

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS  
ESCOLA NORMAL SUPERIOR  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WILANA LAURA DA CONCEIÇÃO CASTRO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM E  
APLICAÇÕES NA ÁREA DAS CIÊNCIAS E ENGENHARIA

MANAUS, MARÇO  
2023

WILANA LAURA DA CONCEIÇÃO CASTRO

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM E APLICAÇÕES NA ÁREA  
DAS CIÊNCIAS E ENGENHARIA**

Projeto de pesquisa para elaboração do Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas.

Orientador(a): Dra. Silvia Cristina Belo e Silva

Co-orientador(a): Me. Alexandra Salerno Pinheiro

MANAUS, MARÇO

2023

**TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS**

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior - UEA de Wilana Laura da Conceição Castro.

Aos 15 dias do mês de março de 2023, às 19h20, no auditório da Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Dra. Sílvia Cristina Belo e Silva, Dr. Eduardo Lima de Oliveira e Dr. Leonardo da Silva Brito, a aluna Wilana Laura da Conceição Castro apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado: **"Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e aplicações na área das ciências e engenharia"** como requisito curricular do Curso de Licenciatura em Matemática. A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,8 divulgando o resultado a aluna e demais presentes.

Manaus, 15 de março de 2023

Jorge M. R.  
Presidente da Banca Examinadora

Sílvia Cristina Belo e Silva.  
Orientadora

Eduardo Lima de Oliveira.  
Avaliador 1

Leonardo da Silva Brito  
Avaliador 2

Wilana Laura da Conceição Castro  
Aluna

**“A beleza da matemática só se mostra a seguidores mais pacientes.”**

Maryam Mirzakhani

## **AGRADECIMENTOS**

A Prof.<sup>a</sup> Dra. Silvia Cristina Belo e Silva, pela paciência as minhas inúmeras dúvidas, pelo suporte durante todo o processo de desenvolvimento da pesquisa, e sobretudo pela confiança e amizade desenvolvida. É a pessoa que tem minha grande admiração e respeito.

A Prof.<sup>a</sup> Msc. Helisângela Ramos da Costa, pelas contribuições e análises para com a escrita e desenvolvimento do texto, pela paciência e cordialidade.

Ao corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática, por todo o conhecimento transmitido, pelas grandes lições de vida e por sempre estimularem o nosso crescimento acadêmico.

Aos amigos e colegas que contribuíram mesmo que de forma indireta, compartilhando alegrias e sempre com palavras de estímulos nos tempos mais difíceis.

Em especial a minha família que por vezes acreditaram mais em meu potencial do que eu mesma. Foram os que mais presenciaram as noites em claro, o cansaço, as dores e o desânimo, mas também se alegravam com cada etapa finalizada. Foram a grande razão para eu ter chegado onde estou e por esta buscando ir além.

Somente palavras não podem descrever o quanto sou grata por ter tido pessoas maravilhosas no meu caminho.

Muito obrigado!

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1. Esquema dos níveis de volume e altura no reservatório de água. Representado a esquerda, os valores dos volumes de água. E representado a direita, a altura para os respectivos volumes. .... 24
- Figura 2. Comando no software Geogebra para atribuir o controle os limites de mínimo e máximo e o incremento..... 32
- Figura 3. Os três controles deslizantes atribuídos: para os dias ( $x_1$  e  $x_2$ ) e o terceiro a população ( $n$ )..... 33
- Figura 4. Atribuição do quarto comando para a equação obtida com o modelo e a condição de a função estar entre os controles deslizantes ( $x_1$  e  $x_2$ ) para a plotagem ponto a ponto..... 33
- Figura 5. Atribuição do quinto comando atribuído onde é inserido o ponto C com a condição inicial de no tempo igual a 0 a quantidade de infectados ser igual a 1. . 34
- Figura 6. Projeções gráficas em quatro tempos distintos representando o comportamento gráfico para a disseminação da doença. .... 35
- Figura 7. Circuito do tipo RL descrito no problema. .... 38
- Figura 8. Representação gráfica que representa o comportamento da Corrente Elétrica em função do tempo. .... 44
- Figura 9. Representação do ponto A inserido para observar a construção do gráfico analisando o seu aumento até momento em que a corrente elétrica estabiliza. .... 45
- Figura 10. Representação gráfica demonstrando a estabilidade da corrente elétrica após o seu aumento..... 46
- Figura 11. Atribuição de comandos com as condições para o tempo igual a 0 e para as 2 horas depois para realizar comparação dos valores informados no software com os valores informados no enunciado. .... 51
- Figura 12. Representação gráfica do decaimento da temperatura corporal do indivíduo até o momento de sua estabilização com a temperatura ambiente. .... 52
- Figura 13. Representação do comportamento gráfico que demonstra o decaimento radioativo da amostra de Césio – 137..... 57

Figura 14. Atribuição do ponto na projeção da função do decaimento radioativo do Césio – 137 para comparação dos valores obtidos na resolução analítica com os valores apresentados no software ..... 58

Figura 15. Representação gráfica do decaimento da amostra de Césio – 137 até o ponto em que atinge um valor desprezível de radiação. .... 59

## RESUMO

Nessa pesquisa foi realizado o estudo das equações diferenciais que é um dos temas da matemática em que alunos tem dificuldades de compreensão principalmente quanto às suas aplicações. Dessa forma, nessa pesquisa serão apresentados situações-problemas em que são aplicados os conceitos de equações diferenciais ordinárias (EDO's) de 1ª ordem com o uso do método do fator integrante e/ou método de separação de variáveis para obtenção dos modelos. Além dos cálculos também será utilizado uma ferramenta que é o software Geogebra para realizar as análises através de construção de gráficos associados aos modelos das aplicações e simulação de dados para avaliação dos resultados. A abordagem da pesquisa é quantitativa com uso de estratégia descritiva que tem como objetivo descrever os dois métodos de resolução de equações diferenciais propostos aplicando nos seguintes problemas: disseminação de uma doença, circuitos elétricos em série, lei de resfriamentos de Newton, escoamento de um fluido e estabilidade de uma substância radioativa.

Palavras-chaves: EDO's. Métodos Elementares. Aplicações.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	10
CAPITULO 1: REVISÃO DE LITERATURA .....	12
1.1 Aspectos Históricos das Equações Diferenciais .....	12
1.2 Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias de 1º Ordem .....	13
1.3 Métodos de Resolução de Equações Diferenciais de 1º Ordem .....	14
1.3.1 Método do Fator Integrante.....	15
1.3.2 Método de Separação de Variáveis.....	15
1.3.3 Equação de Bernoulli .....	16
1.3.4 Problema de Valor Inicial (PVI).....	17
CAPITULO 2: METODOLOGIA DA PESQUISA.....	18
2.1 Abordagem, Estratégias de Investigação e Procedimentos Técnicos .....	18
2.2 Etapas da pesquisa/instrumentos de coletas de dados .....	19
CAPITULO 3: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	21
3.1. Drenagem de um Fluido através de um Orifício .....	21
3.2. Disseminação de uma Doença.....	26
3.3. Circuito Elétrico em Série .....	36
3.4. Lei de Resfriamento de Newton .....	46
3.5. Decaimento Radioativo .....	53
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	60
REFERÊNCIAS.....	63

## INTRODUÇÃO

As equações diferenciais começaram com o estudo do cálculo por Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz no século XVII. Newton atuou relativamente pouco na área de equações diferenciais, mas o seu desenvolvimento do cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII.

A modelagem matemática (área que estuda a simulação de sistemas ou fenômenos) e as equações diferenciais ordinárias, em particular as de 1ª ordem são importantes por exercer uma vasta influência nas investigações de cunho científico, uma vez que seu uso e resultados, podem ser válidos para a comparação com dados experimentais, (ZILL, 2003).

Vale ressaltar, que o grau de precisão que se espera de um modelo matemático é o mais próximo da realidade, porém o mesmo poderá sofrer algumas alterações, dependendo das variáveis utilizadas no problema. O que se espera, é que se chegue à um resultado bem próximo do real.

Neste sentido nos perguntamos: Como as equações diferenciais ordinárias podem ser aplicadas na área de ciências e engenharia em modelos como disseminação de uma doença, corrente elétrica em circuitos, resfriamento de corpos, desintegração de uma substância radioativa e cálculo do tempo para o escoamento de um fluido?

Podemos elaborar outras questões para que seja possível a obtenção dessa solução. São elas: Dada uma substância radioativa, qual sua medida de estabilidade? Dada uma população, como a disseminação de uma doença se propaga após determinado período? Qual a troca de calor ocorrida entre determinado corpo e o meio ambiente, após determinado tempo? Dado um circuito elétrico em série, qual a corrente elétrica desse circuito? Qual o tempo necessário para escoamento de água até o ponto em que ocorra o religamento automático de uma bomba de enchimento em caixa d'água?

Dessa forma, o objetivo geral é descrever dois métodos de resolução de equações diferenciais: método do fator integrante e método de separação de

variáveis aplicando nos seguintes problemas: estabilidade de uma substância radioativa, disseminação de uma doença, resfriamento de corpos, circuitos elétricos, cálculo do tempo para o escoamento de água.

E os objetivos específicos são: apresentar as equações diferenciais de primeira ordem, descrevendo seus principais aspectos e suas principais propriedades; descrever os métodos do fator integrante e o método de separação de variáveis; apresentar aplicações envolvendo a Lei do Resfriamento de Newton, problema de disseminação de uma doença, Decaimento Radioativo, Circuito Elétrico em série e drenagem de um fluido através de um orifício.

