para a lei de controle. O código utilizado na implementação e os modelos 3D projetados estão disponíveis em um repositório público ¹.

O comportamento oscilatório do sistema próximo ao ponto de equilíbrio por conta da zona-morta do atuador foi considerado pequeno o suficiente e o desempenho do sistema é satisfatório, com erro em estado estacionário de menos de 1cm. O estado transitório também foi considerado satisfatório, visto que para condições iniciais de posição na extremidade da tela o sistema consegue levar a esfera até o ponto de equilíbrio sem deixá-la cair. Vale destacar que o controlador foi projetado utilizando um modelo linearizado do sistema, devido a isso, condições iniciais mais distantes da origem geram sobressinal maiores.

Dentre os possíveis tópicos que podem ser explorados em trabalhos futuros, os mais notáveis são:

1. Utilizar um atuador com uma zona-morta menor, melhorando a resposta em estado estacionário;
2. Implementar o sistema de controle para o rastreamento de uma entrada de referência;
3. Utilizar \mathcal{D} -estabilidade para melhorar a resposta em estado transitório;
4. Controle de aceleração do motor, para maior precisão utilizando o modelo do motor DC para gerar o sinal de controle;
5. Utilizar técnicas de controle não-linear, como modelagem *Fuzzy* Takagi-Sugeno, para melhorar o desempenho do sistema quando as condições iniciais se encontram muito distantes da origem;
6. Utilizar restrições para limitar o valor dos estados e garantir que a esfera permaneça na plataforma para mais condições iniciais, como velocidade de entrada mais rápida.

¹ <https://github.com/Not-a-Penguin/Ball-on-Plate>.

Referências

- ABDULLAH, F. N.; AZIZ, G. A.; SHNEEN, S. W. Simulation model of servo motor by using matlab. *Journal of Robotics and Control (JRC)*, v. 3, 2022. ISSN 27155072. Citado na página 27.
- AGUIRRE, L. *Sistemas realimentados: Uma abordagem histórica*. [S.l.]: Editora Blucher, 2020. ISBN 9788521219200. Citado 5 vezes nas páginas 28, 32, 33, 34 e 37.
- AGUIRRE, L. *Controle de Sistemas Amostrados, Segunda Edição*. [S.l.: s.n.], 2023. ISBN 978-65-8706-565-6. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 31.
- AGUIRRE, L. A. Introdução à identificação de sistemas - técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas: Teoria e aplicação. *Editora UFMG*, v. 4, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 44, 45, 46, 47 e 64.
- AGUIRRE, L. A. et al. *Enciclopédia de Automática*. [S.l.]: Blucher, 2007. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 36, 40 e 41.
- ALCIATORE, D. G. H. M. B. *Introduction to Mechatronics and Measurement Systems*. [S.l.: s.n.], 2012. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 26.
- ATHANS, M. On the LQG problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 16, n. 6, p. 528–528, 1971. Citado na página 38.
- AWTAR, S. et al. Mechatronic design of a ball-on-plate balancing system. *Mechatronics*, v. 12, 2002. ISSN 09574158. Citado 4 vezes nas páginas 18, 19, 20 e 53.
- BATOOL, A. et al. A comparative study of dc servo motor parameter estimation using various techniques. *Automatika*, Taylor & Francis, v. 63, n. 2, p. 303–312, 2022. Citado na página 26.
- BLACK, H. S. Stabilized feedback amplifiers. *The Bell System Technical Journal*, v. 13, n. 1, p. 1–18, 1934. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- BOYD, S. Linear matrix inequalities in system and control theory (s. boyd, l. e. ghaoui, e. feron, and v. balakrishnan). *SIAM Review*, v. 37, 1995. ISSN 0036-1445. Citado 3 vezes nas páginas 15, 35 e 36.
- BROGLIATO, B. et al. *Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Applications*. 3rd ed.. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2020. (Communications and Control Engineering). ISBN 978-3-030-19419-2;978-3-030-19420-8. Citado na página 42.
- CAMPBELL, T. et al. Could 3D printing change the world. *Technologies, Potential, and Implications of Additive Manufacturing*, Atlantic Council, Washington, DC, JSTOR, v. 3, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- CASTRO, R. da S. et al. Modelagem e implementação de um sistema ball and plate controlado por servo-visão. *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2013. Disponível em: <<http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/4635.pdf>>. Citado 3 vezes nas páginas 21, 53 e 62.

