UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FELIPE AUZIER DO AMARAL

ANÁLISE NUMÉRICA: MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS APLICADAS EM PROBLEMAS DE CONTORNO COM IMPLEMENTAÇÃO DAS SOLUÇÕES NO PYTHON

MANAUS - AM
2023

FELIPE AUZIER DO AMARAL

ANÁLISE NUMÉRICA: MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS APLICADAS EM PROBLEMAS DE CONTORNO COM IMPLEMENTAÇÃO DAS SOLUÇÕES NO PYTHON

Projeto de pesquisa para elaboração do Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas.

Orientador(a): Dra. Silvia Cristina Belo e Silva

MANAUS - AM

2023

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todas as pessoas que tornaram possível a conclusão deste trabalho de conclusão de curso. Este projeto não teria sido bem-sucedido sem o apoio e contribuições valiosas de várias pessoas.

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha orientadora Dra. Silvia Cristina Belo e Silva, pela orientação, suporte e conselhos ao longo de todo o processo de elaboração deste trabalho. Sua expertise e dedicação foram fundamentais para o desenvolvimento e aprimoramento deste estudo.

Agradeço também aos professores do curso de Matemática, cujo ensino sólido e inspirador foi essencial para a minha formação acadêmica. Suas aulas instigaram meu interesse pela Matemática e me proporcionaram as ferramentas necessárias para a realização deste trabalho.

Não posso deixar de mencionar minha gratidão à minha família e amigos pelo constante apoio, incentivo e compreensão ao longo desta jornada acadêmica.

Entre eles Guilherme Bentes que sempre me apoiou e ajudou nas horas de dificuldades e minha mãe Ana Auzier com seu amor e encorajamento que foram meu alicerce em momentos de desafio e sem dúvida e a meu pai Antônio Amaral por todos os conselhos e ajuda quando mais preciso.

Por fim, agradeço à UEA por fornecer o ambiente acadêmico propício para o desenvolvimento deste estudo e por todo o suporte necessário para a sua realização.

A todos que de alguma forma contribuíram para este trabalho, meu sincero obrigado. Seu apoio foi fundamental para o sucesso deste projeto.

Resumo

Os métodos numéricos são quase tão antigos quanto a civilização humana, Neste trabalho vamos descrever e utilizar do método das diferenças finitas, aplicados em problemas de contorno.

Utilizando uma aproximação adequada para as derivadas de primeira e segunda ordem, aplicaremos em problemas de contorno de segunda ordem para determinar a solução, assim como evidenciar a eficiência do método, que permite determinar a solução de alguns problemas que não conseguimos encontrar a solução analítica por algum método.

Utilizaremos a ferramenta Phyton para gerar os gráficos continuo e discreto do problema de contorno a fim de fazer uma comparação e analisar os erros de aproximação.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equação Diferencial Ordinária
PVI	Problema De Valor Inicial
PVC	Problema De Valor de Contorno

TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de FELIPE AUZIER DO AMARAL Em 22 de fevereiro de 2024, às 10:20 hrs, na Sala C12 da Escola Superior de Tecnologia da UEA na presença da Banca Avaliadora composta pelos professores: Eduardo Lima de Oliveira, Nadime Mustafa Moraes e Silvia Cristina Belo e Silva o(a) aluno(a) Felipe Auzier do Amaral apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado: " Análise Numérica: Métodos das Diferenças Finitas Aplicadas em Problemas de Contorno com Implementação das soluções no Python". A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 10,0 divulgando o resultado ao aluno e demais presentes.

Manaus, 22 de fevereiro de 2024.

Silva Cristina Belo e Silva.

Presidente da Banca Avaliadora

Silvia Cristina Belo e Silva

Orientador (a)

Nadime Mustafa Moraes

Avaliador 1

Eduardo Lima de Oliveira

Avaliador 2

Felipe Auzier do Amaral

Aluno

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS – SIB/UEA
TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO DIGITAL

1. Tipo de Obra (Livro, Capitulo de Livro, TCC, Artigos de periódicos, vídeos etc):

TCC

2. Identificação do Autor

Nome: Felipe Auzier do Amaral

RG: 29617464 CPF: 022.283.552-40 Email: felipeauzieramaral2015@gmail.com

Celular: (92) 99391-7074

3. Identificação do Documento

Título da obra: ANÁLISE NUMÉRICA: MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS APLICADAS EM PROBLEMAS DE CONTORNO COM IMPLEMENTAÇÃO DAS SOLUÇÕES NO PYTHON

Número de páginas: 47

Palavras-Chave: Análise Numérica, EDO, Python, Diferenças Finitas.

4. Informações de Acesso ao Documento

Este documento é confidencial? *	☐	Sim	☐	Não
Este trabalho ocasionará registro de patente?	☐	Sim	☐	Não
Este trabalho pode ser liberado para reprodução:	x	Total	☐	Parcial

Em caso de reprodução parcial, especifique quais os capítulos:

Na qualidade de titular dos direitos de autor da publicação supracitada, de acordo com a Lei nº 9.610/98, autorizo a Universidade do Estado do Amazonas a disponibilizar gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, conforme permissões assinaladas acima, o documento em meio eletrônico na Rede Mundial de Computadores, no formato digital PDF, para fins de leitura, impressão ou download, a titulo de divulgação cientifica gerada pela Universidade, a partir desta data. Estou ciente que o conteúdo disponibilizado é de inteira responsabilidade.

Felipe A. do Amaral	27/02/2024	Manaus/AM
Assinatura:	**Data**	**Local**

*A restrição poderá ser mantida por até um ano a partir da data de autorização da publicação. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à Coordenação do Curso. Todo resumo estará disponível.

SUMÁRIO

Introdução

A análise numérica, em particular o método de diferenças finitas, representa uma ferramenta essencial na resolução de uma ampla gama de problemas, especialmente na modelagem de fenômenos físicos, químicos e engenharia. Este estudo se concentra na descrição e aplicação desse método, com ênfase em sua utilização na resolução de problemas de contorno, aproveitando os recursos da linguagem de programação Python para implementar soluções e visualizar os resultados das aproximações por meio dos gráficos continuo e discreto.

A necessidade de descrever sistemas ou fenômenos através de modelos matemáticos é uma demanda partilhada em diversas áreas do conhecimento. A modelagem matemática é uma ferramenta poderosa para entender e prever o comportamento de sistemas complexos. Para resolver esses modelos, muitas vezes recorremos a equações diferenciais, cuja solução analítica nem sempre é possível ou prática. Nesse contexto, os métodos numéricos desempenham um papel fundamental, oferecendo uma abordagem computacional para encontrar soluções aproximadas.

Os problemas de contorno, em particular, descrevem situações em que as condições são especificadas não apenas no interior de um domínio, mas também em suas fronteiras.

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$
$$y(a) = \gamma_I$$
$$y(b) = \gamma_F$$

No contexto deste estudo, nos concentramos em problemas de contorno associados a equações diferenciais de segunda ordem. Para resolver tais problemas, é crucial a aplicação de métodos numéricos eficientes, como as diferenças finitas, que permitem discretizar o domínio e encontrar soluções aproximadas.

Ao aplicar o método de diferenças finitas em problemas de contorno, nosso propósito principal é obter uma solução aproximada que se ajuste adequadamente às condições impostas. Para alcançar esse objetivo, é necessário não apenas entender os fundamentos teóricos do método, mas também implementá-lo de forma eficiente em uma linguagem de programação adequada, como o Python. Além disso, é crucial visualizar os resultados por meio de gráficos, o que facilita a interpretação e avaliação da qualidade da solução obtida.

Portanto, este estudo visa não apenas explorar o método de diferenças finitas e sua aplicação em problemas de contorno, mas também demonstrar como essa técnica pode ser efetivamente implementada e visualizada usando Python. Para isso, nosso objetivo geral, foi aplicar o método numérico de diferenças finitas para determinar a solução aproximada de problemas de contorno implementando a solução no Phyton e construindo o gráfico da solução contínua e discreta do problema, que permite verificar a aproximação da solução.

Os nossos objetivos específicos foram:

- Apresentar um problema de contorno, descrevendo seus principais aspectos e suas propriedades;
- Apresentar o método numérico de diferenças finitas;
- Escrever o código para determinar a solução, assim como construir o gráfico da solução do problema contínuo e discreto no Python;

Capitulo 1: REVISÃO DE LITERATURA

1.1 Aspectos Históricos Dos Métodos Numéricos

A análise numérica apresenta a teoria e aplicação de técnicas modernas de aproximação, fornecendo, assim, uma base para estudos aplicados em problemas que envolvem equações diferenciais ordinárias e parciais. Aliados à computação, os métodos numéricos permitem determinar a solução destas equações.

Após a criação do computador fortaleceu-se os interesses por técnicas numéricas e algorítmicas e entre elas a analise numérica:

> A análise numérica é a disciplina da matemática que se ocupa da elaboração e estudo de métodos que permitem obter, de forma efetiva, soluções numéricas para problemas matemáticos, quando, por uma qualquer razão, não podemos ou não desejamos usar métodos analíticos. (ARAÚJO, 2014, p. 1).

Entre os nomes mais relevantes na área de algoritmos e lógica de programação se encontra John Von Neumann, Norbert Wiener e Alan Turing. Aliado ao aumento contínuo da capacidade de computação disponível, o desenvolvimento de métodos numéricos tornou a simulação computacional de problemas matemáticos uma prática usual nas mais diversas áreas científicas e tecnológicas. As simulações numéricas são constituídas de um arranjo de vários esquemas numéricos dedicados a resolver problemas específicos como, por exemplo: resolver equações algébricas, resolver sistemas de equações lineares, interpolar e ajustar pontos, calcular derivadas e integrais, resolver equações diferenciais ordinárias, dentre outras (BOYER,2012).

Os algoritmos numéricos são quase tão antigos quanto a civilização humana. Vinte séculos os babilônicos já possuíam tabelas de quadrados de todos os números inteiros entre 1 e 60. Em contrapartida os egípcios, já usavam frações, e inventaram o chamado método da falsa posição para aproximar as raízes de uma equação. Esse método encontra-se descrito no papiro de Rhind, cerca de 1650 anos antes da era cristã.