Este trabalho está distribuído em três capítulos, sendo eles: fundamentação teórica, metodologia da pesquisa e apresentação e análise dos resultados.

Na fundamentação teórica são abordados conceitos, definições e aspectos históricos das equações diferenciais, em especial, nas equações diferenciais ordinárias de 1º ordem. São também abordados os métodos a serem utilizados para auxiliar na construção dos modelos a serem manuseados nas resoluções dos problemas.

Na metodologia da pesquisa são apresentadas a abordagem, estratégia e os procedimentos técnicos que descrevem a pesquisa, as etapas e os instrumentos para a coleta e análise de dados.

Para algumas das aplicações apresentadas será utilizado o software Geogebra para construção e análises dos gráficos comparando com a solução analítica. Dessa forma, será possível ter uma melhor compreensão dos cálculos e do comportamento gráfico que as equações descrevem.

## **CAPITULO 1: REVISÃO DE LITERATURA**

### **1.1 Aspectos Históricos das Equações Diferenciais**

Segundo Boyce e Diprima (2010, p. 20-22) os principais momentos históricos sobre os estudos das equações diferenciais tiveram início, durante o século XVII, através do estudo do Cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Mais tarde foram surgindo outros estudos que ao longo dos anos contribuíram para o aperfeiçoamento do cálculo diferencial. Alguns desses estudos foram realizados por: Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli, Cauchy, Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Gauss e Lipchitz. Durante o século XVIII métodos elementares já tinham sido descobertos. No século XIX os marcos foram os estudos de existência e unicidade e criação de métodos menos elementares e no século XX o grande marco foi a criação do método geométrico para equações não lineares.

Diante disso, é notório que para o que hoje é conhecido e definido como equações diferenciais, a séculos passados não se tinha o menor conhecimento do que seria esse conceito. A cada estudo que era realizado e publicado, surgiam mais pessoas que por serem instigadas por essas descobertas, buscavam realizar ainda mais estudos para com isso conseguir explicar os acontecimentos e fenômenos que eram presenciados em suas determinadas épocas.

No entanto, Cury (2009) relata que nos últimos dez anos, as dificuldades, particularmente as relativas à aprendizagem de cálculo, se tornaram mais frequentes e preocupantes, pois fica cada vez mais evidente a falta de conhecimentos prévios, ou a compreensão equivocada de assuntos abordados em níveis de ensino anteriores. Consequentemente esse déficit prejudica o estudo de outras disciplinas, como as equações diferenciais ordinárias.

Uma parte da matemática aplicada, se interessa em compreender o comportamento de uma equação diferencial. Segundo Boyer (1974), com tal objetivo, durante os séculos XIX e XX muitos matemáticos detiveram suas pesquisas e investigações teóricas de existência e unicidade e estudos de

pesquisas a investigações teóricas de existência e unicidade e estudos de equações diferenciais mais complexas. Algumas equações resistiram ainda, e graças aos séculos da computação (sec. XX e XXI), muitos métodos complexos de aproximação e integração numérica foram desenvolvidos

As aplicações do uso de EDO podem ser expressas em sistemas físicos, biológicos e químicos, que em geral matematicamente são apenas superficialmente trabalhados no ensino superior. As EDO de 1ª ordem permitem por exemplo, o estudo de disseminação de uma doença, corrente elétrica em circuitos, resfriamento de corpos, estabilidade de uma substância radioativa, cálculo de escoamento de água, dentre muitos outros temas, mostrando assim, sua grande contribuição para compreensão de fenômenos físicos, biológicos e químicos, e ainda se mostra um campo produtivo para pesquisa.

## 1.2 Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias de 1º Ordem

As equações diferenciais são o suporte matemático para muitas áreas da ciência e da engenharia. As palavras diferencial e equações, obviamente sugerem a resolução de algum tipo de equação envolvendo derivadas (ZILL ,2001). Isso explica-se por que a derivada descreve a taxa de variação instantânea de uma função em um certo ponto.

Partindo dessa ideia Zill (2001) nos diz que uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), é definida por uma equação que contém derivadas de uma ou mais variantes dependentes com relação a uma única variante independente. De uma forma mais simples, temos que uma equação diferencial ordinária é uma equação cuja sua incógnita é uma função.

A EDO é classificada pela sua ordem. Segundo Bassanezi (2002) a ordem de uma EDO é dada pela maior ordem da derivada descrita. Assim sendo, a EDO de 1º ordem tem ordem 1 e pode ser descrita como

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ ou } y' = f(x, y) \quad (1.1)$$

Onde x é a variável independente e y é a variável dependente.

Uma EDO também pode ser definida pela sua linearidade. Por características da equação, ela pode ser denominada linear ou não-linear e homogênea ou não-homogênea. A saber, a forma geral de uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem é

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Onde  $p(x)$  e  $q(x)$  são funções reais e contínuas em um intervalo. Se a função  $q(x) = 0$  teremos uma EDO de 1º ordem linear homogênea, caso contrário uma EDO de 1º ordem linear não-homogênea. Quando a variável dependente  $y$  e suas derivadas tem potências diferentes de 1 ou quando os coeficientes não dependem apenas da variável independente  $x$ , essas equações são denominadas equações não-lineares.

De modo geral, equações diferenciais lineares de primeira ordem admitem infinitas soluções, e a ideia para obtê-las, consiste em

Resolver a equação  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  consiste em encontrar curvas  $y = g(x)$ , de modo que a direção da reta tangente em cada ponto de uma destas curvas coincida com o valor pré-estabelecido pela função  $f(x, y)$  neste ponto. A família de todas as curvas que satisfazem  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  é denominada solução geral de  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . BASSANEZI (2002, p. 125)

A obtenção dessas soluções gerais se dá por métodos elementares de resolução. Alguns desses métodos são: método do fator integrante, variáveis separáveis, equação de Bernoulli, dentre outros.

### 1.3 Métodos de Resolução de Equações Diferenciais de 1º Ordem

Em ciências, engenharias ou até mesmo em outras áreas, frequentemente desejamos descrever ou modelar o comportamento de algum sistema ou fenômeno em termos matemáticos. Essa descrição, se resume em dois momentos: identificar as variáveis que são responsáveis pelas mudanças do sistema e um conjunto de hipóteses razoáveis. As hipóteses também incluem algumas leis empíricas que são aplicáveis. A estrutura matemática de todas essas hipóteses, é muitas vezes uma equação diferencial.

Desta forma, para compreender e investigar problemas que envolvem disseminação de uma doença, corrente elétrica em circuitos, resfriamento de corpos, estabilidade de uma substância radioativa, problemas de mistura, é necessário ter conhecimento não apenas do cálculo diferencial e integral, mas também das equações diferenciais de primeira ordem e seus métodos de solução, (BOYCE, 2006).

Dentre os métodos elementares de resolução para EDO's de 1º ordem, temos:

### 1.3.1 Método do Fator Integrante

Para aplicação desse método teremos uma EDO linear de 1º ordem do tipo não-homogênea. Considerando a equação  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$  será admitido que exista uma função  $u(x)$  tal que  $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ . Após ser encontrado essa função  $u(x)$ , será multiplicado ambos os termos da equação por essa função  $u(x)$  e com essa multiplicação o lado esquerdo da equação pode ser visto como a derivada do produto das funções. Descrevendo de forma analítica temos

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$\frac{dy}{dx}u(x) + p(x)u(x)y = q(x)u(x)$$

$$\frac{d[u(x)y]}{dx} = q(x)u(x) \quad (1.2)$$

### 1.3.2 Método de Separação de Variáveis

Este método é apropriado para solucionar problemas cuja equação diferencial, pode ser descrita como  $p(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$ . Como o próprio nome diz, quando a equação está com essa descrição, só é necessário separar em cada termo de acordo com a variável e realizar a resolução da EDO. Realizando descrição analítica temos

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$p(y)dy = g(x)dx \quad (1.3)$$

### 1.3.3 Equação de Bernoulli

Este método é utilizado em equações do tipo não-linear, ou seja, quando a variável dependente  $y$  e suas derivadas tem potências diferentes de 1 ou quando os coeficientes não dependem apenas da variável independente  $x$ . O método é utilizado para tornar a equação não-linear em uma equação linear. Considerando a equação  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n$  onde  $n$  é um número real qualquer, esta é denominada como equação de Bernoulli. Para equações desse tipo é realizado uma mudança de variável para então ter uma equação linear. Descrevendo de forma analítica, temos

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n \quad (1.4)$$

Dividindo ambos os termos por  $y^n$ , temos

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = f(x) \quad (1.5)$$

Fazendo a substituição de variável  $w = y^{1-n}$  pela regra da cadeia, temos

$$w' = (1 - n)y^{-n}y' \quad (1.6)$$

Segue das igualdades (1.5) e (1.6) que

$$\frac{w'}{(1 - n)} + p(x)w = f(x) \quad (1.7)$$

Multiplicando ambos os termos da equação (1.7) da equação por  $(1 - n)$ , temos

$$\frac{(1-n)}{(1-n)}w' + (1-n)p(x)w = (1-n)f(x)$$

$$w' + (1-n)p(x)w = (1-n)f(x) \quad (1.8)$$

Pela equação (1.8) temos a equação aplicável para equações do tipo Bernoulli, afim de transformar em uma equação linear.