- DECARLO, R. *Linear Systems: A State Variable Approach with Numerical Implementation*. [S.l.]: Prentice Hall, 1989. ISBN 9780135368145. Citado na página 31.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Modern Control Systems (13th Edition)*. [S.l.: s.n.], 2017. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 28.
- DOWNS, R. Using resistive touch screens for human/machine interface. *Analog Applications Journal*, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 26.
- Espressif Systems. *ESP-IDF Programming Guide*. 2024. Disponível em: <<https://docs.espressif.com/projects/esp-idf/en/latest/esp32/hw-reference/esp32/get-started-devkitc.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P.; BOLZERN, P. Differential linear matrix inequality in optimal sampled-data control. *Automatica*, v. 100, 2019. ISSN 00051098. Citado na página 42.
- HARVEY, C.; STEIN, G. Quadratic weights for asymptotic regulator properties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 23, n. 3, p. 378–387, 1978. Citado na página 38.
- HIROCHI, T.; YOKOMICHI, M.; SHIMA, M. Control of ball and plate system by approximate input-output linearization method. *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, The Society of Instrument and Control Engineers, v. 31, p. 1635–1642, 10 1995. ISSN 0453-4654. Citado na página 18.
- HURWITZ, A. *On The Conditions Under Which an Equation Has Only Roots With Negative Real Parts*. [S.l.: s.n.], 1895. v. 65. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.
- JALNEKAR, R. M.; JOG, K. S. Pulse-width-modulation techniques: A review. *IETE Journal of Research*, Taylor & Francis, v. 46, n. 3, p. 175–183, 2000. Citado na página 30.
- KALMAN, R. E. On the general theory of control systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, v. 4, 1959. ISSN 0096199X. Citado na página 15.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, v. 82, 1960. ISSN 1528901X. Citado na página 16.
- KASSEM, A.; HADDAD, H.; ALBITAR, C. Comparison between different methods of control of ball and plate system with 6DOF stewart platform. *IFAC-PapersOnLine*, v. 48, n. 11, p. 47–52, 2015. ISSN 2405-8963. 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON 2015. Citado na página 53.
- NEALE, R. G.; NELSON, D. L.; MOORE, G. E. Nonvolatile and reprogrammable, the read-mostly memory is here. *Electronics*, v. 43, 1970. ISSN 08834989. Citado na página 28.
- NGUYEN, H. N. et al. Improved vertex control for a ball and plate system. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 45, p. 400–405, 1 2012. ISSN 1474-6670. Citado na página 20.
- NOKHBEH, M.; KHASHABI, D. Modelling and control of ball-plate system. *Mathematical Modelling*, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 22 e 63.

- NYQUIST, H. Regeneration theory. *Bell System Technical Journal*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 11, p. 126–147, 1 1932. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.
- OGATA, K. *Discrete-time Control Systems*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1987. (Prentice-Hall International Editions). ISBN 9780132161022. Citado 7 vezes nas páginas 29, 30, 31, 32, 33, 34 e 35.
- OJHA, M.; SIKKA, R. An overview on applications of microcontroller. *International Journal of Innovative Research in Engineering & Management*, v. 8, n. 6, p. 4020–405, 2021. Citado na página 27.
- PARKS, P. C. A. M. Lyapunov’s stability theory-100 years on. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, v. 9, 1992. ISSN 02650754. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.
- RAGHUNATHAN, K. R. History of microcontrollers: First 50 years. *IEEE Micro*, v. 41, 2021. ISSN 19374143. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- RICHARDS, M. *TMS 1000 4-Bit microcontroller*. 1976. Disponível em: <<https://www.computerhistory.org/revolution/digital-logic/12/284/1564>>. Citado na página 27.
- ROUTH, E. *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion*. [S.l.]: Macmillan and Company, 1877. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.
- SAFONOV, M. G. Origins of robust control: Early history and future speculations. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 45, p. 1–8, 1 2012. ISSN 1474-6670. Citado 3 vezes nas páginas 15, 37 e 38.
- SHAHRUBUDIN, N.; LEE, T. C.; RAMLAN, R. An overview on 3D printing technology: Technological, materials, and applications. *Procedia Manufacturing*, Elsevier, v. 35, p. 1286–1296, 1 2019. ISSN 2351-9789. Citado na página 22.
- Shenzhen VS Display Electronic Ltd. *15"5-Wire Resistive Touch Screen USB controller for 15"1024x768 4:3 LCD Panel*. 2022. Disponível em: <<https://www.vslcd.com/products/15inch-5-wire-resistive-touch-panel-screen-vs150tp-5s-15inch-resistive-touch-screen.html>>. Citado na página 50.
- STOORVOGEL, A. *The \mathcal{H}_∞ control problem*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1992. (Prentice-Hall international series in systems and control engineering). ISBN 0-13-388067-2. Citado na página 40.
- SUMEGA, M. et al. Experimental study of ball on plate platform. In: . [S.l.: s.n.], 2018. Citado na página 20.
- TARBOURIECH, S. et al. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. [S.l.]: Springer London, 2011. (SpringerLink : Bücher). ISBN 9780857299413. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- TOCCI, R.; WIDMER, N.; MOSS, G. *Digital Systems: Principles and Applications*. [S.l.]: Prentice Hall, 2011. ISBN 9780135103821. Citado 3 vezes nas páginas 24, 29 e 30.

ZHOU, K.; DOYLE, J. *Essentials of Robust Control*. [S.l.]: Prentice Hall, 1998. (Prentice Hall Modular Series for Eng). ISBN 9780135258330. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 41.

ZHOU, K.; DOYLE, J.; GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. [S.l.]: Prentice Hall, 1996. (Feher/Prentice Hall Digital and). ISBN 9780134565675. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.