Na Grécia antiga, alguns matemáticos deram contribuições para o impulso da análise numérica. Podemos citar Arquimedes de Siracusa (278-212, a.C.) que desenvolveu o chamado método da exaustão para calcular comprimentos, áreas e volumes de figuras geométricas. Este método, quando usado como método para calcular aproximações, é bem próximo do que hoje se faz em analise numérica (BOYER, 1996).

Importante destacar, que o surgimento do cálculo e a criação dos logaritmos, no século XVII, também representaram um grande impulso ao desenvolvimento de procedimentos numéricos.

Newton, criou vários métodos numéricos para a resolução de problemas, métodos esses que possuem, hoje, o seu nome. Tal como Newton, podemos destacar entre os séculos XVIII e XIX, Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Carl Friedrich Gauss (1777-1875).

A importância da análise numérica, se deve ao fato de que em alguns casos, encontrar a solução analítica é um trabalho árduo ou mesmo inatingível, mesmo sabido a existência de solução. Nestes casos, aplicando-se algum método numérico apropriado, é possível determinar esta solução de forma bem aproximada. No entanto, as técnicas utilizadas normalmente não envolvem exatidão, sendo assim necessário calcular o erro envolvido na aproximação que será discutido na seção 1.2.

1.2 Introdução ao Método de Diferenças Finitas e Problemas de Contorno

Leonhard Euler (1707 - 1783) foi o primeiro matemático a apresentar o uso do método de diferenças finitas para encontrar aproximações de soluções de equações diferenciais.

Conforme Burden (1978), o método das diferenças finitas, é um método de análise numérica que substitui cada uma das derivadas na equação diferencial por uma aproximação diferença adequada. Trata-se de um método no qual discretizamos a equação dada. O tamanho do passo h tomado na discretização, são escolhidos para manter uma ordem especificada de erro de truncamento. Contudo, não pode ser escolhido muito pequeno por causa da instabilidade das aproximações das derivadas.

Discretizar, significa que transformamos uma determinada função contínua em uma representação discreta (pontos), de modo a determinar uma solução aproximada (CUMINATO & MENEGUETE, 2013).

Ao trabalharmos com métodos numéricos na maior parte das vezes, recaímos em sistemas de equações, sendo indispensável recordar a resolução de sistemas lineares.

As equações diferenciais de ordem maior que 1, podem gerar problemas de valor inicial (PVI) ou problemas de valor de contorno (PVC) dependendo da forma como as condições conhecidas são especificadas.

Por exemplo, considere a equação diferencial ordinária:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (8)$$

Para a equação (8) podem ser analisados dois casos:

<u>1º caso</u>: Onde as condições iniciais conhecidas são especificadas da forma: $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$ originando desta forma um problema de valor inicial, mais conhecido como PVI.

Ora, para a resolução numérica de PVI's, pode-se partir da condição inicial e ir avançando até um tempo final arbitrário.

<u>2º caso</u>: Onde os problemas envolvem condições conhecidas em pontos diferentes, sendo estas condições chamadas de condições de contorno, podendo ser expressas, por exemplo, como: $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$.

De forma geral, os PVC's envolvem uma coordenada espacial como variável independente. Assim, a resolução de um PVC's consiste em buscar uma solução que satisfaz a equação diferencial no intervalo $a < x < b$ juntamente com as condições de contorno especificadas. Isto implica que existem duas condições, em pontos diferentes do domínio de solução, que devem ser simultaneamente satisfeitas. Por isso, métodos de marcha, como os de Runge-Kutta, não podem ser empregados neste caso.

Veremos na seção 1.3, o método de diferenças finitas.

1.3 Aproximação por Diferenças Finitas[1]

O método de diferenças finitas aplicado a equações diferenciais é um método no qual discretizamos a equação. Discretizar, significa que transformamos uma determinada função contínua em uma representação discreta (pontos).

Considere por exemplo, a função $f(x) = x$ definida em um intervalo entre 0 e 1. Esta função pode ser representada de forma discreta como, por exemplo, $f(x) = [0, 0.2, 0.4, 0{,}6, 0{,}8, 1]$, assumindo um espaçamento entre os pontos de 0.2, ou seja, esta representação está relacionada como um domínio discreto da forma $x = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]$. As soluções obtidas com a aplicação do método de diferenças finitas sempre serão discretas. Caso for necessário obter os valores para algum valor de x que não corresponda exatamente aos pontos do domínio, pode-se interpolar os valores.

A primeira etapa da aplicação do método de diferenças finitas consiste exatamente em definir o domínio discreto onde a solução será buscada.

Considere uma barra fina, com raio menor que o comprimento. Pode-se assumir que a equação que descreve a variação na temperatura ao longo de x pode ser expressa como: $\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$ onde h' é um coeficiente de troca térmica e T_a é a temperatura ambiente.

As condições de contorno, corresponde a temperatura fixas nas extremidades, em $x = 0$ e $x = L$, de modo que: $T(0) = T_1$, $T(L) = T_2$.

Temos que a região onde se deseja obter a distribuição de temperatura é no intervalo de $x = 0$ até $x = L$. Este intervalo corresponde ao domínio de solução da equação diferencial. No entanto, ele está em uma forma contínua e não discreta. Para discretizar o domínio, deve-se dividi-lo em um determinado número de pontos. Por exemplo, considere que $L = 1$ e que se deseja dividir o domínio em pontos com espaçamento $h = 0.1$, ou seja, deseja-se dividir o domínio em 10 elementos de igual tamanho. Quanto mais elementos forem utilizados, maior será a precisão do método, no entanto, o gasto computacional também irá aumentar.

Como pode ser visto, este conjunto contém 11 pontos. De maneira geral, o número de pontos sempre será igual ao número de elementos em que o domínio é

[1] BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. (2008)

dividido mais um. Este vetor pode ser representado de uma forma mais simples da seguinte forma:

$$x[i] = ih, \text{ onde } i = 0, 1, 2, \ldots 10 \quad (9)$$

ou de forma equivalente:

$$x[i] = (i - 1)h, \text{ onde } i = 1, 2, 3, \ldots 11 \quad (10)$$

É importante observar que em PVI's, não é necessário inicialmente definir o domínio de solução, pois pode-se continuar avançando por quantos passos forem necessários, partindo de um valor inicial. No entanto, para o caso de PVC's, o domínio de solução é fechado e deve ser considerado como um todo.

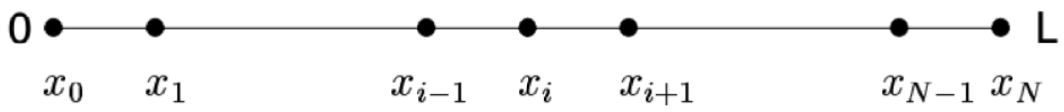
A estratégia do método de diferenças fintas consiste em buscar equações algébricas que aproximem a solução em cada ponto i. Para isso, as derivadas são aproximadas como relações algébricas envolvendo a solução em diferentes valores de i. Esta aproximação pode ser realizada de diferentes formas, dependendo da precisão desejada e da natureza do problema e das condições de contorno. Porém, a origem destas aproximações sempre é uma aproximação em série de Taylor em torno de cada ponto i, como será discutido na seção 1.3.1.

1.3.1 Aproximação de Primeira Derivada

Para apresentar o processo de discretização da derivada de uma função contínua $y(x)$ em um intervalo $0 \leq x \leq L$, será considerado um domínio discreto como o apresentado na figura a seguir, onde o domínio físico contínuo (região entre 0 e L) é dividido em $N + 1$ pontos, lembrando-se novamente que o objetivo do método de diferenças finitas é obter aproximações para o valor da função $y(x)$ em cada um destes $N + 1$ pontos. Esta representação discreta do domínio de solução é chamada de **malha numérica.**

A expansão em série de Taylor pode ser utilizada para avaliar o valor de uma função em um dado ponto com base no valor conhecido em outro ponto.

Figura 1: Malha Numérica.



Fonte: Do autor (2023).

Dependendo da forma como a aproximação é realizada, obtém-se diferentes formulações para o método de diferenças finitas, como será apresentado na seção 1.3.2.

1.3.2 Aproximação para Frente (Foward)

Vamos considerar, que desejemos aproximar o valor em x_{i+1} com base no valor em x_i, isto é, deseja-se aproximar $y(x_{i+1})$ = y_{i+1} com base em $y(x_i)$ = y.

Neste caso, a expansão em série de Taylor pode ser expressa como:

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{dy}{dx}|_{x=x_1} + \frac{1}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_1} + \\ + \frac{1}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3\frac{d^3y}{dx^3}|_{x=x_1} + \cdots \quad (11)$$

Considerando $(x_{i+1} - x_i)$ relativamente pequeno, os termos de alta ordem proporcionais a $(x_{i+1} - x_i)^2$, $(x_{i+1} - x_i)^3$, ... podem ser desprezados. Sendo assim, a derivada primeira da função $y(x)$ no ponto x_i pode ser aproximada como:

$$\frac{dy}{dx}|_{x=x_1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)} \quad (12)$$

Definindo $h = (x_{i+1} - x_i)$, podemos ainda escrever:

$$\frac{dy}{dx}|_{x=x_1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\mathrm{h}} \quad (13)$$

Esta expressão é conhecida como aproximação por diferenças finitas para frente (ou método de diferenças finitas para frente), pois utiliza o valor da função em um ponto à frente x_{i+1} para estimar o valor da derivada em um ponto anterior x_i. Fazendo $\mathrm{h} \to 0$ obtemos a definição da derivada em um ponto, de onde podemos afirmar que está formulação é consistente. Este método é equivalente ao método de

Euler explícito para a resolução de PVI's. Em ambos os casos, ocorre uma linearização da função em torno de um ponto.

Na aproximação da derivada, foram desprezados os termos O$(x_{i+1} - x_i)^2$, assim, o **erro de truncamento** local do método de diferenças para frente é da ordem de O$(h)^2$onde o símbolo O representa o operador ordem de grandeza.

