



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS  
ESCOLA NORMAL SUPERIOR  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RONALDO SILVA DE ARAÚJO

**TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS  
UTILIZANDO GEOMETRIA ESFÉRICA.**

MANAUS, FEVEREIRO  
2024

**RONALDO SILVA DE ARAÚJO**

**TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS  
UTILIZANDO GEOMETRIA ESFÉRICA.**

Trabalho de Conclusão de Curso elaborado junto à disciplina TCC II, do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas, para a obtenção do grau de licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edson Lopes de Souza

MANAUS, FEVEREIRO  
2024

**TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DO  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO  
ESTADO DO AMAZONAS**

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de RONALDO SILVA DE ARAÚJO.

Em 06 de fevereiro de 2024, às 16h40, na Sala Profª Maria Clara Dantas da Escola Normal Superior da UEA na presença da Banca Avaliadora composta pelos professores: Dr. Edson Lopes de Souza, Dr. Almir Cunha da Graça Neto e Dra. Nadime Mustafa Moraes o aluno RONALDO SILVA DE ARAÚJO apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado: "TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS UTILIZANDO GEOMETRIA ESFÉRICA.". A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,2 divulgando o resultado ao aluno e demais presentes.

Manaus, 06 de fevereiro de 2024.

Jorge M. R.  
Presidente da Banca Avaliadora

Edson Lopes de Souza  
Orientador

Nadime Mustafa Moraes  
Avaliador 1

Almir Cunha da Graça Neto  
Avaliador 2

Ronaldo Silva Araújo  
Aluno



## **Agradecimentos**

Ao Prof.Dr. Edson Lopes de Souza, expresso minha gratidão pela paciência diante das minhas inúmeras dúvidas, pelo apoio constante durante todo o processo de desenvolvimento da pesquisa e, acima de tudo, pela confiança e amizade cultivadas. Ele é uma pessoa que admiro profundamente e respeito.

À Prof.Ma. Helisângela Ramos da Costa, agradeço pelas valiosas contribuições e análises para a escrita e desenvolvimento do texto, assim como pela paciência e cordialidade demonstradas. Ao corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática, meu reconhecimento pelo conhecimento produzido, pelas importantes lições de vida e pelo estímulo constante ao nosso crescimento acadêmico.

Aos amigos e colegas, em especial ao Elias Lima e a Vitória Castelo que de maneira direta e indireta, contribuíram compartilhando alegrias e oferecendo palavras de estímulo nos momentos mais desafiadores.

Um agradecimento à minha família, especialmente minha filha Gabriele, que muitas vezes acreditou mais em meu potencial do que eu mesmo. Foram testemunhas das noites de estudo intenso, do cansaço, das dificuldades e dos momentos de desânimo, mas também celebraram cada etapa concluída. São a razão principal pela qual alcancei esse ponto e continuo buscando ir além.

Palavras por si só não podem expressar totalmente a gratidão que sinto por ter tido pessoas tão maravilhosas ao meu lado.

## Resumo

Neste estudo, investigou-se o Teorema de Euler aplicado a poliedros convexos, estabelecendo uma relação entre vértices, arestas e faces por meio de uma identidade específica. Utilizou-se a Geometria Esférica em conjunto com os conceitos e propriedades da Geometria Euclidiana voltados para poliedros convexos, fundamentais para a demonstração do teorema. O objetivo principal foi analisar a inter-relação dos elementos de tais poliedros, adotando uma abordagem integrada da Geometria Esférica com a Geometria Euclidiana. Para compreender plenamente o Teorema de Euler para poliedros convexos, exploraram-se os conceitos e contextos históricos relevantes, visando apresentar características que permitam sua generalização.

**Palavras-Chave:** Teorema de Euler. Geometria Esférica. Poliedros Convexos. Geometria Euclidiana

# Lista de Figuras

1.1 Leonhard Euler	8
1.2 A. M Legendre	10
1.3 Poliedro convexo e não convexo	11
1.4 Plano secante a esfera.	12
1.5 Retas perpendiculares em Geometria Esférica	14
1.6 Fuso esférico	14
1.7 Abertura do fuso esférico	15
1.8 Fuso duplo	16
1.9 Triângulo esférico	17
3.1 Decomposição da esfera em triângulos	22