#### 1.3.4 Problema de Valor Inicial (PVI)

Há também EDO's que já são dados condições para ser realizado os cálculos, tendo um limite pré-estabelecido para a equação antes de ser resolvida. Esses tipos de problemas são denominados como PVI (Problema de Valor Inicial). Os problemas de valores iniciais podem ser resolvidos utilizando os métodos de resoluções, o fator que diferencia é que após a aplicação de um dos métodos deve ser utilizado os valores e condições impostas. Exemplo:

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

## **CAPITULO 2: METODOLOGIA DA PESQUISA**

### **2.1 Abordagem, Estratégias de Investigação e Procedimentos Técnicos**

A abordagem metodológica da pesquisa é quantitativa pois estará voltada a desenvolvimento de teoremas e modelos.

Diferentemente da pesquisa qualitativa, os resultados da pesquisa quantitativa podem ser quantificados. Como as amostras geralmente são grandes e consideradas representativas da população, os resultados são tomados como se constituíssem um retrato real de toda a população alvo da pesquisa. A pesquisa quantitativa se centra na objetividade. Influenciada pelo positivismo, considera que a realidade só pode ser compreendida com base na análise de dados brutos, recolhidos com o auxílio de instrumentos padronizados e neutros. A pesquisa quantitativa recorre à linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, etc. A utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa permite recolher mais informações do que se poderia conseguir isoladamente. (FOSENCA 2002 apud GERHARDT, SILVEIRA, 2009, p.35)

Quanto a estratégia, a que será utilizada é a descritiva, pois, é através desta que é possível realizar o estudo, a análise, o registro e a interpretação dos fatos do mundo físico.

As pesquisas deste tipo têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis. São inúmeros os estudos que podem ser classificados sob este título e uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados. GIL (2008, p.28)

Ainda de acordo com Gil (2007) um procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa desenvolve-se por um processo constituído de várias fases, desde a formulação do problema até a apresentação e discussão dos resultados.

Esta pesquisa justifica-se pela necessidade de investigação de aplicações das EDO de primeira ordem cujos modelos matemáticos serão aplicados nas áreas das ciências e da engenharia.

Diante do tema proposto, a pergunta problema principal consistem em como que as equações diferenciais de 1ª ordem podem ser aplicadas nas áreas das ciências e da engenharia abrangendo problemas de disseminação de uma doença,

troca de calor ocorrida entre determinado corpo e o meio ambiente, circuito elétrico em série, escoamento de fluido e desintegração radioativa.

O procedimento técnico utilizado foi a revisão bibliográfica. Esse tipo de procedimento está interligado com estudos e referências em obras e trabalhos correlatos, sendo assim, descreve o que foi realizado nessa pesquisa. O embasamento será realizado no âmbito de pesquisas envolvendo equações Diferenciais de Primeira Ordem e algumas de suas aplicações.

O outro procedimento técnico utilizado foi o software Geogebra que está disponível no site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), e pode ser usado online, ou se preferir pode ser baixado no computador ou no celular. Este, auxiliou nas projeções gráficas e simulações, assim melhorando a visualização e compreensão dos dados obtidos a partir dos modelos de cada situação-problema apresentados na pesquisa. As ferramentas utilizadas dentro do software foram, controle deslizante, atribuição de ponto.

Tal ferramentas foram utilizadas pois o principal objetivo de usar o software era realizar uma análise gráfica e tanto o controle deslizante quanto o comando de ponto possibilitavam isso. Com o controle deslizante é possível habilitar intervalos, e assim, observar a construção do gráfico ponto a ponto. Com a o comando do ponto já é possível observar somente a construção do gráfico sem intervalos definidos. Ambos podem ter mudança de cor, animação, legendas, dentre outros.

## **2.2 Etapas da pesquisa/instrumentos de coletas de dados**

A revisão bibliográfica consistiu no estudo sobre definições, propriedades e resultados da EDO de primeira ordem assim como os métodos de solução de EDO de primeira ordem: método do fator integrante e método de separação de variáveis e sobre os modelos matemáticos das aplicações referentes às EDO de primeira ordem. Foram utilizadas como obras principais os autores ZILL, Dennis G.; Farias, Alfredo Alves de; Cullen, Michael R.; Boyce e Diprima;

Referente à aplicação para Disseminação de uma doença em uma comunidade, Bassanezi (2002) menciona que os modelos para formas contínuas de crescimento ou decaimento exponencial são formulados pela equação  $\frac{dy}{dx} = ky$ ,

onde  $k$  é a constante de proporcionalidade de crescimento. Para esta aplicação foi utilizado além do método do fator integrante – que é um dos métodos propostos nessa pesquisa – o método de resolução pela equação de Bernoulli, pois a princípio a equação estava denotada como uma EDO não linear.

Se tratando de correntes elétricas em circuitos, as aplicações de EDO são inúmeras. O foco foi abordar os circuitos elétricos do tipo RL, na qual consiste de resistores e indutores. Com este tipo foi demonstrado a corrente elétrica no circuito.

Para a Lei de Resfriamento de Newton, que é baseada nos estudos de Isaac Newton, em sua teoria a taxa de diminuição da temperatura é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e o ambiente. Conforme Silva (2016),

A lei do resfriamento de Newton diz que  $\frac{dT}{dt}$ , à taxa de variação da temperatura de um corpo em relação ao tempo é proporcional a diferença da sua temperatura  $T$  e da Temperatura ambiente  $T_0$ , ou seja:  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$ . SILVA (2016, p.33)

Com isso, foi demonstrado a hora morte de um indivíduo utilizando a lei de resfriamento.

Foi apresentado também um problema relacionado ao escoamento de água em que foi criada uma situação problema em um edifício da qual foi utilizado um reservatório. Esta drenagem de fluido foi mostrada a partir de uma equação diferencial ordinária obtida pela equação de Torricelli e estimou o tempo necessário para escoamento de água até o ponto em que ocorresse o religamento automático de uma bomba de enchimento em caixa d'água.

O último problema envolveu o decaimento de um elemento radioativo. A partir de uma amostra de um elemento radioativo foi criado uma situação hipotética para estimar o tempo necessário para que se alcançasse a meia-vida desse elemento.

## CAPITULO 3: APRESENTAÇÃO E ANALISE DOS RESULTADOS

### 3.1. Drenagem de um Fluido através de um Orifício

Durante a vida acadêmica sempre surgem perguntas relacionadas a aplicação dos cálculos que são ensinados no decorrer dos períodos. Nesse sentido, a aplicação a seguir será uma aplicação direta de equação diferencial dentro da engenharia civil, mais precisamente no contexto de prevenção de incêndio e sistema hidráulico de uma edificação.

Dessa forma, foi criada uma situação hipotética de um condomínio residencial em que se faz necessário a utilização de uma equação diferencial para o cálculo do tempo de escoamento de determinado volume de água, ou seja, estudar a variação do volume em função do tempo.

Tal condomínio possui um total de 18 apartamentos, sendo a média de consumo por apartamento de 500 litros de água, totalizando um valor de 9.000 litros de água consumidos por dia por esse condomínio. Dessa maneira, pelo consumo de água e pela estrutura do condomínio a ABNT NBR-13714 diz que este é classificado como A-2, tipo I, e por este motivo é obrigatório que haja um reservatório de no mínimo 9.600 litros para o plano de prevenção e Proteção Contra Incêndio – PPCI.

**Situação-problema:** Esse condomínio dispõe de um reservatório de 20.000 litros de água onde 10.000 litros são para a reserva técnica para combate a incêndio conforme norma, e para consumo do condomínio, mais 10.000 litros. Para que nunca seja utilizado o limite da reserva, a boia de acionamento do reservatório fica a marca de 3.000 litros acima do nível de consumo. Portanto a situação crítica a ser calculada é o tempo necessário para escoar 7.000 litros de água da caixa mantendo a vazão máxima constante com a saída da caixa de 1 in (uma polegada). Tempo este necessário para religar a bomba de enchimento da caixa.

#### **Solução:**

Para se chegar à EDO para a resolução do problema partiremos da equação de Torricelli, essa equação é definida por

$$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S,$$

onde,

$V$  = Velocidade final em m/s;

$V_0$  = Velocidade inicial em m/s;

$a$  = Aceleração;

$\Delta S$  = Variação de deslocamento;

Extraindo a raiz quadrada obtemos,

$$V = \pm \sqrt{V_0^2 + 2a\Delta S}$$

Como se trata de valor de velocidade utilizaremos somente a raiz positiva, assim,

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2a\Delta S}$$

$$V = \sqrt{2a \left( \frac{V_0^2}{2a} + \Delta S \right)}$$

Consideraremos  $a = g$ , pois a aceleração que estará agindo será somente a aceleração gravitacional. E, sabendo que  $\Delta S$  é o deslocamento, podemos dessa forma considera-lo como uma altura  $h$ , assim reorganizando a última equação acima, obtemos

$$V_t = \sqrt{2g \left( h + \frac{V_0^2}{2g} \right)}.$$

Nota-se que é possível assumir  $V_0 = 0$ , pois a velocidade inicial pode ser qualquer. Dessa forma, a última equação anterior fica da forma

$$V = C_v \sqrt{2gh}.$$

onde,

$V$  = Velocidade real média do líquido de saída do orifício

$C_v$  = Coeficiente de velocidade.