Sendo a aproximação aplicada em N pontos ao longo do domínio, este erro se acumula N vezes. Pode-se mostrar que quando aplicado para avaliar N pontos, o erro associado será da ordem de O$(x_{i+1} - x_i) = O(h)$, o que indica que a aproximação por diferenças para frente é um método de primeira ordem.

A ordem de um método numérico de resolução por discretização representa a relação como o erro de truncamento global varia em função do espaçamento h utilizado. Podemos afirmar, que quanto maior a ordem, mais rapidamente o erro diminui conforme o passo é reduzido. A partir de um determinado ponto as soluções obtidas serão muito parecidas, sendo que uma maior redução em h a partir deste ponto não irá reduzir o erro global de forma significativa e irá aumentar o erro de arredondamento.

1.3.3 Aproximação para trás (Backward)

Este tipo de aproximação é bem semelhante ao anterior, no entanto no lugar de x_{i+1} substituímos por x_{i-1}. Neste caso, a expansão para obter a função x_{i-1}, será:

$$y_{i-1} = y_i + (x_{i-1} - x_i)\frac{dy}{dx}|_{x=x_1} + \frac{1}{2!}(x_{i-1} - x_i)^2\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_1} + \frac{1}{3!}(x_{i-1} - x_i)^3\frac{d^3y}{dx^3}|_{x=x_1} + \cdots \quad (14)$$

Considerando o espaçamento $h = (x_i - x_{i-1}) = -(x_{i-1} - x_i)$, de (14), obtemos:

$$y_{i-1} = y_i - (h)\frac{dy}{dx}|_{x=x_1} + \frac{1}{2!}(h)^2\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_1} - \frac{1}{3!}(h)^3\frac{d^3y}{dx^3}|_{x=x_1} + \cdots$$

(15)

De modo análogo ao caso foward, desprezando os termos de ordem maior ou igual 2, obtemos:

$$\frac{dy}{dx}|_{x=x_1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\mathrm{h}} \quad (16)$$

Esta aproximação é conhecida como aproximação por diferenças finitas para trás (ou método de diferenças finitas para trás), e também representa uma aproximação de primeira ordem para a derivada em um dado ponto x_i .

A utilização destes dois métodos, métodos para trás e para frente, são a princípio equivalentes. A única restrição ocorre nas extremidades do domínio, pois no ponto x_0 não pode ser aplicado o método para trás pois não existe um ponto anterior a este, e de forma semelhante, no ponto x_N a formulação para frente não pode ser utilizada, pois de maneira equivalente não existe nenhum ponto após este para ser utilizado de base.

1.3.4 Aproximação Central

Quando utilizamos métodos de primeira ordem à discretização de todos os pontos do domínio, de forma geral, estes métodos não costumam apresentar bons resultados, especialmente nos casos envolvendo gradientes aproximadamente simétricos em relação a direção x, como por exemplo problemas envolvendo condução de calor ou difusão de massa. Nestes casos, é mais prudente utilizar uma aproximação de segunda ordem, que pode ser obtida fazendo a expansão para y_{i+1} menos a expansão para y_{i-1}.

Obtemos então:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2h \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_1} + \frac{2}{3!}(h)^3 \frac{d^3y}{dx}\Big|_{x=x_1} + \cdots \quad (17)$$

Desprezando agora os termos da ordem de O$(h)^3$, pode-se obter a seguinte expressão para uma aproximação da derivada primeira em x_i :

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_1} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\mathrm{h}} \quad (18)$$

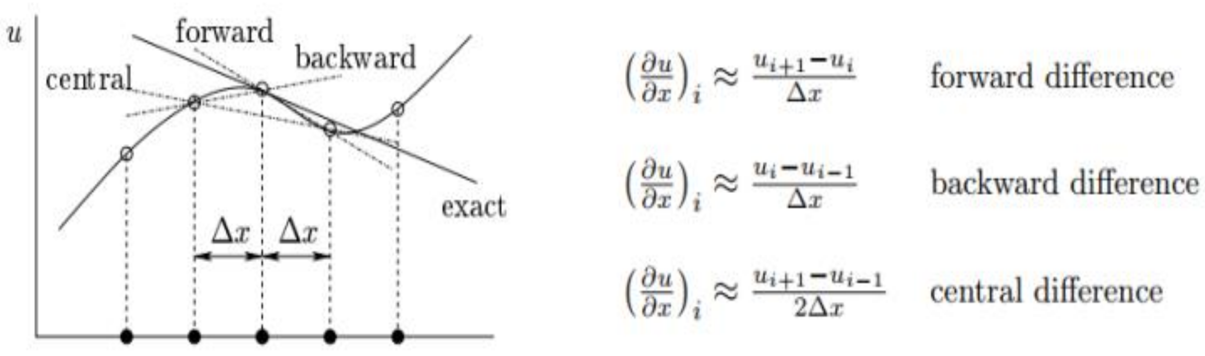
Esta expressão é conhecida como método de diferenças finitas central. O erro de truncamento local é da ordem de O$(h)^3$, de modo que o erro global será da ordem de O$(h)^2$. Assim, esta aproximação é de segunda ordem.

Existem aproximações de ordem superior, porém a aproximação central é a mais empregada, sendo adequada à maioria dos casos. Esta aproximação não pode ser aplicada nos pontos extremos do sistema.

Sendo assim, a melhor estratégia para a discretização da equação é utilizar o método central para os pontos internos, o método para frente no ponto x_0 e o método para trás no ponto x_N .

Pode-se fazer uma comparação geométrica dos três esquemas de discretização conforme a Figura 02.

Figura 2: Comparação entre os três modelos de aproximação.



Autor: Wilhelm,2017

1.3.5 Aproximação de Derivada Segunda

O método de diferenças finitas também pode aplicado à discretização de derivadas de maior ordem. Considerando a definição da derivada em um ponto, obtemos as aproximações para a derivada segunda. Da mesma forma que a derivada primeira pode ser aproximada em termos da variação da função em dois pontos, a derivada segunda pode ser aproximada em termos da variação na derivada primeira em dois pontos. Utilizando a aproximação para frente temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}|x = x_i = \frac{\frac{dy}{dx}\big|x=x_{i+1} - \frac{dy}{dx}\big|x=x_i}{x_{i+1}-x_i} \qquad (20)$$

onde a derivada avaliada no ponto x_{i+1}. Utilizando novamente um esquema para frente, é obtida de forma equivalente a derivada no ponto x_i como:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_{i+1}} = \frac{y_{i+2}- y_{i+1}}{(x_{i+2}- x_{i+1})} \qquad (21)$$

Considerando que os pontos estejam igualmente espaçados, juntando as expressões para a derivada em x_{i+1} e a expressão para a derivada em x_i , obtemos a seguinte expressão para a derivada segunda em x_i :

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_i} = \frac{y_{i+2} - 2\,y_{i+1} + y_i}{h^2} \quad (22)$$

A equação acima representa o esquema para frente aplicado à derivada segunda. Como ele se baseia em esquemas de primeira ordem, também é uma aproximação de primeira ordem. Fazendo um procedimento semelhante utilizando o esquema para trás, obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_i} = \frac{y_{i-2} - 2\,y_{i-1} + y_i}{(h)^2} \quad (23)$$

sendo este o esquema para trás aplicado para a derivada segunda, também um método de primeira ordem.

Utilizando o esquema central, obtém-se a seguinte aproximação:

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i+1}}{(h)^2} \quad (24)$$

sendo está uma aproximação de segunda ordem.

1.4 Phyton e sua Contribuição na Matemática

Lançado em 1991, o Python[2] foi criado por Guido van Rossum no Centrum Wiskunde & Informática (CWI), em Amsterdã. Os primeiros objetivos da linguagem eram trazer mais eficiência à programação e, assim, possibilitar o acesso a recursos do sistema operacional Amoeba, que atualmente está inativo.

Especialmente por ser open source, ou seja, foi projetado para ser acessado abertamente pelo público, o Python recebeu diversos incrementos e melhorias desde que foi lançado.

A linguagem Python é uma das principais e mais populares linguagens de programação em todo o mundo. É considerada de alto nível, pois está mais próxima à linguagem humana do que a de uma máquina. Por este motivo, ganhou popularidade entre os profissionais da área por ter uma sintaxe considerada relativamente simples, principalmente quando comparada às demais.

As principais características do Python são sua simplicidade, legibilidade, ampla biblioteca padrão, orientação a objetos, facilidade de integração e versatilidade.

[2] Link: https://www.online-python.com/

Abaixo, serão citados alguns exemplos de uso da linguagem Python. São elas:

- Desenvolvimento Web: a linguagem pode ser utilizada na construção de simples páginas da internet até a robustos softwares;
- Desenvolvimento de jogos: o Python é uma das linguagens favoritas dos desenvolvedores de games por mostrar resultados sofisticados com simplicidade;
- Big Data: a forte capacidade de análise, processamento e exibição de dados do Python, além da sua facilidade de uso por diversos profissionais, o tornam um grande aliado ao Big Data;
- Computação gráfica: devido as suas habilidades de criação gráfica, diversos softwares desta área empregam o Python como linguagem – como, por exemplo, PyGame e Blender, dois programas para gráficos 3D;
- Inteligência Artificial: os algoritmos do Google são uma das aplicações de IA mais famosas que utilizam o Python. Para uso em Inteligência Artificial, a linguagem possui diversas bibliotecas voltadas para o segmento – como Keras, NumPy e NLTK;
- Ciência de Dados: o Python é popular entre cientistas por ser simples de usar e pela sua familiaridade com dados; além disso, a sua ferramenta Jupyter-Notebook agiliza e facilita o fluxo de trabalho desta área.

Esta linguagem adequa-se muito bem à resolução de problemas em várias áreas da Matemática e potencializa o desenvolvimento do raciocínio lógico e estruturado.

Neste trabalho, utilizamos a linguagem Python, para escrever os códigos que determinam as soluções numéricas dos problemas das EDO’s de contorno, assim como construir os gráficos das soluções contínuas e discretas.