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>1 Aspectos históricos e preliminares</b>	<b>8</b>
1.1 Aspectos históricos . . . . .	8
1.1.1 Leonhard Euler . . . . .	8
1.1.2 A. M Legendre . . . . .	10
1.2 Poliedros . . . . .	10
1.2.1 Poliedros Convexos . . . . .	11
1.3 Noções de geometria esférica . . . . .	12
1.3.1 Fuso Esférico . . . . .	14
1.3.2 Fusos esféricos, simples e duplos . . . . .	15
1.3.3 Triângulo esférico . . . . .	16
<b>2 Metodologia da pesquisa</b>	<b>18</b>
2.1 Abordagem Metodológica . . . . .	18
2.2 Etapas de desenvolvimento do trabalho . . . . .	19
<b>3 Teorema de Euler para poliedros convexos utilizando Geometria Esférica</b>	<b>20</b>
<b>Considerações Finais</b>	<b>24</b>
<b>Referências</b>	<b>26</b>

## Introdução

Desde os primeiros contatos com a matemática, especialmente a Geometria, observamos conceitos fundamentais como ponto, reta e plano, explorados tanto na Geometria Plana quanto na Espacial. Nesse contexto, o estudo dos poliedros convexos assume uma natureza Euclidiana, onde o espaço é contínuo, tridimensional, homogêneo e infinito, representando um tema de significativa relevância, não apenas do ponto de vista histórico e teórico, mas também devido às suas diversas aplicações práticas. Por outro lado, a geometria não euclidiana, que desafia o 5º Postulado de Euclides ao afirmar a inexistência de retas paralelas a uma reta dada, foi primeiramente introduzida em 1851 por Georg Bernhard Riemann em sua aula de admissão na Universidade de Göttingen, onde atuava como professor adjunto. Na ocasião, Riemann demonstrou a possibilidade de geometrias diferentes da euclidiana.

Apesar de raramente ser incluída nos currículos de cursos de graduação em Matemática, tanto no bacharelado quanto na licenciatura, e ainda menos nos programas de ensino secundário, não se pode ignorar sua relevância. A geometria é uma ferramenta poderosa para desenvolver a percepção e interação do ser humano com o espaço ao seu redor. Introduzir atividades sobre Geometrias Não-Euclidianas para estudantes do ensino médio pode ampliar perspectivas em diversas áreas do conhecimento.

A ausência de estudos em geometria pode comprometer a capacidade do indivíduo de compreender e se inserir no espaço em que vive. Isso pode resultar em uma visão limitada do ambiente circundante, restringindo sua capacidade de pensamento abstrato em geometria e limitando as conexões da Matemática com outras disciplinas. A Geometria desempenha um papel crucial na Matemática, investigando o espaço, as formas nele contidas e suas inter-relações. Sua importância é evidente tanto em aplicações práticas quanto na organização do pensamento lógico e dedutivo.

Um aspecto fascinante a considerar é que nem todas as propriedades da Geometria Euclidiana são aplicáveis na Geometria Esférica, o que instiga reflexões e comparações entre essas duas geometrias distintas. Essa disparidade entre as duas geometrias revela-se especialmente intrigante quando exploramos a composição dos poliedros.

Por definição, um poliedro é formado pela combinação de um número finito de



polígonos planos, onde cada lado de um polígono é compartilhado com apenas um outro polígono, sendo que cada polígono é denominado de face do poliedro. As arestas, por sua vez, representam os lados comuns a duas faces, enquanto os vértices pertencem às faces do poliedro. Essa estrutura poliédrica, ao ser analisada em diferentes contextos geométricos, ressalta as divergências e semelhanças entre as geometrias Euclidiana e Esférica.

Esta pesquisa tem como objetivo principal compreender o Teorema de Euler para poliedros convexos utilizando a abordagem da Geometria Esférica. Além disso, buscase demonstrar o teorema de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico e apresentar o Teorema de Euler para poliedros convexos, utilizando a ideia proposta pelo matemático Adrien Marie Legendre a partir do teorema de Girard. Paralelamente, serão explorados os contextos históricos que envolvem a evolução desses teoremas.

A estrutura deste trabalho compreende três capítulos principais: no Capítulo 1, serão abordados os contextos históricos do Matemático e Físico Leonhard Euler (1707-1783) em termos de sua biografia e do teorema que leva seu nome. Também será apresentado o contexto histórico do Matemático francês Adrien Marie Legendre (1752-1833), destacando sua biografia e os temas relevantes para este estudo.

No Capítulo 2, detalharemos a metodologia utilizada para coletar todos os dados, conceitos e teoremas aplicados na pesquisa, bem como a abordagem e estratégia adotadas.

Por fim, no Capítulo 3, realizaremos a demonstração do principal resultado deste trabalho: o Teorema de Euler para poliedros convexos, utilizando a abordagem da geometria esférica. Serão apresentados os conceitos, elementos e fórmulas pertinentes a cada tema discutido. Para embasar nossa pesquisa, destacamos os autores: [5], [2], [6] e [1], entre outros.