Agora, sem perda de generalidade tomando  $C_v = 1$ , obteremos

$$V = \sqrt{2gh} \quad (3.1)$$

Pela equação (3.1) afirma-se que a velocidade do fluxo da água que passa por um pequeno ofício é igual a velocidade de um corpo em queda livre, ou seja, para o nosso problema, é a queda da água de uma altura  $h$  sofrendo aceleração através da gravidade  $g$ .

Portanto, considerando a situação hipotética do problema podemos determinar que a razão entre a velocidade obtida por Torricelli e uma área  $A_0$ , sendo essa área a saída do ofício, mostra que o volume de água por segundo, que sai do reservatório é igual a  $A_0\sqrt{2gh}$  assim, a derivada do volume em função do tempo é descrita como:

$$\frac{dV}{dt} = -A_0\sqrt{2gh}, \quad (3.2)$$

onde,

$\frac{dV}{dt}$  = Taxa de variação do volume em relação ao tempo.

$A_0$  = Área do cano de saída da água na caixa em  $m^2$

$g$  = Gravidade em  $m/s^2$ .

$h$  = Altura da caixa em m.

Sabendo a equação diferencial para resolver o problema, iremos agora descrever os dados,

Volume da caixa: 20.000 litros =  $20 m^3$  (dado pelo problema)

Considerando,

Diâmetro da caixa: 2,5 m

Raio: 1,25 m

Agora, supondo que o reservatório tem formato de um cilindro, podemos a partir dos dados acima calcular a altura  $h$ ,

$$V_{cil} = \pi R^2 h$$

$$20 = \pi(1,25)^2 h$$

$$h = \frac{20}{\pi(1,25)^2}$$

$$h = 4,07 \text{ m}$$

Já para calcular a área transversal do cano de pescador, que corresponde a área do orifício por onde a água irá escoar, teremos

Para o cano

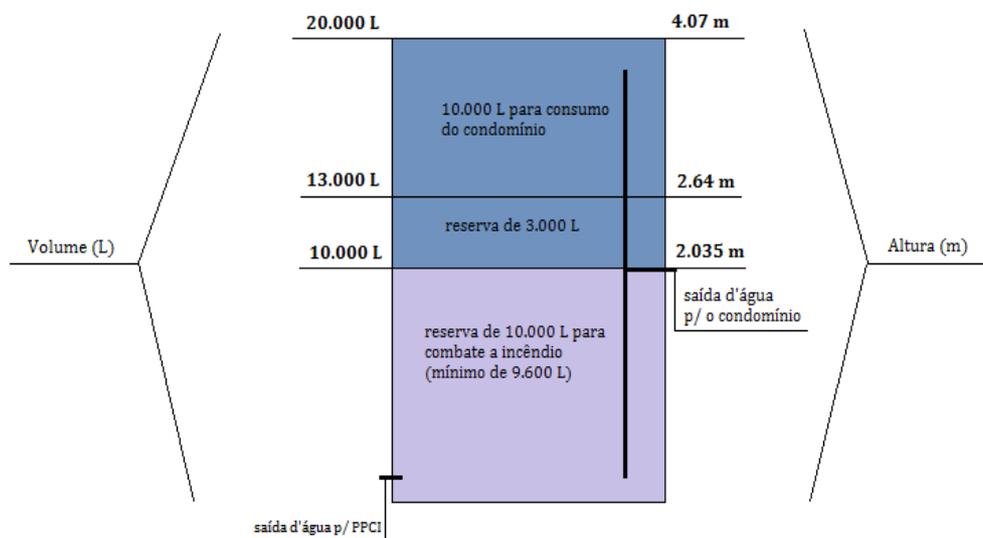
Diâmetro do cano: 1 in = 2,54 cm = 0,0254 m

Área do cano:  $A_0 = \pi R^2 \rightarrow A_0 = \pi(0,0127)^2 \rightarrow A_0 = 5,064 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

Altura para o nível de 10.000 litros: 2,035 m

Altura para o nível de 13.000 litros: 2,64 m

Figura 1. Esquema dos níveis de volume e altura no reservatório de água. Representado a esquerda, os valores dos volumes de água. E representado a direita, a altura para os respectivos volumes.



Fonte: AUTOR (2023)

Como pode ser observado na figura 1, o esquema mostra o pescador de água que consiste em um cano instalado paralelamente a parede do reservatório onde na marca de 10.000 litros existe uma conexão do tipo "T" onde a água escoar para a lateral do reservatório, esse sistema garante que o nível de água nunca passará o nível da reserva técnica para o PPCI.

Dessa forma, ainda pela figura 1, observamos que a altura para calcular o escoamento de 7.000 litros de água solicitado no problema, é a altura de 13.000 litros, ou seja,  $h = 2,64 \text{ m}$ .

Sabendo os valores de  $h$ ,  $A_0$  e considerando  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  podemos resolver a equação (3.1) pelo método de separação de variáveis apresentado na equação (1.3). Assim, teremos

$$\frac{dV}{dt} = -A_0\sqrt{2gh}$$

$$\int dV = - \int A_0\sqrt{2gh} dt$$

$$\int dV = -A_0\sqrt{2gh} \int dt$$

$$V = -A_0\sqrt{2gh} \cdot t + k$$

$$V = -(5,064 \cdot 10^{-4})^2 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,64} \cdot t + k$$

$$V = -3,644 \cdot 10^{-3} \cdot t + k \quad (3.3)$$

Assim foi obtida a equação geral do volume para qualquer instante de tempo. Mas conforme a o exemplo (1.9) este caso é um PVI (problema de valor inicial), pois já temos um valor do volume inicial que é  $20 \text{ m}^3$  e também o tempo. Como esse volume é o volume máximo do reservatório podemos considerar que  $t = 0$ , desta forma pela resolução de um PVI obteremos o valor da constante  $k$ . Aplicando as condições iniciais na equação (3.3),

$$20 = -(3,644 \cdot 10^{-3}) \cdot 0 + k$$

$$k = 20$$

Substituindo o valor de  $k$  na equação (3.3), teremos

$$V = 3,644 \cdot 10^{-3} \cdot t + 20 \quad (3.4)$$

Por fim, para descobrirmos o tempo de escoamento de 7.000 litros, substituiremos  $V = 7$  na equação (3.4).

$$V = -3,644 \cdot 10^{-3} \cdot t + 20$$

$$7 = -3,644 \cdot 10^{-3} \cdot t + 20$$

$$7 - 20 = -3,644 \cdot 10^{-3} \cdot t$$

$$-13 = -3,644 \cdot 10^{-3} \cdot t$$

$$t = \frac{-13}{-3,644 \cdot 10^{-3}}$$

$$t = 3.569,47 \text{ s}$$

Para termos o tempo em minutos é necessário dividirmos por 60s. Assim,

$$t = \frac{3.569,47}{60}$$

$$t = 59,49 \text{ min}$$

Portanto, o tempo necessário para escoar 7.000 litros de água e com isso religar a bomba de enchimento da caixa é de 59,49 minutos.

### **3.2. Disseminação de uma Doença**

Crescimento Populacional e equação diferencial ordinária são dois elementos de estudo que quando combinados possuem uma grande aplicação em diversas áreas de ciências e engenharia. E quando trabalhamos com a análise de

um crescimento populacional e EDO de primeira ordem, nos deparamos com modelos matemáticos construídos para obtenção de dados a serem comparados com a realidade.

Dessa forma, podemos concluir que os modelos matemáticos são de suma importância para análise do objeto estudado.

A importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas. BASSANEZI (2002, p. 20)

Considerando essa importância e sua grande aplicação, utilizaremos um modelo matemático para analisar a propagação de uma doença em uma população após determinado período de tempo.

**Situação-problema:** uma doença, espalha-se em uma comunidade por meio do contato entre as pessoas. Essa comunidade tem uma população fixa de  $n$  pessoas. Supondo que, uma pessoa infectada seja introduzida na comunidade, como será a disseminação dessa doença?

**Solução:**

Considerando,

$x(t)$  = número de pessoas que contraíram a doença;

$y(t)$  = número de pessoas que ainda não foram expostas à doença;

$\frac{dx}{dt}$  = taxa de disseminação da doença;

Como, a taxa é proporcional ao número de encontros ou interações entre os grupos de pessoas, então  $\frac{dx}{dt} = kxy$ , onde  $k$  é a constante de proporcionalidade.