Capitulo 2. METODOLOGIA DA PESQUISA

2.1 Abordagem, Estratégias de Investigação e os Procedimentos Técnicos

A abordagem metodológica da pesquisa é quantitativa pois estará voltada ao desenvolvimento de teoremas e modelos. Gerhardt (2009, p.35) nos fala que uma “pesquisa quantitativa está centrada em objetividade e na relação das variáveis de um fenômeno através da linguagem matemática.”

> A pesquisa quantitativa se centra na objetividade, influenciada pelo positivismo, considera que a realidade só pode ser compreendida com base na análise de dados brutos, recolhidos com o auxílio de instrumentos padronizados e neutros. A pesquisa quantitativa recorre à linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, etc.

A estratégia utilizada na pesquisa será a descritiva, tendo como finalidade a descrição dos resultados obtidos de problemas de contorno através de um estudo das suas soluções utilizando o método das diferenças finitas.

Gil (2008, p.28) nos relata que:

> As pesquisas deste tipo têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis. São inúmeros os estudos que podem ser classificados sob este título e uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados.

A pesquisa será bibliográfica e baseada em estudos de autores, como L. Richard, and J. Burden, Douglas Faires (2003), RL Burden, JD Faires, AM Burden – 2016, e entre outros pensadores que elaboraram trabalhos pertinentes ao assunto.

2.2 Etapas da Pesquisa

As etapas da pesquisa serão desenvolvidas a partir das etapas da modelagem matemática. Conforme Bassanezi (1988, p 6)

> O processo de intermediação entre o problema original e o modelo matemático é uma atividade que poderíamos classificar de típica da Matemática Aplicada, exigindo uma avaliação competente da relação entre o que é teoria e aplicação.

O uso da Modelagem Matemática como estratégia pedagógica iniciou-se nas primeiras décadas do século XX, em caráter internacional, quando matemáticos puros e aplicados buscavam ampliar novos meios para o estudo da Matemática. Afirma Bassanezi (2004) que a modelagem surgiu inicialmente na Biomatemática, por volta de 1980, com estudos de modelos de crescimento de processos cancerígenos. Posteriormente foi feita uma experiência com a modelagem, em uma turma regular de Engenharia de Alimentos (disciplina de Cálculo Diferencial e Integral), alcançando satisfatórios resultados. Portanto podemos notar que a partir destes exemplos a modelagem pode e foi utilizada em muitas outras frentes de pesquisa visando melhorar a interpretação de problemas numéricos e analíticos e com base nisso podemos usar nos problemas de contorno.

As fases de um modelo matemático são caracterizadas por Bassanezi (2002) por uma fase da experimentação, no qual é feita a coleta dos dados do fenômeno a ser modelado, a abstração que consiste em determinar a equação do problema, a fase da resolução que passa do aspecto qualitativo da fase de abstração para a obtenção de dados quantitativos do problema, validação que é a determinação da proximidade da solução real com a solução aproximada obtida na resolução do modelo e a fase de modificação que depende dos resultados obtidos com o modelo matemático para aceitação do modelo ou a reformulação de um novo modelo matemático para o problema.

ANÁLISE DE RESULTADOS

Nesta seção, serão apresentados problemas de contorno onde será aplicado o método de diferenças finitas para determinar as soluções aproximadas.

Antes de apresentar os problemas, será apresentado o código de diferenças finitas no Python.

3.1 Código Diferenças Finitas No Python

Tipo de problema a ser resolvido

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \\ y(a) = \gamma_I \\ y(b) = \gamma_F \end{cases}$$

Formulação

Aproximação das derivadas:

$$y'' \cong \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1})}{(\Delta x)^2} \text{ e } y' \cong \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2\Delta x}$$

Considerando o problema acima e utilizando a aproximação das derivadas, podemos chegar em uma matriz A e b do sistema $Ax = b$, que poderá ser usada para determinar a solução do sistema implementando no Python.

Observe que substituindo a aproximação das derivadas no problema de contorno acima, com $j = 1,2,\cdots n$, obtemos um sistema de equações.

De fato:

Para $j = 1$,

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

$$\frac{y(x_2) - 2y(x_1) + y(x_0)}{(h)^2} = p(x_1)\frac{y(x_2) - \ y(x_0)}{2\mathrm{h}} + q(x_1)y_1 \ + r_1(x_1)$$

Multiplicando a equação acima por $(h)^2$ e substituindo o valor de y_0, obtemos:

$$y(x_2) - 2y(x_1) + \gamma_I = \ p(x_1)\frac{y(x_2) - \ \gamma_I}{2}h + q(x_1)y(x_1)(h)^2 \ + r_1(x_1)(h)^2$$

Reorganizando os termos da expressão obtemos:

$$y(x_1)[2 + q(x_1)(h)^2] + y(x_2)\left[-1 + \frac{p(x_1)h}{2}\right] = -r_1(x_1)(h)^2 + p(x_1)\frac{h\gamma_I}{2} + \gamma_I$$

Para $j = 2$:

$$\frac{y(x_3) - 2y(x_2) + y(x_1)}{(h)^2} = p(x_2)\frac{y(x_3) - \ y(x_1)}{2\mathrm{h}} + q(x_2)y_2 \ + r_2(x_2)$$

Multiplicando a equação acima por $(h)^2$ e substituindo o valor de y_1, obtemos:

$$y(x_3) - 2y(x_2) + y(x_1) = \ p(x_2)\frac{y(x_3) - y(x_1)}{2}h + q(x_2)y(x_2)(h)^2 \ + r_2(x_2)(h)^2$$

$$y(x_1)[-1 - \frac{p(x_2)}{2}h] + y(x_2)[2 + q(x_2)(h)^2] + y(x_3)\left[-1 + \frac{p(x_2)}{2}h\right] = -r_2(x_2)(h)^2$$

Para $j = 3$:

$$\frac{y(x_4) - 2y(x_3) + y(x_2)}{(h)^2} = \ p(x_n)\frac{y(x_4) - \ y(x_2)}{2\mathrm{h}} + q(x_3)y_3 + r_3(x_3)$$

Multiplicando por $(h)^2$:

$$y(x_4) - 2y(x_3) + y(x_2) = p(x_2)\frac{[y(x_4) - \ y(x_2)]\mathrm{h}}{2} + [q(x_3)y_3 + r_3(x_3)](h)^2$$

$$y(x_2)[-1 - \frac{p(x_2)}{2}h] + y(x_3)[2 + q(x_2)(h)^2] + y(x_4)\left[-1 + \frac{p(x_2)}{2}h\right] = -r_3(x_3)(h)^2$$

De forma análoga para $j = n - 1$:

$$y(x_{n-2})\left[-1 - \frac{p(x_{n-1})}{2}h\right] + y(x_{n-1})[2 + q(x_{n-1})(h)^2] + y(x_n)\left[-1 + \frac{p(x_n)}{2}h\right]$$

$$= -r_{n-1}(x_{n-1})(h)^2$$

$$y(x_{n-2})\left[-1 - \frac{p(x_{n-1})}{2}h\right] + y(x_{n-1})[2 + q(x_{n-1})(h)^2]$$
$$= -\gamma_F\left[-1 + \frac{p(x_n)}{2}h\right] - r_{n-1}(x_{n-1})(h)^2$$

Portanto o sistema linear $Ay = b$, pode ser escrito da forma:

$$A = \begin{bmatrix} 2+\tilde{q}_1 & -1+\frac{\tilde{p}_1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -1-\frac{\tilde{\rho}_2}{2} & 2+\tilde{q}_2 & -1+\frac{\tilde{p}_2}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1-\frac{\tilde{\rho}_{N-1}}{2} & 2+\frac{\tilde{q}_{N-1}}{2} & -1+\frac{\tilde{p}_{N-1}}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1-\frac{\tilde{\rho}_N}{2} & 2+\tilde{q}_N \end{bmatrix}$$

onde:

$$\tilde{p}_j = (\Delta x)p(x_j), \qquad \tilde{q}_j = (\Delta x)^2 q(x_j), \qquad \tilde{r}_j = (\Delta x)^2 r(x_j)$$

e a matriz b é dada por:

$$b = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{\tilde{p}_1}{2}\right)\gamma_1 - \tilde{r}_1 \\ -\tilde{r}_2 \\ \vdots \\ -\tilde{r}_{N-1} \\ \left(1-\frac{\tilde{p}_N}{2}\right)\gamma_F - \tilde{r}_N \end{bmatrix}$$

o que queremos desejamos encontrar:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}$$

Para exemplificar utilizaremos o problema de contorno:

$$\begin{cases} \mathbf{y'' = \frac{x}{3}y' - y + 6x - 1} \\ \mathbf{y(0) = -1} \\ \mathbf{y(1) = 0} \end{cases}.$$

<u>1º Passo:</u> Importar a **numpy as np.**

Figura 3: Declaração da biblioteca usada.

```
import numpy as np
```

Fonte: Do autor (2023).

<u>2º Passo:</u> Observe que a EDO dada está na forma $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$. O primeiro passo é identificar e definir as funções $p(x), q(x)$ e $r(x)$.

Figura 4: identificar e definir as funções p(x), q(x) e r(x).

```
def p(x):
    return x/3
```

```
def q(x):
    return -1
```

```
def r(x):
    return 6*x - 1
```

Fonte: Do autor (2023).

<u>3º Passo:</u> Criar o método de Diferenças Finitas;

- Crie a função diferença finitas, que está de acordo com as condições de contorno, isto é (x_0, y_0, x_f, y_f, N), onde N é o número de iterações.
- Crie as variáveis iniciais ($delta_x = \frac{x_f - x_0}{N}$), onde N é o número de subintervalos da malha.
- Crie um vetor x utilizando a função **linspace** da **numpay** (não queremos o primeiro e nem o último ponto da malha).
- Crie a dimensão do sistema.
- Crie a matriz A (o número de linhas e colunas é a dimensão do sistema) e a matriz b (é unidimensional).
- Criadas as variáveis, fazemos a montagem da matriz A e b de acordo com as matrizes criadas anteriormente.