A expansão dos conhecimentos aqui apresentados visa proporcionar uma compreensão mais profunda e abrangente desses temas, enriquecendo o campo da geometria e contribuindo para o avanço do conhecimento matemático.

# Capítulo 1

## Aspectos históricos e preliminares

### 1.1 Aspectos históricos

#### 1.1.1 Leonhard Euler

Figura 1.1: Leonhard Euler



Fonte: [5]

Leonhard Paul Euler, filho mais velho de Paulus Euler e Margaretha Brucker, veio ao mundo no ano de 1707 em Basiléia na Suíça. Desde muito cedo mostrou extrema habilidade com os números sendo educado nos primeiros anos de vida por seu próprio pai que também tinha habilidade com a matemática. No ano de 1720 foi para a Universidade de Basiléia cursar filosofia que era do agrado de seu pai. Devido a influencia paterna Euler passou a ter contato com o maior matemático da época, Johann Bernoulli que influenciou bastante na escolha do jovem Euler na carreira de matemático [5].

É creditado a Euler ser o primeiro matemático a perceber que há problemas geométricos para os quais as soluções não dependem das medidas. Uma de suas mais notáveis descobertas foi perceber a relação entre os vértices  $V$ , arestas  $A$  e faces  $F$  de um poliedro convexo através da equação  $V - A + F = 2$ , também chamada identidade de Euler que foi descoberto em 1758. Desde então, diversas demonstrações apareceram na literatura e alguns continuam falhas, como a de Cauchy, que foram descobertas muitos anos mais tarde. Essas falhas eram devidas à falta de precisão na definição de poliedros convexos. Mesmo Euler nunca se preocupou em definir precisamente essa palavra. [5].

Há um manuscrito de Decartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, que contém resultados a partir dos quais se poderia obter a fórmula citada como consequência imediata [2].

A constante nesta fórmula agora conhecida como a característica de Euler, e está relacionado com o gênero do objeto. [5].

Dentre os teoremas, equações desenvolvidas por Euler destacam-se:

- Fórmula de Euler para Poliedros convexos;
- Problema das 7 pontes de Königsberg que deu início a uma nova matemática;
- Equação de Euler-Lagrange;
- Equações da dinâmica dos fluidos;
- Densidade dos números primos.
- Identidade de Euler.

A primeira demonstração inteligível do Teorema de Euler para Poliedros Convexos a ser publicado foi de autoria de um matemático francês, Adrien Marie Legendre que utilizando conceitos de Geometria Esférica e com uma abordagem alicerçada em outro teorema, conhecido como Teorema de Girard onde este apresenta o conceito de triângulo esférico e demonstra que a soma dos ângulos internos deste não é mais constante e igual a 180 graus como na Geometria Euclidiana, agora essa soma está sujeita a área do triângulo e ao raio da esfera, sendo sempre maior do que 180 graus, motivo pelo qual surge a necessidade de primeiramente abordar a questão desse teorema.

## 1.1.2 A. M Legendre

Figura 1.2: A. M Legendre



Fonte: [5]

A. M Legendre foi um notável matemático dentro de uma tradição que muitos de seus compatriotas ainda seguem. Nasceu em Paris em 18 de setembro de 1752, numa família muito rica que lhe deu uma educação de qualidade no College Mazarin em Paris, além disso, foi nessa Escola que ele começou a se interessar por literatura antiga e por livros científicos em especial a matemática. Uma de suas obras mais conhecidas é **Eléments de Géométrie** tendo sido publicado no ano de 1794 e traduzido para o inglês, alemão, italiano, romeno e português. [5]. ademais, é creditado a Legendre a primeira demonstração inteligível do teorema de Euler devido a simplicidade e fácil compreensão

## 1.2 Poliedros

¶ Uma primeira idéia para definir os poliedros é a seguinte:

**Definição 1.2.1.** *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:*

- *Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono;*

---

<sup>1</sup>A definição desta seção são conforme [2]

- A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia;

Uma classe especial de poliedros é a de poliedros convexos que passaremos a definir agora.

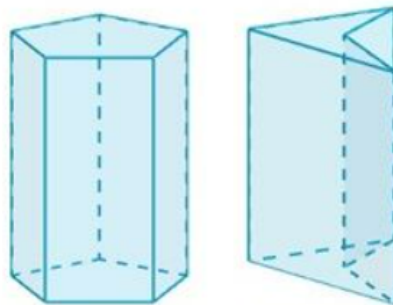
### 1.2.1 Poliedros Convexos

**Definição 1.2.2.** "Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma das faces) o corta, em, no máximo, dois pontos"<sup>[2]</sup>.