Sabe-se que a população é fixa, então  $x + y = n$ , e, como uma pessoa infectada foi introduzida na comunidade, teremos que  $x + y = n + 1$ . Por esse motivo, teremos uma condição inicial que para quando o tempo for 0 terá 1 pessoa infectada, ou seja,  $x(0) = 1$ . Com isso, pelo exemplo (1.9) temos um PVI (problema de valor inicial).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kxy \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Dessa forma, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kxy & (I) \\ x + n = n + 1 & (II) \end{cases}, \text{ para } x(0) = 1 \quad \text{onde } n \in \mathbb{N}$$

Isolando  $y$  em (II), temos que  $y = n + 1 - x$ . Substituindo esse valor de  $y$  em (I) temos,

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x)$$

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1) - kx^2$$

$$\frac{dx}{dt} - kx(n + 1) = -kx^2 \quad (3.5)$$

Como a EDO é não linear utilizaremos o método de Bernoulli. Partindo da equação (1.4), será utilizado uma mudança de variável na qual,  $w = x^{1-n}$ , e observando a potência na equação (3.5) temos que  $n = 2$ , então  $w = x^{-1}$ . Aplicando em (3.5) a equação de Bernoulli, que possui fórmula geral dada por:

$$w' + (1 - n)p(t)w = (1 - n)f(t)$$

Vamos obter,

$$w' + k(n + 1)w = k \quad (3.6)$$

Como a equação (3.6) já se apresenta com uma EDO linear de 1° ordem, podemos resolver utilizando o método do fator integrante conforme equação (1.2). O fator integrante é dado por:

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}$$

$$\mu(t) = e^{\int k(n+1) dt}$$

$$\mu(t) = e^{k(n+1)t}$$

Tendo encontrado o fator integrante, multiplicaremos em ambos os termos da equação (3.6),

$$w'e^{k(n+1)t} + k(n+1)we^{k(n+1)t} = ke^{k(n+1)t} \quad (3.7)$$

É possível observar que o 1º termo da equação (3.7) é a derivada do produto, então pela equação (1.8), obtemos

$$\frac{d}{dt}(we^{k(n+1)t}) = ke^{k(n+1)t} \quad (3.8)$$

Integrando os dois termos da equação (3.8) em relação a  $t$  e aplicando o teorema fundamental do cálculo no 1º termo, temos

$$\int \frac{d}{dt}(we^{k(n+1)t}) = \int ke^{k(n+1)t}$$

$$we^{k(n+1)t} = \frac{ke^{k(n+1)t}}{k(n+1)} + c$$

$$w = \frac{ke^{k(n+1)t}}{ke^{k(n+1)t} \cdot (n+1)} + \frac{c}{e^{k(n+1)t}}$$

$$w = \frac{1}{(n+1)} + ce^{-k(n+1)t} \quad (3.9)$$

Pela resolução da equação (3.9) é possível observar que retornamos para a variável de origem, e como temos que  $w = x^{-1}$ , temos,

$$x = \frac{1}{w}$$

$$x(t) = \frac{(n+1)}{1 + c(n+1)e^{-k(n+1)t}}$$

Como  $(n+1)$  pertence aos  $\mathbb{N}$ , e  $c$  é uma constante, temos que a multiplicação será uma constante, dessa forma chamaremos  $c_1 = c(n+1)$ , com isso,

$$x(t) = \frac{(n+1)}{1 + c_1 e^{-k(n+1)t}} \quad (3.10)$$

Por se trata de um problema de PVI (problema de valor inicial), é possível determinar a constante  $c_1$ .

para  $x(0) = 1$ , temos que

$$x(0) = \frac{(n+1)}{1 + c_1 e^{-k(n+1)0}}$$

$$1 = \frac{n+1}{1 + c_1}$$

$$1 + c_1 = n + 1$$

$$c_1 = n$$

Substituindo o valor de  $c_1$  na equação (3.10),

$$x(t) = \frac{(n+1)}{1 + n e^{-k(n+1)t}} \quad (3.11)$$

Como o nosso objetivo é calcular a disseminação da doença, precisamos calcular a constante de proporcionalidade  $k$ , para isso iremos supor valores, sendo esses valores hipotéticos. Consideraremos que após 7 dias a pessoa contaminada ser inserida na comunidade, o número de infectados será de 3 pessoas e que a população fixa é de 1000 pessoas, ou seja,  $x(7) = 3$  e  $n = 1000$ . Substituindo os valores em (3.11), temos

$$x(7) = \frac{1000 + 1}{1 + 1000 e^{-k(1000+1)7}}$$

$$3 = \frac{1001}{1 + 1000 e^{-k(1000+1)7}}$$

$$k \approx 0,000157$$

Substituindo o valor de  $k$  em (3.11), ter-se-á

$$x(t) = \frac{(n + 1)}{1 + ne^{-0,000157(n+1)t}}$$

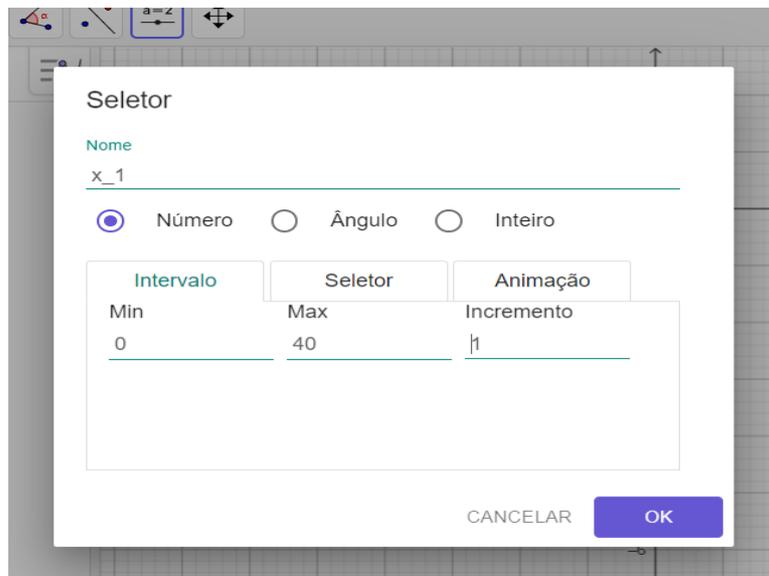
Dessa forma, encontramos a equação para qualquer instante de tempo. Se quisermos saber por exemplo, quantos pessoas estarão infectadas em 29 dias, para o mesmo valor de  $n=1000$ . Temos,

$$x(29) = \frac{(1000 + 1)}{1 + 1000e^{-0,000157(1000+1)29}} \approx 87 \text{ pessoas}$$

É importante ressaltar que, a base de pessoas infectadas, foi devido a condição usada de que para 7 dias teriam 3 pessoas, para uma população fixa de 1000 pessoas. Se for usado outra condição, com valores distintos, poderá ser encontrado valores diferentes.

Para visualização da projeção do gráfico, foi utilizado o software geogebra. Para tal projeção, é necessário ser inserido alguns comandos na ferramenta. Primeiramente, é criado um controle deslizante chamado de  $x_1$ , este primeiro vai estar em função do tempo, dessa forma, usaremos um limite de 0 a 40 dias, com um incremento 1, ou seja, será projetado dia a dia.

Figura 2. Comando no software Geogebra para atribuir o controle os limites de mínimo e máximo e o incremento.

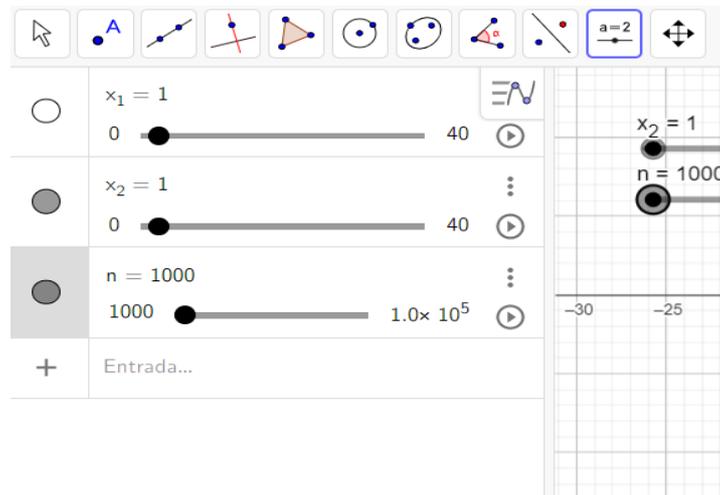


Fonte: AUTOR (2023)

Para o segundo passo será inserido um novo controle deslizante  $x_2$ , este terá as mesmas funções do anterior e também estará em função do tempo. O motivo de ser utilizado dois controles deslizantes em função do tempo, é pelo fato de que quando a plotagem seja feita, seja de ponto a ponto em vez de ser plotado de uma única vez, e somente um controle deslizante em função do tempo não satisfaria esse requisito.

O próximo comando a ser feito é o controle deslizante  $n$  para a população. Para este será usado um valor mínimo de 1000 e um máximo de 100000, com um incremento de 1000. Foi colocado esses valores por que estamos considerando uma cidade pequena.

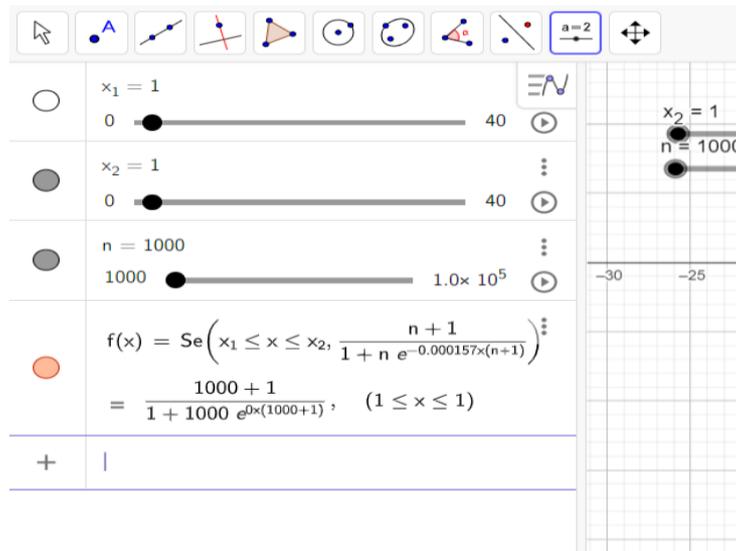
Figura 3. Os três controles deslizantes atribuídos: para os dias ( $x_1$  e  $x_2$ ) e o terceiro a população ( $n$ )



Fonte: AUTOR (2023)

Após realizar esses comandos, será descrita a função, que foi o resultado da EDO calculada. A mudança que teremos em relação a descrita no trabalho é que no geogebra em vez de  $x(t)$  teremos uma  $f(x)$  na qual x será o tempo. E nessa função teremos uma condição, na qual esteja entre os pontos deslizantes que estão em função do tempo.