- Encontramos a solução, de acordo com o número de pontos tomados na malha.

Figura 5: Código Phyton para método das diferenças finitas.

```
def diferencas_finitas(x0, y0, xf, yf, N):
    ## Variáveis iniciais
    delta_x = (xf - x0)/N
    vetor_x = np.linspace(x0 + delta_x, xf - delta_x, N - 1)
    dim_sist = N - 1
    A = np.zeros((dim_sist, dim_sist))
    b = np.zeros(dim_sist)

    ## Montagem da matriz A
    for i in range(dim_sist):
        x = vetor_x[i]
        for j in range(dim_sist):
            if i == j:
                A[i][j] = 2 + q(x)*pow(delta_x, 2)
            elif i == (j+1):
                A[i][j] = -1 - p(x)*delta_x/2
            elif i == (j-1):
                A[i][j] = -1 + p(x)*delta_x/2
            else:
                A[i][j] = 0

    ## Montagem do vetor b
    for i in range(dim_sist):
        x = vetor_x[i]
        if i == 0:
            b[i] = (1 + p(x)*delta_x/2)*y0 - r(x)*pow(delta_x, 2)
        elif i == (dim_sist - 1):
            b[i] = (1 - p(x)*delta_x/2)*yf - r(x)*pow(delta_x, 2)
        else:
            b[i] = -r(x)*pow(delta_x, 2)

    ## Resolução do sistema linear Ay = b
    y = np.linalg.solve(A, b)
    return y

In [51]: y = diferencas_finitas(0, -1, 1, 0, 4)
         for i in range(len(y)):
             print("y = ", y[i])

y =  -0.9852941176470588
y =  -0.876470588235294
y =  -0.5794117647058824
```

Fonte: Do autor (2023).

Problema 1. Resolva o problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = x \\ y(0) = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

com $\Delta x = h = 0{,}25$, utilizando o método das diferenças finitas.

Solução:

1º Passo: Determinar a quantidade de intervalos que serão utilizados.

Para determinar a quantidade de intervalos, fazemos $n = \frac{b-a}{h}$, onde h será dado no enunciado do problema.

Neste caso: $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0,25} = 4$

2º Passo: Construção de uma tabela, onde são dados o número de interações, x_i e y_i.

I	x_i	y_i
0	0	2
1	0,25	
2	0,5	
3	0,75	
4	1	0

Observe que a tabela acima, já está devidamente montada com os números de iterações e os dados dos problemas de contorno.

3º Passo: Substituir as derivadas, pelas aproximações

$$y'' \cong \frac{y_{i+1} - 2\, y_i + y_{i+1}}{(h)^2} \text{ e } y' \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad \text{(i)}$$

Dada a EDO $y'' + 2y' + y = x$, substituindo as aproximações dada acima obtemos:

$$\frac{y_{i+1} - 2\, y_i + y_{i-1}}{(h)^2} + 2\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = x_i \quad \text{(ii)}$$

Multiplicando a equação (ii) por $(h)^2$, obtemos:

$$y_{i+1}(1+h) + y_i(-2+h^2) + y_{i-1}(1-h) = x_i h^2 \quad \text{(iii)}$$

Substituindo o valor de $h = 0,25$ na equação (iii), obtemos a seguinte equação adaptada ao problema, dada por:

$$1,25\; y_{i+1} - 1,9375 y_i + 0,75 y_{i-1} = 0,0625 x_i \quad \text{(iv)}$$

Observando a tabela que foi construída no 2º passo, podemos concluir que para $i = 1$, a equação pode ser reescrita como:

$$1,25\; y_2 - 1,9375 y_1 + 0,75 y_0 = 0,0625 x_1 \quad \text{(v)}$$

Substituindo os valores $y_0 = 2$ e $x_1 = 0{,}25$, em (v) obtemos:

$$1{,}25\ y_2 - 1{,}9375 y_1 = -1{,}484375 \qquad \text{(vi)}$$

Fazendo $i = 2,$ na equação (iv) e substituindo $y_0 = 2$ e $x_2 = 0{,}5$, obtemos:

$$1{,}25\ y_3 - 1{,}9375 y_2 + 0{,}75 y_1 = 0{,}03125 \qquad \text{(vii)}$$

Analogamente, fazendo $i = 3,$ a equação (iv) e substituindo $y_0 = 2$ e $x_3 = 0{,}75$:

$$1{,}9375\ y_3 - 1{,}75 y_2 = 0{,}046875 \qquad \text{(viii)}$$

As equações (vi), (vii) e (viii) obtidas formam um sistema

$$\begin{cases} -1{,}9375 y_1 + 1{,}25\ y_2 = -1{,}484375 \\ 0{,}75 y_1 - 1{,}9375 y_2 + 1{,}25\ y_3 = 0{,}03125 \\ 1{,}75 y_2 - \ 1{,}9375\ y_3 = -0{,}046875 \end{cases}$$

possível e determinado. Aplicando algum método de solução de sistemas, obtemos:

$$y_1 = 1{,}10749$$

$$y_2 = 0{,}52911$$

$$y_3 = 0{,}18062$$

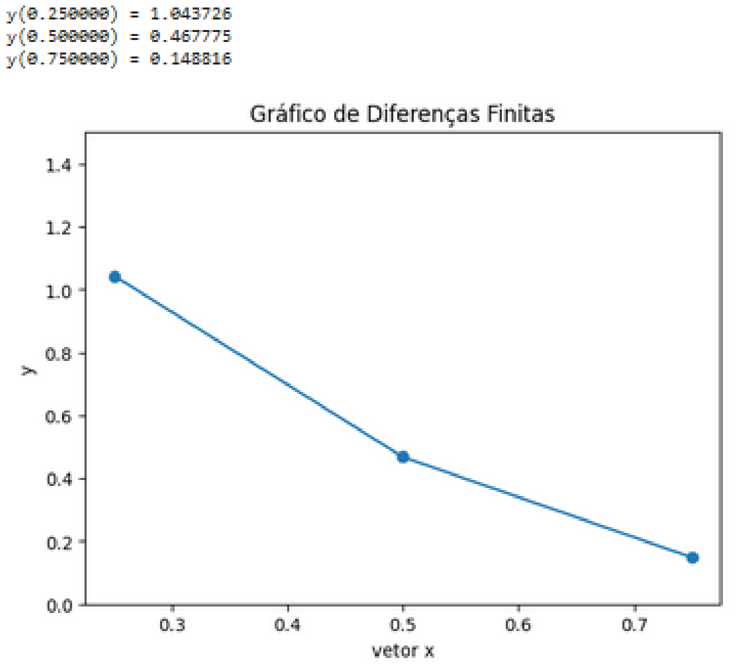
A seguir segue o código no Python, que permite determinar a solução e o esboço gráfico da solução contínua e discreta.

Figura 6: Aplicação código Phyton no problema 1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def p(x):
  return -2

def q(x):
  return -1

def r(x):
  return 1

def diferencas_finitas(x0, y0, xf, yf, N):
  ## Variáveis inicias
  delta_x = (xf - x0)/N
  vetor_x = np.linspace(x0 + delta_x, xf - delta_x, N -1)
  dim_sist = N - 1
  A = np.zeros((dim_sist, dim_sist))
  b = np.zeros(dim_sist)

  ## Montagem da matriz A
  for i in range(dim_sist):
    x = vetor_x[i]
    for j in range(dim_sist):
      if i == j:
        A[i][j] = 2 + q(x)*pow(delta_x, 2)
      elif i == (j+1):
        A[i][j] = -1 - p(x)*delta_x/2
      elif i == (j-1):
        A[i][j] = -1 + p(x)*delta_x/2
      else:
        A[i][j] = 0

  ## Montagem do vetor b
  for i in range(dim_sist):
    x = vetor_x[i]
    if i == 0:
      b[i] = (1 + p(x)*delta_x/2)*y0 - r(x)*pow(delta_x, 2)
    elif i == (dim_sist - 1):
      b[i] = (1 - p(x)*delta_x/2)*yf - r(x)*pow(delta_x, 2)
    else:
      b[i] = -r(x)*pow(delta_x, 2)

  ## Resolução do sistema linear Ay = b
  y = np.linalg.solve(A, b)
  return y

def vetor_x(x0, xf, N):
  delta_x = (xf - x0)/N
  return np.linspace(x0 + delta_x, xf - delta_x, N -1)


vetor_x = vetor_x(0, 1, 4)
y = diferencas_finitas(0, 2, 1, 0, 4)
for i in range(len(y)):
  print("y(%f) = %f" % (vetor_x[i], y[i]))