Os **elementos** de uma superfície poliédrica limitada convexa conforme <sup>[4]</sup> são:

- **faces:** são os polígonos;
- **arestas:** são os lados dos polígonos;
- **vértices:** são os vértices dos polígonos;
- **ângulos:** são os ângulos dos polígonos.

Figura 1.3: Poliedro convexo e não convexo



Fonte: <https://www.lifeder.com/caracteristicas-prisma-pentagonal/>

Consideremos um número finito  $n$  ( $n \geq 4$ ) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

- Dois polígonos não estão num mesmo plano;
- Cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- O plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço.

Nessas condições, ficam determinados  $n$  semi-espacos, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semiespacos é chamado poliedro convexo. Um poliedro convexo possui: faces, que são os polígonos convexos; arestas, que são os lados dos polígonos e vértices, que são os vértices dos polígonos. A reunião das faces é a superfície do poliedro.

**Congruência:** Dois poliedros são congruentes se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus elementos de modo que as faces e os ângulos poliédricos de um sejam ordenadamente congruentes às faces e ângulos poliédricos do outro. Da congruência entre dois poliedros sai a congruência das faces, arestas, ângulos e diedros.

### 1.3 Noções de geometria esférica

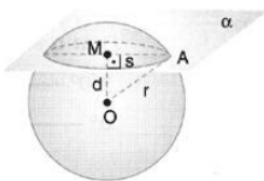
**Definição 1.3.1.** <sup>[2]</sup> (Esfera). Consideremos um ponto  $O$  e um segmento de medida  $r$ . Chama-se esfera de centro  $O$  e raio  $r$  ao conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que a distância  $OP$  seja menor ou igual a  $r$ . A esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

Chama-se superfície da esfera de centro  $O$  e raio  $r$  ao conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que a distância  $OP$  seja igual a  $r$ .

Toda seção plana de uma esfera é um círculo. Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um círculo máximo da esfera. Sendo  $r$  o raio da esfera,  $d$  a distância do plano secante ao centro e  $s$  o raio da seção, vale a relação:

$$s^2 = r^2 - d^2.$$

Figura 1.4: Plano secante a esfera.



Fonte:

<https://matematicarev.blogspot.com/2010/09/eca-da-esfera-toda-secao-plana-de-uma.html>

<sup>2</sup>As definições e Teoremas desta seção são de acordo com [6] e [7]

### Elementos:

Pólos relativos a uma seção da esfera são as extremidades do diâmetro perpendicular ao plano dessa seção. Considerando a superfície de uma esfera de eixo  $e$ , temos:

- **Pólos:** são as interseções da superfície com o eixo.
- **Equador:** é a seção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície.
- **Paralelo:** é uma seção (circunferência) perpendicular ao eixo. É "paralela" ao equador.
- **Meridiano:** é uma seção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo.

### Área da esfera

A área da superfície de uma esfera de raio  $r$  é igual a  $4\pi r^2$ .

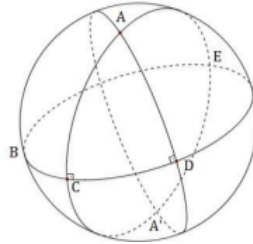
A Geometria Esférica foi elaborada, principalmente, por A. M Legendre, a fim de ser possível o estudo geométrico em áreas esféricas, onde a Geometria Euclidiana não atende adequadamente e não pode ser usada de forma precisa.

**Definição 1.3.2.** (*Superfície esférica*). *Seja  $O$  um ponto e  $r$  um número real positivo. A superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto de todos os pontos  $P$  do espaço, cuja distância a  $O$  é igual a  $r$ .* [2]

A intersecção de um plano secante à superfície esférica de raio  $r$ , passando pelo centro  $O$ , determina uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ . De maneira mais geral, se um plano contém um ponto interior à superfície esférica, esta intersecção é uma circunferência, tal que, seu centro é o pé da perpendicular ao plano secante, traçada a partir do centro da superfície Esférica .

Observação: Em Geometria Esférica e Geometria Euclidiana os conceitos de reta são bastante diferentes. A intersecção da superfície esférica com um plano, passando pelo centro, é chamada de circunferência máxima ou geodésica , que desempenha da esfera o mesmo que a reta desempenha no plano. Na figura 1.5  $ACA'$  e  $ADA'$  são retas, ambas perpendiculares à reta  $BCDE$ .