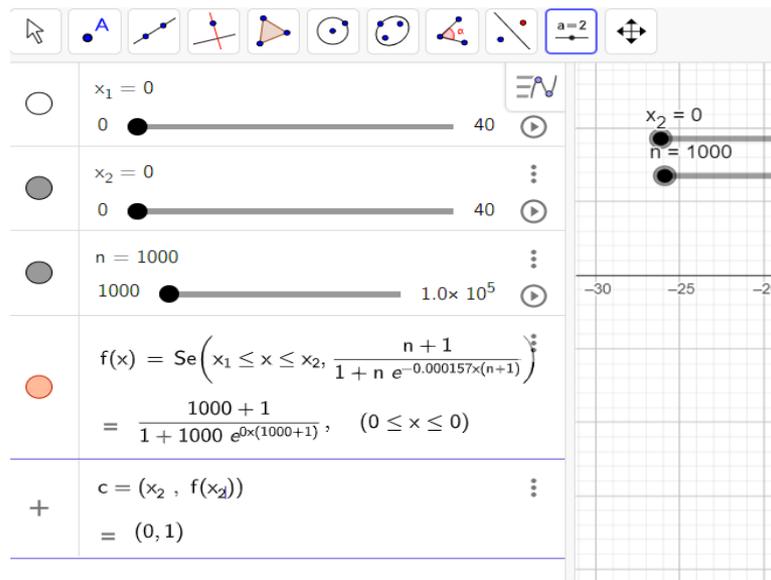
Figura 4. Atribuição do quarto comando para a equação obtida com o modelo e a condição de a função estar entre os controles deslizantes ( $x_1$  e  $x_2$ ) para a plotagem ponto a ponto.



Fonte: Autor (2023)

Por último, como temos uma condição inicial no problema de ter sido inserida uma pessoa infectada na população, será preciso descrever essa condição na ferramenta. Com isso, colocaremos um ponto com tal condição.

Figura 5. Atribuição do quinto comando atribuído onde é inserido o ponto C com a condição inicial de no tempo igual a 0 a quantidade de infectados ser igual a 1.

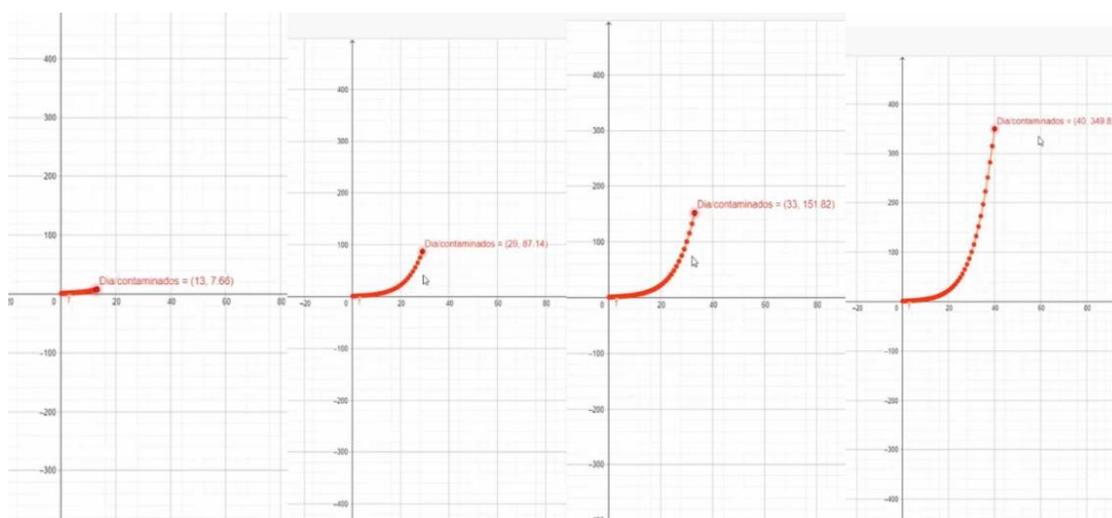


Fonte: AUTOR (2023)

Ao ser inserido esse ponto, nas configurações é necessário habilitar o rastro para que então observar o comportamento do gráfico. Após isso é possível realizar a animação no controle deslizante  $x_2$  e o gráfico será construído ponto a ponto.

Outras configurações podem ser inseridas afim de facilitar a visualização da projeção, como por exemplo, colocar o rótulo no ponto c com legenda e valor para ver a quantidade de contaminados ao decorrer dos dias. Foi uma configuração realizada, mas é opcional.

Figura 6. Projeções gráficas em quatro tempos distintos representando o comportamento gráfico para a disseminação da doença.



Fonte: AUTOR (2023)

É possível visualizar que os gráficos da figura 6 tem um crescimento exponencial e gradativo, ou seja, ao decorrer dos dias o número de infectados fica cada vez maior. Observando os gráficos na ordem da esquerda para direita, onde o eixo x representa a quantidade de dias e o eixo y representada a quantidade de infectados, temos que no primeiro gráfico em 13 dias são aproximadamente 8 infectados. No segundo gráfico, em 29 dias tem aproximadamente 87 infectados. No terceiro gráfico, em 33 dias tem aproximadamente 152 infectados. E no quarto gráfico temos o limite máximo estipulado nos comandos de 40 dias que tem aproximadamente 350 infectados.

Realizando a comparação com valor obtido pelos cálculos analíticos, pode-se observar que tanto o valor obtido na equação quanto o que está plotado no gráfico, são aproximadamente os mesmos já que ambos, para 29 dias a quantidade de contaminados é de aproximadamente 87 pessoas. Isso implica que o modelo é aceitável, mesmo que passível de erros.

Vale ressaltar que esses dados foram obtidos de forma hipotética, onde na vida real o comportamento pode ser mais acelerado ou mais lento, dependendo dos fatores que influenciam no processo de contágio como, a população total e a interação dos grupos, que pode ser maior ou menor do que o apresentado no

problema. Um outro fator é que em uma população real pode haver uma variação no número de pessoas, ou seja, a população não tem um valor fixo.

### 3.3. Circuito Elétrico em Série

Em física elétrica, podemos encontrar aplicações das EDO's de primeira ordem para modelar alguns tipos de circuitos elétricos, envolvendo os seus componentes: Resistência, Indutores e Capacitores.

Mas, o que é de fato, um circuito elétrico?

Um circuito elétrico é descrito como um caminho fechado no qual os elementos elétricos do circuito estão ligados por um meio condutor. Uma corrente elétrica passa por esses componentes causando a diferença de potencial em cada componente. (IRWIN, NELMS, 2013 apud ARAÚJO, 2014, p.38)

Tendo sido definido o campo elétrico, temos o que é chamado de corrente elétrica, ou seja, quando criamos um campo elétrico, de alguma maneira, o que nos permite conhecer a quantidade de carga que atravessa a seção transversal de um condutor é a corrente elétrica. Araújo (2014), nos diz que a corrente elétrica pode ser definida como o fluxo ordenado de partículas portadoras de carga elétrica que se desloca de um polo de um componente para o outro.

Um circuito elétrico pode ser classificado de duas formas: circuito de correntes contínuas ou circuitos de CC e circuitos de correntes alternadas. O circuito em correntes contínuas são os que possuem elétrons que se movimentam no mesmo sentido, já os circuitos em correntes alternadas possuem elétrons que não tem uma polaridade definida, ou seja, não se movimentam na mesma direção já que mudam sempre de sentido.

Dependendo dos elementos que compõem o circuito, este terá com uma determinada nomenclatura de acordo com sua formação. Para circuitos formados por resistores e capacitores, denominamos circuitos do tipo RC, quando são formados por resistores e indutores denominamos circuitos do tipo RL, quando são formados por indutores e capacitores são denominados do tipo LC e quando são formados por resistores, indutores e capacitores são denominados do tipo RLC. Nesta pesquisa vamos analisar apenas o circuito do tipo RL (resistor-indutor).

Uma outra classificação dos circuitos diz respeito à disposição dos componentes, de maneira geral, a forma como esse circuito é montado. Essa ligação pode ser feita por dois arranjos, sendo o arranjo em paralelo e o arranjo em série. O arranjo a ser utilizado será o arranjo em série.

Sabendo o que é circuito elétrico é necessário saber o que é corrente elétrica, já que é através dela que um circuito elétrico pode funcionar.

Corrente Elétrica pode ser descrita como o movimento de partículas carregadas. Mas isso não implica que todo movimento de partículas pode ser definido com uma corrente. Para que exista corrente elétrica em um circuito, é necessário que haja uma fonte de tensão para assim causar uma movimentação de partículas a ponto de criar uma corrente. Halliday, Resnick e Walker (2016) nos define que se uma carga  $dq$  passa por um plano, em um intervalo de tempo  $dt$  então a corrente elétrica pode ser expressa por  $I = \frac{dq}{dt}$ . Ou seja, a corrente é gerada pela taxa de carga por unidade de tempo.