print()
plt.plot(vetor_x, y, marker = "o")
plt.title("Gráfico de Diferenças Finitas")
plt.xlabel("vetor x")
plt.ylabel("y")
plt.ylim(0, 1.5)
plt.show()
```

Fonte: Do autor (2023).

Figura 7: Gráfico do problema 1.



Fonte: Do autor (2023).

Problema 2. Resolva o problema de contorno

$$\begin{cases} y'' = 3xy' - y + x \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

utilizando o método das diferenças finitas, para $h = 0{,}25$.

Solução:

Substituindo $y'' \cong \frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{(h)^2}$ e $y' \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ na EDO dada, obtemos:

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{h^2} = 3x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - y_i + x_i \qquad \text{(i)}$$

Multiplicando a equação por h^2 e reorganizando os termos, obtemos:

$$y_{i+1}\left(1 - \frac{3}{2}x_i h\right) + y_i(-2 + h^2) + y_{i-1}\left(1 + \frac{3}{2}x_i h\right) = x_i\,h^2 \qquad \text{(ii)}$$

Substituindo o valor de $h = 0{,}25$ em (ii), obtemos:

$$(1 - 0{,}375x_i)y_{i+1} - 1{,}9375y_i + (1 + 0{,}375x_i)y_{i-1} = 0{,}0625x_i$$

Montando a tabela de acordo com o valor de h e dos dados iniciais, temos:

i	x_i	y_i
0	0	0
1	0,25	
2	0,5	
3	0,75	
4	1	0

Para $i = 1$:

$$(1 - 0{,}375x_1)y_2 - 1{,}9375y_1 + (1 + 0{,}375x_1)y_0 = 0{,}0625x_1$$

Como $x_1 = 0{,}25$ e $y_0 = 0$:

$$0{,}90625y_2 - 1{,}9375y_1 = 0{,}015625 \qquad \text{(iii)}$$

Para $i = 2$:

$$(1 - 0{,}375x_2)y_3 - 1{,}9375y_2 + (1 + 0{,}375x_2)y_1 = 0{,}0625x_2$$

Como $x_2 = 0{,}5$:

$$0{,}80125y_3 - 1{,}9375y_2 + 1{,}1875y_1 = 0{,}0312 \qquad \text{(iv)}$$

De forma análoga, para $i = 3$, sendo $x_3 = 0{,}75$, obtemos a expressão:

$$-1{,}9375y_3 + 1{,}28125y_2 = 0{,}046875 \qquad \text{(v)}$$

O sistema

$$\begin{cases} 0{,}90625y_2 - 1{,}9375y_1 = 0{,}015625 \\ 0{,}80125y_3 - 1{,}9375y_2 + 1{,}1875y_1 = 0{,}0312 \\ -1{,}9375y_3 + 1{,}28125y_2 = 0{,}046875 \end{cases} \quad :$$

possui solução:

$y_1 = -0{,}0715$

$y_2 = -0{,}0715$

$y_3 = -0{,}04155$

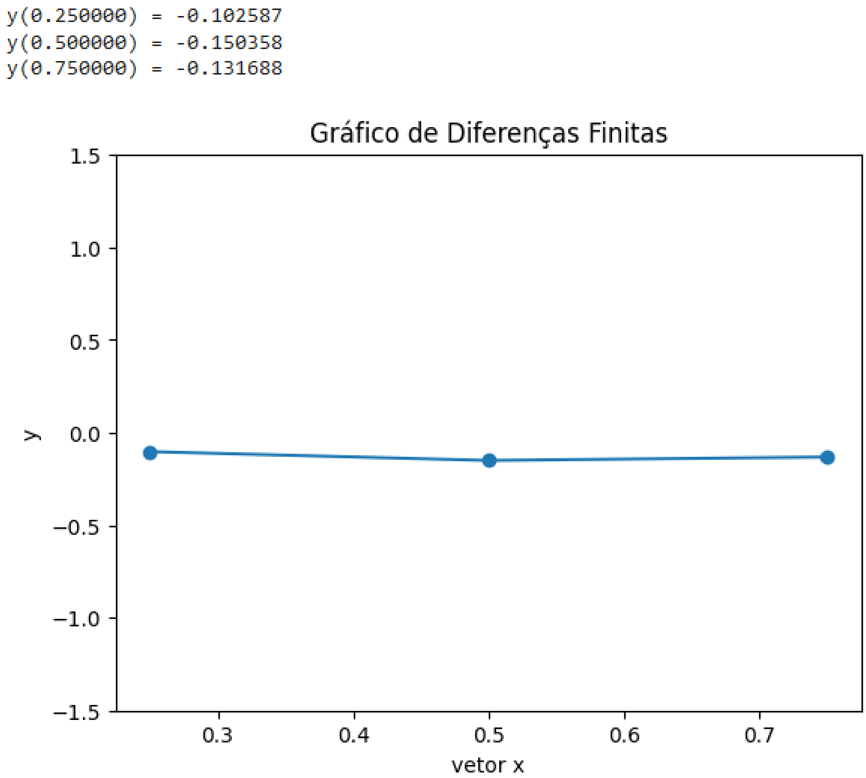
A seguir segue o código no Python, que permite determinar a solução e o esboço gráfico da solução contínua e discreta.

Figura 8: Código Python aplicação do problema 2.

```
def p(x):
  return 3*x

def q(x):
  return -1

def r(x):
  return 1

def diferencas_finitas(x0, y0, xf, yf, N):
  ## Variáveis inicias
  delta_x = (xf - x0)/N
  vetor_x = np.linspace(x0 + delta_x, xf - delta_x, N -1)
  dim_sist = N - 1
  A = np.zeros((dim_sist, dim_sist))
  b = np.zeros(dim_sist)

  ## Montagem da matriz A
  for i in range(dim_sist):
    x = vetor_x[i]
    for j in range(dim_sist):
      if i == j:
        A[i][j] = 2 + q(x)*pow(delta_x, 2)
      elif i == (j+1):
        A[i][j] = -1 - p(x)*delta_x/2
      elif i == (j-1):
        A[i][j] = -1 + p(x)*delta_x/2
      else:
        A[i][j] = 0

  ## Montagem do vetor b
  for i in range(dim_sist):
    x = vetor_x[i]
    if i == 0:
      b[i] = (1 + p(x)*delta_x/2)*y0 - r(x)*pow(delta_x, 2)
    elif i == (dim_sist - 1):
      b[i] = (1 - p(x)*delta_x/2)*yf - r(x)*pow(delta_x, 2)
    else:
      b[i] = -r(x)*pow(delta_x, 2)

  ## Resolução do sistema linear Ay = b
  y = np.linalg.solve(A, b)
  return y

def vetor_x(x0, xf, N):
  delta_x = (xf - x0)/N
  return np.linspace(x0 + delta_x, xf - delta_x, N -1)


vetor_x = vetor_x(0, 1, 4)
y = diferencas_finitas(0, 0, 1, 0, 4)
for i in range(len(y)):
  print("y(%f) = %f" % (vetor_x[i], y[i]))

print()
plt.plot(vetor_x, y, marker = "o")
plt.title("Gráfico de Diferenças Finitas")
plt.xlabel("vetor x")
plt.ylabel("y")
plt.ylim(-1.5, 1.5)
plt.show()
```

Fonte: Do autor (2023).

Figura 9: Gráfico do problema 2



Fonte: Do autor (2023).

Problema 3. Utilize o método de diferenças finitas para resolver o problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} -y'' + y = e^x \\ y(0{,}5) = 1 \\ y(1{,}5) = 2 \end{cases}$$

com $h = 0{,}1$.

Solução:

Temos que $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1{,}5-0{,}5}{0{,}1} = 10$.

Utilizando diferença finita central de ordem 2 para discretizar a função, obtemos:

$$\frac{-y_{i+1}+2\,y_i-\,y_{i-1}}{h^2}+y_i=e^{x_i} \qquad \text{(i)}$$

Organizando os termos em (i) e substituindo $h=0{,}1$:

$$-y_{i+1}+(\,2+h^2)y_i-\ y_{i-1}=0{,}01e^{x_i} \qquad \text{(ii)}$$

Fazendo $i=2,N-1$, obtemos um sistema, com a seguinte matriz triadiagonal, associada:

$$A=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 2{,}01 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 2{,}01 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 2{,}01 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 2{,}01 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2{,}01 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2{,}01 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2{,}01 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2{,}01 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2{,}01 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2{,}01 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$u=\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ \vdots\\ u_{11}\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b=\begin{bmatrix}0{,}01822\\0{,}02013\\0{,}02225\\0{,}02459\\0{,}02718\\0{,}03004\\0{,}03320\\0{,}03669\\0{,}04055\\0{,}04481\end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação em (ii) encontramos a seguinte solução numérica do sistema:

I	x_i	y_i
0	0,5	1
1	0,6	1.143722
2	0,7	1.280661
3	0,8	1.410269
4	0,9	1.531724

5	1	1.643900
6	1,1	1,745332
7	1,2	1.834176
9	1,4	1.964534
10	1,5	2

A solução analítica do problema de contorno é:

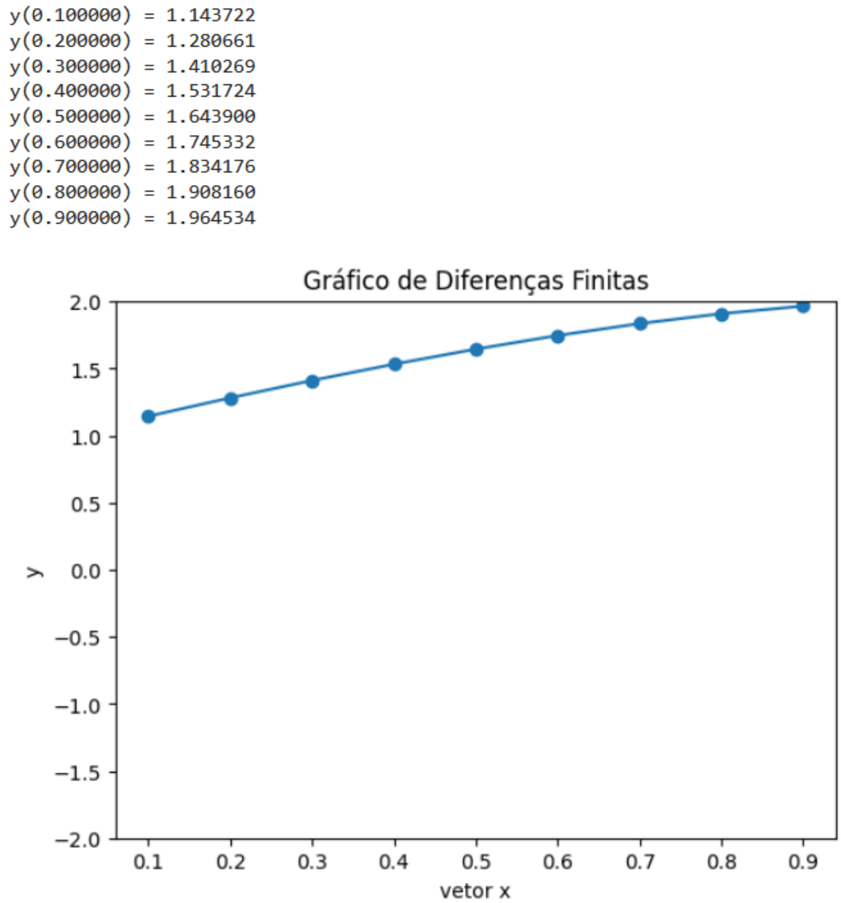
$$y = 1{,}60307e^{x} - 2{,}02932e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{x}$$

Figura 10: Código Python aplicação do problema 3.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def p(x):
  return 0

def q(x):
  return 1

def r(x):
  return -np.exp(x)

def diferencas_finitas(x0, y0, xf, yf, N):
  ## Variáveis inicias
  delta_x = (xf - x0)/N
  vetor_x = np.linspace(x0 + delta_x, xf - delta_x, N -1)
  dim_sist = N - 1
  A = np.zeros((dim_sist, dim_sist))
  b = np.zeros(dim_sist)

  ## Montagem da matriz A
  for i in range(dim_sist):
    x = vetor_x[i]
    for j in range(dim_sist):
      if i == j:
        A[i][j] = 2 + q(x)*pow(delta_x, 2)
      elif i == (j+1):
        A[i][j] = -1 - p(x)*delta_x/2
      elif i == (j-1):
        A[i][j] = -1 + p(x)*delta_x/2
      else:
        A[i][j] = 0

  ## Montagem do vetor b
  for i in range(dim_sist):
    x = vetor_x[i]
    if i == 0:
      b[i] = (1 + p(x)*delta_x/2)*y0 - r(x)*pow(delta_x, 2)
    elif i == (dim_sist - 1):
      b[i] = (1 - p(x)*delta_x/2)*yf - r(x)*pow(delta_x, 2)
    else:
      b[i] = -r(x)*pow(delta_x, 2)

  ## Resolução do sistema linear Ay = b
  y = np.linalg.solve(A, b)
  return y

def vetor_x(x0, xf, N):
  delta_x = (xf - x0)/N
  return np.linspace(x0 + delta_x, xf - delta_x, N -1)


vetor_x = vetor_x(0, 1, 10)
y = diferencas_finitas(0.5, 1, 1.5, 2, 10)
for i in range(len(y)):
  print("y(%f) = %f" % (vetor_x[i], y[i]))

print()
plt.plot(vetor_x, y, marker = "o")
plt.title("Gráfico de Diferenças Finitas")
plt.xlabel("vetor x")
plt.ylabel("y")
```