Figura 1.5: Retas perpendiculares em Geometria Esférica



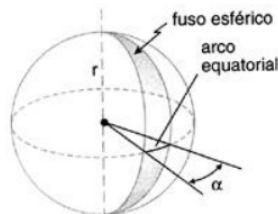
Fonte: [6]

**Definição 1.3.3.** *Definição (Segmento de reta na Geometria Esférica) Dados dois pontos sobre a superfície esférica, o menor comprimento entre eles é dado por um trecho de reta denominado arco de circunferência máxima, que é definido como segmento de reta na Geometria Esférica. [2]*

### 1.3.1 Fuso Esférico

**Definição 1.3.4.** *É a interseção da **superfície** de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém um diâmetro dessa superfície esférica.*

Figura 1.6: Fuso esférico



Fonte:

<https://quartapotencia204.blogspot.com/2012/12/mais-sobre-fuso-e-cunha-esferica-e.html>

O ângulo  $\alpha$ , medida do diedro, medido na seção equatorial, é o que caracteriza o fuso.

Sendo  $\alpha$  a medida do diedro, temos:

1. com  $\alpha$  em graus:

$$\begin{cases} 360 & - & 4\pi r^2 \\ \alpha & - & A_{fuso} \end{cases} \Rightarrow A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$$



2. com  $\alpha$  em radianos:

$$\begin{cases} 2\pi & - & 4\pi r^2 \\ \alpha & - & A_{fuso} \end{cases} \Rightarrow A_{fuso} = 2r^2\alpha$$

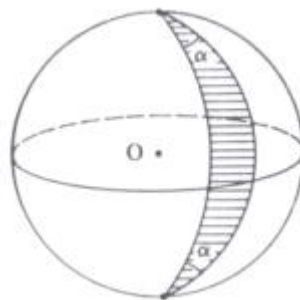
### 1.3.2 Fusos esféricos, simples e duplos

Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo na superfície da esfera? No que segue, procuraremos responder à esta questão.

Um biângulo esférico ou fuso esférico é uma região da esfera delimitada por apenas dois segmentos geodésicos com extremidades em comum. As extremidades do biângulo são dois pontos diametralmente opostos.

Os dois ângulos internos de um fuso esférico são iguais em medidas. Tal medida é denominada abertura do fuso esférico

Figura 1.7: Abertura do fuso esférico



Fonte: <https://rpm.org.br/cdrpm/5/6.htm>

A área do fuso esférico é proporcional à abertura  $\alpha$  e, isto é, dobrando-se a  $\alpha$ , dobramos a área, dividindo-se  $\alpha$  por 2, triplicando-se  $\alpha$ , triplicamos a área, etc. (Obviamente devemos tomar o cuidado de tomar múltiplos da abertura  $\alpha$  que não excedam  $360 = 2\pi$  radianos).

Se um fuso tem abertura  $\pi$  rad (ou 180) ele cobrirá metade da esfera. Se tiver abertura  $2\pi$  rad ou 360, ele cobrirá toda a esfera e seus lados coincidirão.

A área da superfície esférica de raio  $r$  é numericamente igual a  $4\pi r^2$  (um fato demonstrado por Arquimedes no século III a.C.)

Como a área  $A_\alpha$  de um fuso de abertura  $\alpha$ , é proporcional a  $\alpha$  e, para  $\alpha = 2\pi$  (radianos), temos  $A_{2\pi} = (\text{área da esfera}) = 4\pi r^2$ , para obter  $A_\alpha$  aplicamos uma regra

de três simples:

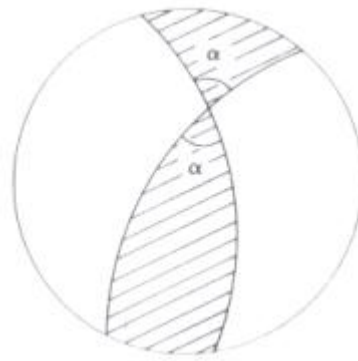
$$\frac{A_\alpha}{\alpha} = \frac{4\pi r^2}{2\pi}$$

Assim, a área do fuso esférico de abertura  $\alpha$  (radianos) é obtida por

$$A_\alpha = 2\alpha r^2.$$

Um fuso duplo de abertura  $\alpha$  é a reunião de dois fusos de abertura  $\alpha$  com os lados de um deles sendo prolongamentos dos lados do outro.