Santos (2017, p.15) menciona que “(...) em um circuito em série contendo somente um resistor e um indutor, a lei das malhas de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão no indutor  $L \frac{dI}{dt}$  e da queda de tensão no resistor  $R.I$  é igual à voltagem  $E(t)$  no circuito”. Assim, o autor nos define a equação,

$$L \frac{dI}{dt} + R.I = E, \quad (3.12)$$

onde,

$L$  = Indutância;

$I$  = Corrente Elétrica;

$R$  = Resistência Elétrica;

$E$  = Fonte de Tensão;

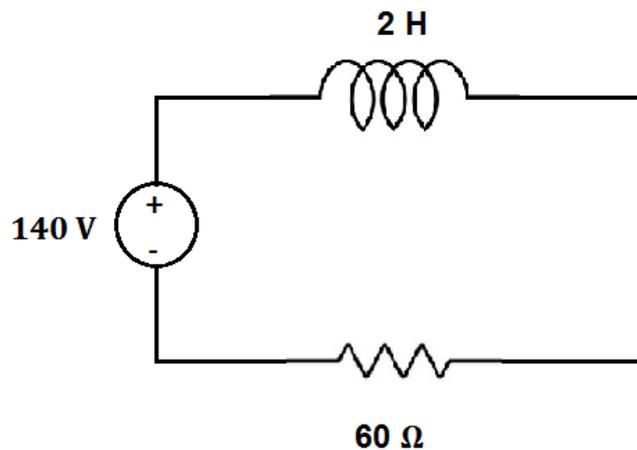
$\frac{dI}{dt}$  = Taxa de variação da Corrente Elétrica em relação ao tempo;

Os dados informados acima possuem suas unidades de medidas. Pelo Sistema Internacional (SI) a unidade de medida da Indutância ( $L$ ) é Henry, cujo o símbolo é H, a unidade de medida da resistência elétrica ( $R$ ) é Ohm, cujo símbolo

é  $\Omega$ , a unidade de medida da Tensão (E) é Volts, cujo o símbolo é V e a unidade de medida da corrente elétrica (I) é Ampere, cujo o símbolo é A.

**Situação-problema:** Dado um circuito do tipo RL, um resistor de  $60 \Omega$  e um indutor de  $2 \text{ H}$  são conectados em série com uma fonte de  $140 \text{ V}$  como mostrado na figura 7. Considerando que inicialmente não há corrente no circuito, determine a equação  $I(t)$  para este circuito.

Figura 7. Circuito do tipo RL descrito no problema.



Fonte: AUTOR (2023)

Para a solução esta aplicação pode ser obtida tanto pelo método de fator integrante quanto pelo método de separação de variáveis. Dessa forma, será feito a solução pelos dois métodos pois ao final ambos descreverão a mesma equação geral.

### **Solução 1: Método do Fator Integrante**

Partindo da equação (3.12) dividiremos os termos da equação pela indutância (L), com isso obtemos

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \quad (3.13)$$

Visto a equação, é notável que representa uma EDO linear de 1º ordem, dessa forma é possível utilizar o método do fator integrante apresentado na equação (1.2). Para encontrar o fator integrante temos

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L} dt}$$

$$\mu(t) = e^{\frac{R}{L}t}$$

Tendo encontrado o fator integrante, multiplicaremos em ambos os termos da equação (3.13) por  $e^{\frac{R}{L}t}$ , obtendo:

$$\frac{dI}{dt} e^{\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L} I e^{\frac{R}{L}t} = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t}$$

$$\frac{d}{dt} \left( I e^{\frac{R}{L}t} \right) = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} \quad (3.14)$$

Integrando os dois termos da equação (3.14) em relação a t e aplicando o teorema fundamental do cálculo no 1º termo, temos

$$\int \frac{d}{dt} \left( I e^{\frac{R}{L}t} \right) = \int \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t}$$

$$I e^{\frac{R}{L}t} = \frac{E}{L} \cdot \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C$$

$$I e^{\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C$$

$$I = \frac{E e^{\frac{R}{L}t}}{R e^{\frac{R}{L}t}} + \frac{C}{e^{\frac{R}{L}t}}$$

$$I(t) = \frac{E}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.15)$$

Como  $I(0) = 0$ , os valores da resistência, fonte de tensão e indutor são respectivamente,  $60 \Omega$ ,  $140 \text{ V}$  e  $3 \text{ H}$ . Com esses dados é possível obter o valor da constante  $C$ . substituindo os valores na equação (3.15), temos

$$I(0) = \frac{140}{60} + C e^{-\frac{60}{3}0}$$

$$0 = \frac{140}{60} + C e^0$$

$$C = -\frac{7}{3}$$

Substituindo o valor da constante  $C$  na equação (3.15), temos

$$I(t) = \frac{E}{R} - \frac{7}{3} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Afim de determinar a solução geral de  $I(t)$  que o problema está solicitando, substituímos os dados anteriores informados e encontrados, obtendo:

$$I(t) = \frac{140}{60} - \frac{7}{3} e^{-\frac{60}{3}t}$$

$$I(t) = \frac{7}{3} - \frac{7}{3} e^{-20t}$$

$$I(t) = \frac{7}{3} (1 - e^{-20t}) \text{ A} \quad (3.16)$$

Onde  $I(t)$  é a solução geral que representa a corrente elétrica para qualquer instante de tempo.

### **Solução 2: Método de Separação de Variáveis**

Partiremos da equação (3.13), para então utilizar o método de separação de variáveis descrito na equação (1.3).

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{RI}{L}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{E - RI}{L}$$

$$\frac{L}{(E - RI)}dI = dt$$

$$\int \frac{L}{(E - RI)}dI = \int dt$$

$$L \int \frac{1}{(E - RI)}dI = \int dt \quad (3.17)$$

Observando a equação (3.17), conclui-se que será necessário utilizar uma mudança de variável no 1º termo para assim resolver a integral. Considerando  $u = (E - RI)$ , temos que  $-\frac{du}{R} = dI$ . Aplicando a mudança de variável na equação (3.17), obtemos

$$L \int \frac{1}{u} \cdot -\frac{du}{R} = \int dt$$

$$-\frac{L}{R} \int \frac{1}{u} du = \int dt$$

$$-\frac{L}{R} \ln u + c = t \quad (3.18)$$

Pela resolução da equação (3.18) é possível observar que retornamos para a variável de origem, pela mudança de variável  $u = (E - RI)$ , obtemos:

$$-\frac{L}{R} \ln(E - RI) + c = t$$

$$-\frac{L}{R} \ln(E - RI) = t - c$$

$$\ln(E - RI) = -\frac{R}{L}(t + c)$$

$$(E - RI) = e^{-\frac{R}{L}(t+c)}$$

$$E - RI = e^{-\frac{R}{L}t} \cdot e^{-\frac{R}{L}c} \quad (3.19)$$

Como  $\frac{R}{L}$  pertence aos  $\mathbb{N}$  e  $c$  é uma constante, a multiplicação entre eles será uma constante. Dessa forma, podemos considerar que  $A = e^{-\frac{R}{L}c}$ . Substituindo em (3.19) obtemos:

$$E - RI = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$RI = E - Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I(t) = \frac{E - Ae^{\frac{R}{L}t}}{R} \quad (3.20)$$

Para encontramos o valor da constante  $A$ , usaremos os valores informados no enunciado do problema. Dessa forma, para  $I(0) = 0$  temos que  $R = 60 \Omega$ ,  $E = 140 \text{ V}$  e  $L = 3 \text{ H}$ . Substituindo esses valores em (3.20), temos

$$I(0) = \frac{140 - Ae^{-\frac{60}{3}0}}{60}$$

$$0 = \frac{140 - Ae^0}{60}$$

$$0 = \frac{140 - A}{60}$$

$$0 = 140 - A$$

$$A = 140$$

Substituindo o valor da constante A em (3.20), segue-se que:

$$I(t) = \frac{E - 140e^{-\frac{R}{L}t}}{R}$$

$$I(t) = \frac{E}{R} - \frac{140}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.21)$$

Para obtermos a solução geral  $I(t)$ , substituiremos os valores de resistência, indutância e fonte de tensão, na equação (3.21). Com isso obtemos:

$$I(t) = \frac{140}{60} - \frac{140}{60}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I(t) = \frac{7}{3} - \frac{7}{3}e^{-20t}$$

$$I(t) = \frac{7}{3}(1 - e^{-20t}) A \quad (3.22)$$

Onde  $I(t)$  é a solução geral que representa a corrente elétrica para qualquer instante de tempo.