Fonte: Do autor (2023).

Figura 11: Gráfico do problema 3.



Fonte: Do autor (2023).

Exercício 4. Utilize o método de diferenças finitas para resolver o problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x \tan^{-1} x \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

com $\Delta x = h = 0{,}1$, utilizando o método das diferenças finitas.

Solução:

Para determinar a quantidade de intervalos, fazemos $n = \frac{b-a}{h}$, onde h será dado no enunciado do problema.

Neste caso: $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0{,}1} = 10$

Substituir as derivadas, por suas aproximações na equação

$$y'' - 2y' + y = e^x \tan^{-1} x \qquad \text{(i)}$$

obtemos:

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{(h)^2} + 2\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = e^x \tan^{-1} x \qquad \text{(ii)}$$

Multiplicando a equação (ii) por $(h)^2$, obtemos a equação

$$y_{i+1} - 2\,y_i + \; y_{i-1} + h(y_{i+1} - \; y_{i-1}) + (h)^2 y_i = \; (h)^2 e^x \tan^{-1} x$$

A partir desta equação e utilizando $h = 0{,}1$, construímos a seguinte tabela

I	x_i	y_i
0	0	1
1	0,1	1,059093
2	0,2	1,120775
3	0,3	1,186389
4	0,4	1,257774
5	0,5	1,337354
6	0,6	1,428252
7	0,7	1,534422
8	0,8	1,660801
9	0,9	1,813496
10	1	2

Observe que a tabela acima, já está devidamente montada com os números de iterações e os dados do problema de contorno. O código em Python, é dado como abaixo:

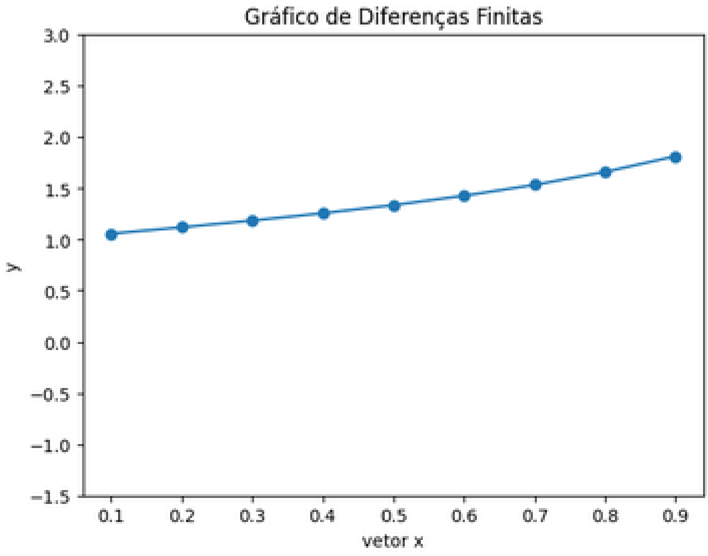
Figura 12:: Código Python do problema 4.

```python
def diferencas_finitas(x0, y0, xf, yf, N):
  ## Variáveis inicias
  delta_x = (xf - x0)/N
  vetor_x = np.linspace(x0 + delta_x, xf - delta_x, N -1)
  dim_sist = N - 1
  A = np.zeros((dim_sist, dim_sist))
  b = np.zeros(dim_sist)

  ## Montagem da matriz A
  for i in range(dim_sist):
    x = vetor_x[i]
    for j in range(dim_sist):
      if i == j:
        A[i][j] = 2 + q(x)*pow(delta_x, 2)
      elif i == (j+1):
        A[i][j] = -1 - p(x)*delta_x/2
      elif i == (j-1):
        A[i][j] = -1 + p(x)*delta_x/2
      else:
        A[i][j] = 0

  ## Montagem do vetor b
  for i in range(dim_sist):
    x = vetor_x[i]
    if i == 0:
      b[i] = (1 + p(x)*delta_x/2)*y0 - r(x)*pow(delta_x, 2)
    elif i == (dim_sist - 1):
      b[i] = (1 - p(x)*delta_x/2)*yf - r(x)*pow(delta_x, 2)
    else:
      b[i] = -r(x)*pow(delta_x, 2)

  ## Resolução do sistema linear Ay = b
  y = np.linalg.solve(A, b)
  return y

def vetor_x(x0, xf, N):
  delta_x = (xf - x0)/N
  return np.linspace(x0 + delta_x, xf - delta_x, N -1)


vetor_x = vetor_x(0, 1, 10)
y = diferencas_finitas(0, 1, 1, 2, 10)
for i in range(len(y)):
  print("y(%f) = %f" % (vetor_x[i], y[i]))

print()
plt.plot(vetor_x, y, marker = "o")
plt.title("Gráfico de Diferenças Finitas")
plt.xlabel("vetor x")
plt.ylabel("y")
plt.ylim(-1.5, 3)
plt.show()
```

```
y(0.100000) = 1.059093
y(0.200000) = 1.120775
y(0.300000) = 1.186389
y(0.400000) = 1.257774
y(0.500000) = 1.337354
y(0.600000) = 1.428252
y(0.700000) = 1.534422
y(0.800000) = 1.660801
y(0.900000) = 1.813496
```

Fonte: Do autor (2023)

Figura 13: Gráfico do problema 4.



Fonte: Do autor (2023)

Conclusão

Como visto ao longo desse trabalho o método das diferenças finitas tem uma vasta área de aplicação, é em nossa pesquisa foi aplicado em problemas de contorno. Ao longo da análise dos problemas propostos foi identificado que nem sempre podemos encontrar uma solução analítica, devido à complexidade do problema, com isso utilizamos métodos numéricos para suprir a demanda da solução da equação.

Utilizamos o cálculo número para encontra a solução dos problemas e com a utilização da linguagem de programação *Phyton*, foi possível encontrar a solução e esboça os gráficos tanto continuo quanto discreto de cada problema.

Com isso mente podemos afirmar que os resultados encontrados foram satisfatórios.

Referências

ARAÚJO, Adérito Luís Martins. Matemática Computacional. **Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra**, 2014.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Editora Contexto, 2002.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas; BURDEN, Annette M. **Análise numérica**. Cengage Learning, 2008.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Editora Blucher, 2019.

CUMINATO, J.A. & MENEGUETTE, M. Jr. **Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas**, (2013).

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa**. Plageder, 2009.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. Ediitora Atlas SA, 2008.

WILHELM, Volmir Eugenio. **Análise Numérica. Universidade Federal do Paraná** - UFPR. Paraná, p. 124. 2017.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. Cengage Learning Editores, 2003.

Anexos

Vamos apresentar neste apêndice as soluções analíticas dos problemas resolvidos na seção 3.

Problema 1.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = x \\ y(0) = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Utilizando o método dos coeficientes a determinar e sabendo que a solução do problema de contorno é dada por $y = y_h + y_p$, vamos inicialmente determinar a solução do problema homogêneo.

Resolvendo a equação característica,

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

encontramos $m_1 = m_2 = -1$. Como as raízes são iguais a nossa y_h será da forma:

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

A solução particular da EDO é do tipo $y_p = ax + b$, com a e b constantes. Sendo assim, $y'_p = a$ e $y''_p = 0$

Substituindo na equação $y'' + 2y' + y = x$, obtemos:

$$0 + 2a + 2ax + b = x$$

$$2ax + (2a + b) = x$$

Igualando os termos, obtemos

$$2ax = x,$$

de onde $2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Ainda, $(2a + b) = 0$, substituindo o valor de $\boldsymbol{a}$ encontrado:

$$\left(2\frac{1}{2} + b\right) = 0,$$

$$1 + b = 0$$

$$b = -1$$

Logo $y_p = \frac{1}{2}x - 1$

Portanto:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1$$

Substituindo as condições de contorno, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2 = c_1 - 1 \\ 0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} - 1 \end{cases}$$

obtendo $c_1 = 3$ e $c_2 = -3 + \frac{e}{2}$.