Figura 1.8: Fuso duplo



Fonte: <https://rpm.org.br/cdrpm/5/6.htm>

A área delimitada por um fuso duplo de abertura  $\alpha$  é obtida por

$$S_\alpha = 2 \cdot A_\alpha = 4\alpha r^2.$$

### 1.3.3 Triângulo esférico

É necessário algumas definições para compreender o conceito de triângulo esférico, tais como:

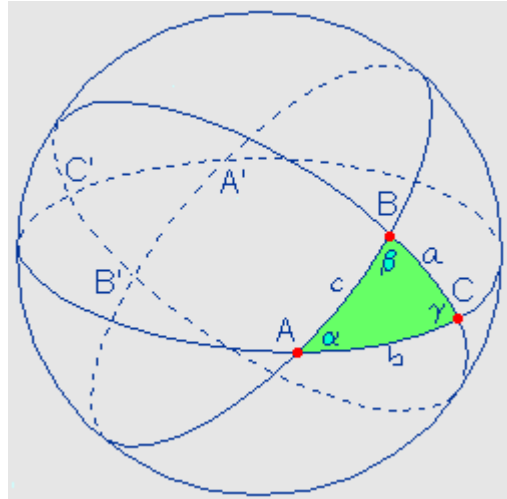
**Definição 1.3.5.** (*Ângulo esférico*) O ângulo esférico é a interseção de duas retas e, sua medida, é a mesma do ângulo formado pelas retas tangentes à superfície esférica com vértice no ponto de interseção. (Apud [6])

**Definição 1.3.6.** (*Polígono esférico*) A porção da superfície esférica, limitada exclusivamente por segmentos de reta, é chamada polígono esférico. ((Apud [6]))

Um conceito fundamental para futuras demonstrações utilizando geometria esférica, é o de triângulo esférico, do qual é formado pela intercessão de três segmentos

geodésicos não coincidentes. Na figura [1.9](#), os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  determinam o triângulo esférico  $ABC$ , de lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ , que é denotado por  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, e os ângulos internos do triângulo  $ABC$ , são:  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

Figura 1.9: Triângulo esférico



Fonte: <http://www.itaer.it/lavori/trigonsfer/TRIGONSFER3.htm>

# Capítulo 2

## Metodologia da pesquisa

### 2.1 Abordagem Metodológica

Nesta pesquisa utilizou-se uma abordagem quantitativa caracterizado pelo levantamento de relações entre diferentes elementos geométricos, condicionando a uma ampliação dos fenômenos observados(FONSCECA 2002 apud, [3])

A pesquisa buscou a ampliação de conceitos e aplicações dos poliedros convexos partindo da definição de poliedro e apresentando suas características com relação ao número de faces, vértices e arestas. Para tanto, foi necessário a introdução de conceitos de uma geometria diferente da Euclidiana visto que a demonstração de tal identidade se dará por meio da geometria.

A pesquisa seguiu como estratégia o método explicativo, na qual, além de registrar e analisar os fenômenos estudados, busca identificar suas causas, seja através da aplicação do método experimental / matemático, seja através da interpretação possibilitada pelos métodos qualitativos [8].

Os conceitos de reta na geometria esférica e suas propriedades passam a ter uma abordagem diferente da Geometria Euclidiana, sendo chamado de geodésica ou seguimentos geodésicos, conceituando fuso esférico ou biângulo, para a partir dos conceitos de geometria esférica mostrar uma relação de grande importância na demonstração do teorema de Euler. As demonstrações foram decorrentes da intuição lógica matemática, propriedades resultantes do estudo dos poliedros e da esfera. Para esse procedimento técnico foi utilizado o levantamento bibliográfico baseado nas obras de (SANTOS et al, 2020).

## 2.2 Etapas de desenvolvimento do trabalho

1ª Etapa: Levantamento Bibliográfico a partir das obras [5], [1], [2].

2ª Etapa: Elaboração das seções da fundamentação teórica a partir da pesquisa bibliográfica inicial;

3ª Etapa: Apresentação dos conceitos de Poliedro, Poliedros Convexos e Noções de Geometria Esférica como, área da Superfície Esférica, Fuso Esférico (simples e duplos) e Triângulo Esférico, mostrando suas propriedades;

4ª Etapa: Demonstração do Teorema de Girard para soma dos ângulos internos de um triângulo esférico;

5ª Etapa: Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros Convexos utilizando Geometria Esférica apresentada por A.M Legendre.

## Capítulo 3

# Teorema de Euler para poliedros convexos utilizando Geometria Esférica

Para futura demonstração do teorema principal do trabalho é de fundamental importância o seguinte resultado

**Teorema 3.0.1.** *(Teorema de A. Girard) Se  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_{\Delta ABC}}{r^2}$$

onde  $A_{\Delta ABC}$  é a área do triângulo esférico e  $r$  é o raio da esfera.

*Demonstração.* Observando o triângulo  $ABC$  na esfera de raio  $r$ . Prolongando seus lados de modo a construir três grandes fusos duplos de abertura  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , ângulos estes que são também os três ângulos internos do triângulo  $ABC$ .