Portanto

$$y = 3e^{-x} + (-3 + \frac{e}{2}) x e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1$$

Problema 2. Vamos utilizar séries para resolver a parte homogênea da EDO associada ao problema de valor de contorno

$$\begin{cases} y'' = 3xy' - y + x \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Considerando, $\mathrm{p}\,(\mathrm{x})\,\mathrm{y}'' + \mathrm{q}\,(\mathrm{x})\,\mathrm{y}' + \mathrm{r}\,(\mathrm{x})\,\mathrm{y} = 0$, se $\mathrm{p}\,(\mathrm{x}_0) = 0$ então x_0 é um ponto de singularidade.

Seja, $\mathrm{y}'' - 3\mathrm{x}\mathrm{y}' + \mathrm{y} = 0$

Não existe singularidade em $x = 0$.

Inserindo $x = 0$ em $p\,(x) = 1$

$\mathrm{p}\,(0) = 1 \Rightarrow \mathrm{p}\,(0) \neq 0$

Para uma equação $\mathrm{p}(\mathrm{x})\,\mathrm{y}'' + \mathrm{q}(\mathrm{x})\,\mathrm{y}' + \mathrm{r}\,(\mathrm{x})\mathrm{y} = 0$ sem ponto de singularidade em $\mathrm{x} = 0$, suponha uma solução da forma $\mathrm{y} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \mathrm{a}_\mathrm{k}\mathrm{x}^\mathrm{k}$.

Derivando ambos os lados da solução acima, obtemos:

$$\mathrm{y}' = \left(\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \mathrm{a}_\mathrm{k}\mathrm{x}^\mathrm{k}\right)' = (\mathrm{a}_0 + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathrm{a}_\mathrm{k}\mathrm{x}^\mathrm{k})'$$

$$= (a_0)' + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$$

Simplificando

$y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$

Mostraremos a seguir, que $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2}$

Ora, $y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$

Derivando ambos os lados da equação $y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$

obtemos:

$$y'' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} \right)' = \left(a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k k x^{k-1}\right)'$$
$$= (a_1)' + \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2}$$
$$= \left(\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2} \right)$$

Substituindo os resultados em $y'' - 3xy' + y = 0$ obtemos:

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2} - 3x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Mudando de série para obter a mesma potência de x, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

ou ainda,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - a_k 3k x^k + a_k 3k x^k) = 0$$

Para que uma série de potência seja igual a 0, os coeficientes devem ser iguais a 0, ou seja,

$$a_{k+2}(k+2)(k+1) - 3ka_k + a_k = 0 \Rightarrow a_{k+2}(k+2)(k+1) = 3ka_k - a_k$$

Dividindo ambos os lados por $(k+2)(k+1)$, obtemos:

$$a_{k+2} = \frac{3ka_k - a_k}{(k+2)(k+1)}$$

Fazendo, $k = k-2$, na equação acima, obtemos:

$$a_k = \frac{a_{k-2}(3k-7)}{(k-1)k}$$

obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+2}(k+2)(k+1) - 3ka_k + a_k)x^k = 0$$

Substituindo em $a_{k+2} = \frac{3ka_k - a_k}{(k+2)(k+1)}$, para $k = 2n$:

$$y_1 = c_1 \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}(-1)(5)(6n-7)}{(1)(2)(3)(4)\ldots 2n(2n-1)} + \ldots \right)$$

De fato:

$$a_{2n} = \frac{a_{2n-2}(6n - 7)}{2n(2n - 1)}$$

$$a_2 = \frac{a_0(-1)}{(1)(2)}$$

$$a_4 = \frac{a_2(5)}{(3)(4)} = \frac{a_0(-1)(5)}{(1)(2)(3)(4)}$$

$\vdots$

$$a_{2n} = \frac{a_0(-1)(5)(6n - 7)}{(1)(2)(3)(4)\ \ldots\ 2n(2n - 1)}$$

Portanto, a solução é

$$y_1 = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}(-1)(5)(6n-7)}{(1)(2)(3)(4)\ldots 2n(2n-1)} + \ldots \right)$$

Como a_0 é uma constante, substituindo a_0 por c_1:

$$y_1 = c_1 \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}(-1)(5)(6n-7)}{(1)(2)(3)(4)\ldots 2n(2n-1)} + \ldots \right)$$

Resolver para $k = 2n + 1$,

$$y_2 = c_2 (x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + \dots + + \frac{x^{2n+1} (8) (3n - 2)}{(3) (4) (5) \dots n (2n + 1)} + \dots)$$

De fato, para $k = 2n + 1$:

$$a_{2n+1} = \frac{a_{2n+1} (3n - 2)}{n (2n + 1)}$$

$$a_3 = \frac{a_1}{(3)}$$

$$a_5 = \frac{a_3 (8)}{(4) (5)} = \frac{a_1 (8)}{(3) (4) (5)}$$

$$\vdots$$

$$a_{2n+1} = \frac{a_1 (8) (3n - 2)}{(3) (4) (5) \dots n (2n + 1)}$$

Portanto, a solução é

$$y_2 = a_1 (x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + \dots + \frac{x^{2n+1} (8) (3n - 2)}{(3) (4) (5) \dots n (2n + 1)} + \dots)$$

Desde que a_1 é uma constante, substitua a_1 por c_2, obtendo:

$$y_2 = c_2 (x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + \dots + + \frac{x^{2n+1} (8) (3n - 2)}{(3) (4) (5) \dots n (2n + 1)} + \dots)$$

Portanto a solução homogênea é

$$y = c_1 \left(1 - \frac{x\,2}{2} - \frac{5x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n} (-1) (5) (6n - 7)}{(1) (2) (3) (4) \dots 2n (2n - 1)} + \dots \right)$$
$$+ c_2 \left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + \dots + + \frac{x^{2n+1} (8) (3n - 2)}{(3) (4) (5) \dots n (2n + 1)} + \dots \right)$$

Problema 3.

$$\begin{cases} -y'' + y = e^x \\ y(0{,}5) = 1 \quad \text{com } h = 0{,}1. \\ y(1{,}5) = 2 \end{cases}$$

Aplicando o método dos coeficientes a determinar, encontramos a solução do problema homogêneo que é dado por:

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

A solução particular será do tipo $y_p = Ax^h e^x$, $h = 0{,}1{,}2\ldots 10$.

Como $y_p = e^x$ encontra-se na solução homogênea, tomamos a solução particular do tipo $y_p = xe^x$.

Derivando a função $y_p = Axe^x$, duas vezes.

$$y_p = Axe^x$$

$$y'_p = Ae^x + Axe^x$$

$$y''_p = 2Ae^x + Axe^x$$

e substituindo em $-u_{xx} + u = e^x$, obtemos:

$$-2Ae^x - Axe^x + Axe^x = e^x$$

$$-2Ae^x = e^x$$

Fazendo a comparação dos termos, temos que $-2A = 1$, logo $A = \frac{1}{2}$.

Portanto, como $y = y_c + y_p$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} xe^x$$

Substituindo as condições de contorno obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 1 = c_1 e^{0,5} + c_2 e^{-0,5} + \dfrac{1}{2} 0{,}5 e^{0,5} \\ 2 = c_1 e^{1,5} + c_2 e^{-1,5} + \dfrac{1}{2} 1{,}5 e^{1,5} \end{cases}$$

Ao resolver o sistema, os valores de c_1 e c_2, são dados respectivamente por:

$$c_1 = -\frac{-2e\sqrt{e} + 2e^2\sqrt{e} - e^2 - e^3 - 4\sqrt{e}}{2e - 2e^3} + \frac{3}{4} + \frac{2\sqrt{e}}{e^2}$$

$$c_2 = \frac{-2e\sqrt{e} + 2e^2\sqrt{e} - e^2 - e^3 - 4\sqrt{e}}{2e - 2e^3}$$

Então a solução do problema de contorno é dada por:

$$y = \left(-\frac{-2e\sqrt{e} + 2e^2\sqrt{e} - e^2 - e^3 - 4\sqrt{e}}{2e - 2e^3} + \frac{3}{4} + \frac{2\sqrt{e}}{e^2}\right)e^x + \frac{-2e\sqrt{e} + 2e^2\sqrt{e} - e^2 - e^3 - 4\sqrt{e}}{2e - 2e^3}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$$

Problema 4. Utilizando o método de variação de parâmetros, determine a solução da EDO $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = e^x \tan^{-1} x}$**.**

Solução:

Inicialmente, vamos determinar a solução homogênea da equação.

A equação característica associada à EDO homogênea é dada por:

$m^2 - 2m + 1 = 0$

Aplicando Pitágoras a equação acima, encontramos uma única raiz $m = 1$.

Sendo assim,

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Será aplicado o método de variação de parâmetros para determinar a solução do problema não homogêneo.

Dado o sistema abaixo,

$$\begin{cases} v'_1 e^x - v'_2 x e^x = 0 \\ v'_1 e^x + v'_2 e^x - v'_2 x e^x = e^x \tan^{-1} x \end{cases}$$

vamos determinar os valores de v_1 e v_2 .

Somando as duas equações do sistema, obtemos $v'_2 = \tan^{-1} x$

Integrando ambos os lados da última equação obtemos:

$$v_2 = \int \tan^{-1} x \; dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2|$$

A seguir, vamos determinar o valor de v_1.

Substituindo o valor de v'_2 em $v'_1 e^x - v'_2 x e^x = 0$, obtemos:

$$v'_1 e^x + x e^x \tan^{-1} x = 0$$

$$v'_1 e^x = -x e^x \tan^{-1} x$$

$$v'_1 = -\frac{x e^x \tan^{-1} x}{e^x}$$

$$v'_1 = -x \tan^{-1} x$$

Integrando a última equação de ambos os lados:

$$v_1 = \int -x \tan^{-1} x \, dx = -\frac{x^2}{2} \tan^{-1} x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \tan^{-1} x$$

Determinados v_1 e v_2 e sendo $y = y_h + y_p$, obtemos:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + v_1 e^x + v_2 x e^x$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + -\frac{x^2}{2} \tan^{-1} x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \tan^{-1} x \, e^x + x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| \, x e^x$$