Temos que os três fusos duplos, determinados pelos círculos geodésicos que contêm o triângulo  $ABC$ , cujos vértices  $A', B', C'$  são diametralmente opostos aos vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente. Observe, que as únicas regiões comuns a qualquer dos fusos duplos são a região do triângulo sombreada e sua réplica diametralmente oposta (do outro lado da esfera). Tendo o triângulo  $ABC$  contido em um hemisfério da superfície esférica de modo que seu simétrico  $A'B'C'$  estará contido no hemisfério complementar.

Se somarmos as áreas dos três fusos duplos, de aberturas  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  Obteremos:

$$S_\alpha + S_\beta + S_\gamma = \text{área da esfera} + 2 \cdot (A_{\Delta ABC} + 2 \cdot A_{\Delta A'B'C'})$$

Sendo área  $A_{\Delta ABC}$  e área  $A_{\Delta A'B'C'}$  as áreas dos dois triângulos.

Note que na soma das áreas definidas pelos fusos duplos  $S_\alpha + S_\beta + S_\gamma =$ , a área de cada triângulo é contada três vezes (ou seja, duas vezes a mais), visto que cada um dos triângulos é também parte de cada um dos três fusos duplos.

Assim, como as áreas  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  são iguais, temos:

$$\begin{aligned} 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 &= 4\pi r^2 + 4 \cdot (A_{\Delta ABC}) \\ \alpha r^2 + \beta r^2 + \gamma r^2 &= \pi r^2 + (A_{\Delta ABC}) \\ A_{\Delta ABC} &= (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot r^2 \\ \frac{A_{\Delta ABC}}{r^2} &= \alpha + \beta + \gamma - \pi \\ \alpha + \beta + \gamma &= \pi + \frac{A_{\Delta ABC}}{r^2} \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.0.2. (Euler)** *Seja  $P$  um poliedro convexo com  $A$  arestas,  $V$  vértices e  $F$  faces. Então vale a igualdade*

$$V - A + F = 2.$$

*Demonstração.* Seja  $P$  um poliedro convexo, com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces.

Para facilitar o desenvolvimento do teorema, vamos supor, sem perda de generalidade, que as faces do poliedro  $P$  são triângulos, o que não torna um caso particular visto que para qualquer outro polígono seria o suficiente traçarmos as suas diagonais, obtendo portanto, faces triangulares sem alteração na relação

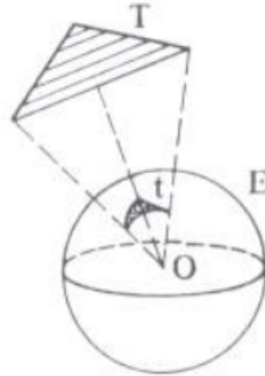
$$V - A + F = 2 \tag{3.1}$$

visto que enquanto cada um dos números  $A$  de arestas e  $F$  de faces aumenta de uma unidade esses "aumentar" são cancelados ( $V - A + F$ .)

Tomemos uma esfera  $E$ , de raio  $r$  e centro  $O$  que é um ponto situado no interior do polígono  $P$  Fazendo a projeção radial do poliedro  $P$  sobre a esfera  $E$ , obtemos uma decomposição da esfera em triângulos esféricos semelhantes as faces do poliedro  $P$ , de tal forma que a esfera  $E$  fique revestida por  $F$  triângulos esféricos, com um total de

A lados e  $V$  vértices.

Figura 3.1: Decomposição da esfera em triângulos



Fonte: <https://rpm.org.br/cdrpm/5/6.htm>

Podemos aplicar a relação de Girard para cada triângulo  $t$  individualmente

$$S_t = \alpha_t + \beta_t + \gamma_t = \pi + \frac{A_t}{r^2} \quad (3.2)$$

onde  $S_t$  é a soma dos ângulos internos e  $A_t$  é a área do triângulo esférico  $t$ .

Portanto, ao todo teremos  $F$  igualdades para todos os triângulos esféricos. Somando todos, temos:

$$\sum S_t = \pi \cdot F + \frac{\sum A_t}{r^2} \quad (3.3)$$

onde

$$\sum S_t = 2\pi \cdot V \quad (3.4)$$

pois a soma dos ângulos em torno de cada vértice é igual a  $2\pi$ .

Sendo,

$$\sum A_t = 4\pi r^2 \quad (3.5)$$

que é a área total da superfície esférica  $E$ .

Substituindo [3.4](#) e [3.5](#) na equação [3.3](#), temos:

$$\begin{aligned} \sum S_t &= \pi \cdot F + \frac{\sum A_t}{r^2} \\ 2\pi \cdot V &= \pi \cdot F + \frac{4\pi r^2}{r^2} \end{aligned}$$



simplificando, obtemos

$$2 \cdot V = F + 4 \quad (3.6)$$

Como todo triângulo tem três lados e cada aresta é lado de dois triângulos;

$$3 \cdot F = 2 \cdot A$$

$$F + 2 \cdot F = 3 \cdot F$$

$$F + 2 \cdot F = 2 \cdot A$$

ou seja,

$$F = 2 \cdot A - 2 \cdot F \quad (3.7)$$

Substituindo a equação [3.7](#) em [3.6](#), temos:

$$2 \cdot V = F + 4$$

$$2 \cdot V = 2 \cdot A - 2 \cdot F + 4$$

$$\frac{2 \cdot V}{2} = \frac{2 \cdot A}{2} - \frac{2 \cdot F}{2} + \frac{4}{2}$$

$$V = A - F + 2$$

$$V - A + F = 2$$

e, portanto, segue o resultado.

□

## Considerações Finais

A compreensão das aplicações do Teorema de Euler para poliedros convexos na geometria esférica pode despertar interesse em estudos nesse campo de pesquisa, que possui implicações cruciais em diversas áreas. Esse teorema, relacionando vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, desempenha um papel significativo na análise da geometria tridimensional.

Ao longo do tempo, houve uma evolução notável no estudo do Teorema de Euler aplicado a poliedros convexos, inicialmente utilizado para resolver problemas geométricos, e hoje essencial para diversas aplicações práticas em áreas como topologia, cartografia e modelagem 3D computacional. Exemplos incluem a análise da estrutura de poliedros geodésicos, a representação de territórios em mapas esféricos e a modelagem de objetos tridimensionais em jogos e simulações.

As aplicações do Teorema de Euler para poliedros convexos na geometria esférica são vastas e apresentam implicações significativas em diversas áreas do conhecimento. A compreensão profunda desse teorema permite não apenas uma análise estrutural mais detalhada dos poliedros, mas também abre portas para aplicações práticas em campos como topologia, cartografia, modelagem 3D computacional e geometria diferencial.

Ao longo da pesquisa, exploramos a importância do Teorema de Euler na compreensão da relação entre vértices, arestas e faces de poliedros convexos em uma configuração esférica. Essa abordagem revelou-se essencial para a análise de estruturas tridimensionais complexas, como os poliedros geodésicos, frequentemente utilizados em arquitetura e engenharia. Crucial não apenas para o avanço do conhecimento matemático, mas também para perceber que, por meio dele, é possível abordar questões práticas em diferentes campos. Sua aplicabilidade substancial contribui para a análise de estruturas tridimensionais e para a resolução de problemas complexos em geometria esférica.

À medida que avançamos nos estudos desse campo, esperamos conquistar mais progressos e descobertas, beneficiando tanto a comunidade científica quanto a sociedade em geral.

O objetivo principal desta pesquisa foi apresentar a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos na geometria esférica. Para extensão desse trabalho,

sugere-se:

- Explorar outras implicações do Teorema de Euler em contextos específicos da geometria esférica.
- Investigar a relação entre poliedros convexos e superfícies esféricas em aplicações práticas, como mapeamento de territórios.
- Utilizar ferramentas computacionais para análises mais detalhadas e simulações práticas envolvendo poliedros convexos na geometria esférica.

# Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C. ***História da matemática***, 3 ed. Blucher, São Paulo, 2012.
- [2] ET AL LIMA, E. ***A Matemática do Ensino Médio***, 5 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2004.
- [3] GERHARDT, T. ***Métodos da pesquisa***. Editora da UFRGS, Porto Alegre, 2009.
- [4] IEZZI, G. ***Fundamentos de matemática elementar: Geometria espacial***, 7 ed. Atual, São Paulo, 2013.
- [5] JUSTINO, G. ***A característica de Euler***. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7471>. Acesso em: 10 de junho de 2023, 2013.
- [6] NASCIMENTO, M. ***Uma demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos via geometria esférica***. Disponível em: [https://www.dm.ufscar.br/eventos/vi\\_htem/artigoscompletos/artigoCompleto\\_PO\\_T1-ZZ-mateus.pdf](https://www.dm.ufscar.br/eventos/vi_htem/artigoscompletos/artigoCompleto_PO_T1-ZZ-mateus.pdf). Acesso em: 18 de junho de 2023, 2013.
- [7] SAMPAIO, J. ***Uma introdução a topologia geométrica: passeios de Euler. Superfícies e o teorema de quatro cores***, 1 ed. EdUFSCar, São Carlos, 2012.
- [8] SEVERINO, A. ***Metodologia do trabalho científico***, 24 ed. Cortez, São Paulo, 2016.