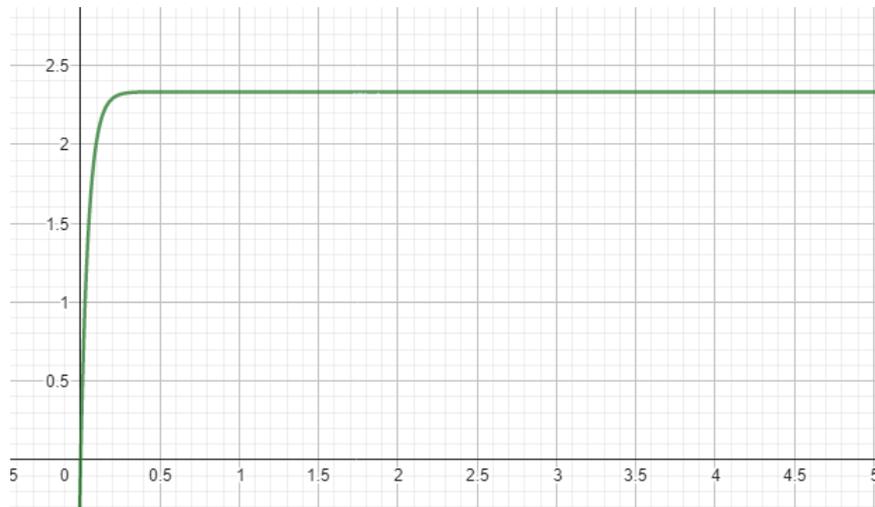
Se compararmos as equações (3.16) e (3.22), podemos concluir que mesmo sendo realizado a resolução por método distintos, obteve-se a mesma solução  $I(t)$ . Isso só foi possível pois a EDO linear de 1º ordem descrita em (3.12), está definida de tal forma que é possível atribuir os dois métodos.

Agora para uma melhor compreensão, a partir da equação (3.22) realizaremos uma análise gráfica com auxílio do software geogebra.

Primeiramente analisaremos o gráfico plotado da equação (3.22) para assim visualizar o comportamento da corrente elétrica em função do tempo. Logo em seguida, realizaremos uma análise da construção do gráfico.

Neste primeiro momento não será feito comandos e condições especiais, será descrito somente a equação. Dessa forma a partir do momento que a equação é descrita o gráfico já é plotado.

Figura 8. Representação gráfica que representa o comportamento da Corrente Elétrica em função do tempo.



Fonte: AUTOR (2023)

Na figura 8, temos que para o x representando a variação do tempo e para o eixo y o valor da corrente. Com isso, é possível observar que a corrente elétrica aumenta ao longo do tempo até o momento em que estabiliza e se mantém estável como é visível na figura. Ainda observando a figura pode-se visualizar que o aumento e estabilização se dão em menos de 1s, isso se explica pela movimentação dos elétrons ao ser inserido a fonte de tensão.

Agora será feito uma análise da construção do gráfico. Realizaremos uma análise mais detalhada, observando o tempo, valores da corrente elétrica e qual o valor aproximado da estabilização da corrente.

No software foi usado somente um ponto para realizar a construção. Isto ocorre devido o fato, de queremos observar o comportamento gráfico e a partir disso

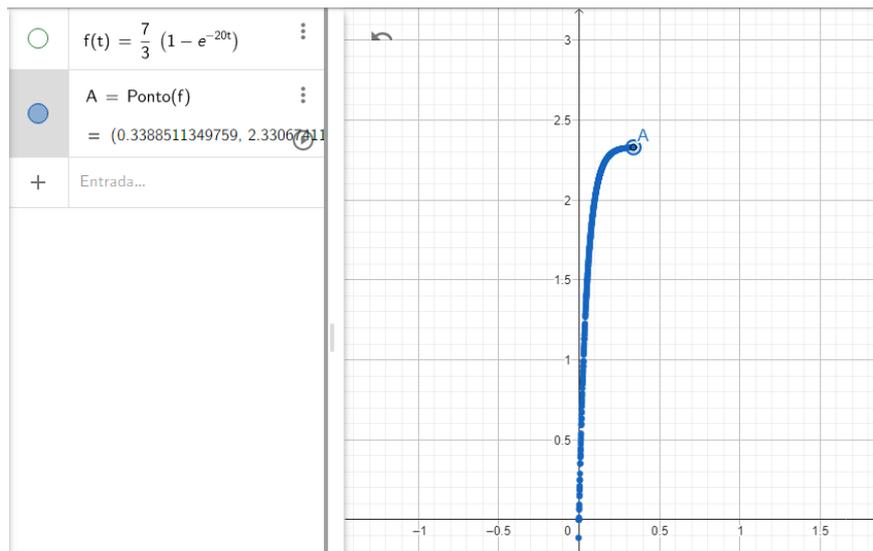
realizar a análise. Se a intenção requeresse demonstrar um comportamento ponto a ponto, poderia ser utilizado o comando deslizante, mas essa não era a intenção.

Para inserir o ponto, na aba de comando é primeiramente digitado a letra A, para nomeação. Logo em seguida ao ser digitado ponto, aparece o comando (Ponto()). Selecionado esse comando basta inserir qual as coordenadas entre parênteses. Como a intenção era descrever a função, foi inserido entre os parênteses a letra f pois a função está definida no software como  $f(t)$ . Assim que é inserido a letra f o ponto já é inserido no plano.

Tendo feito o comando do ponto, é necessário habilitar o rastro para ser possível visualizar a construção ao longo do tempo. Para essa habilitação basta clicar nos três pontos no canto direito do comando do ponto e apertar em “habilitar rastro”.

Após ter sido realizado todo esse processo já é possível realizar a animação para que o ponto possa realizar a trajetória da função. Nas configurações pode ser feito a troca de cor, tamanho do ponto e colocar legenda caso assim queira.

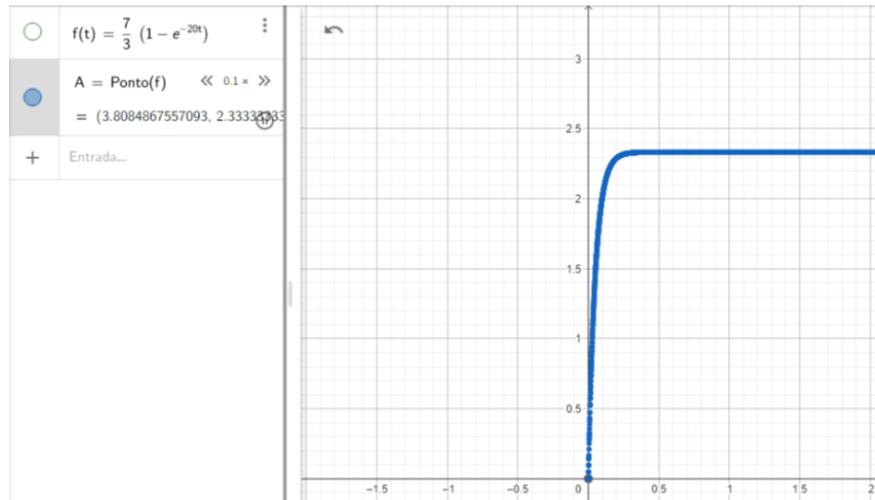
Figura 9. Representação do ponto A inserido para observar a construção do gráfico analisando o seu aumento até momento em que a corrente elétrica estabiliza.



Fonte: AUTOR (2023)

Na figura 9 pode-se observar a construção do gráfico até o ponto em que a corrente elétrica estabiliza. Observando as coordenadas é possível ver que para a corrente estabilizar, o tempo aproximado informado no software é de 0,338 s.

Figura 10. Representação gráfica demonstrando a estabilidade da corrente elétrica após o seu aumento.



Fonte: AUTOR (2023)

Já na figura 10 podemos observar a estabilidade da corrente no gráfico. Ao observar o valor do eixo y no comando do ponto, temos que o valor da corrente é de aproximadamente 2,333 A ou  $\frac{7}{3}$  A, e se for realizando uma comparação com a equação (3.16) observamos que este valor é próximo do valor limite esperado para o circuito de acordo com a equação obtida. Ou seja, se aplicamos na equação (3.16) por exemplo o valor aproximado de quando a corrente se estabiliza, 0,338 s, obteremos o valor de 2,3306 A. Sendo que o valor mostrado no software é aproximadamente o mesmo, como pode ser visualizado na figura 9. Estas análises demonstram que o modelo obtido é válido.

### 3.4. Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton, está entre uma das aplicações das EDO's que são utilizadas para resolver problemas que envolvem variação de temperatura.

Esta forma de aplicação é ligada diretamente a física, mas cálculos voltados para as leis de temperatura são de grande utilidade em várias ciências, alguns exemplos são os utilizados nas engenharias, na variação de temperatura de uma simples xícara de café durante o seu

resfriamento ou no derretimento de uma bola de sorvete, ou ainda no processo de resfriamento de um bolo, entre outras aplicabilidades deste modelo. (ALITOLIF, 2011, p.18)

A Lei de resfriamento de Newton descreve que a taxa de diminuição da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e o meio ambiente. Dessa forma, descrevendo como equação, temos

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a), \quad (3.23)$$

Onde,

$\frac{dT}{dt}$  = Taxa de variação de temperatura com relação ao tempo;

$k$  = Constante de proporcionalidade;

$T$  = Temperatura corporal;

$T_a$  = Temperatura ambiente;

Como a pesquisa está trabalhando com resfriamento de um corpo humano, temos os valores médios de temperatura corporal que podem ser mantidos entre 97,7 °F e 98,6 °F (36,5 °C e 37 °C), dependendo do organismo, fatores internos (febre, alterações hormonais, etc.) e fatores externos (temperatura ambiente, atividade física, etc.). Então podemos dizer que mesmo após o corpo humano ir a óbito o seu resfriamento é gradual, ou seja, assim como em vida, o corpo se mantém em temperatura estável às transformações do ambiente, e após o decesso dos órgãos, o metabolismo desacelera progressivamente, dependendo de diferentes fatores que influenciam no resfriamento, e conseqüentemente na descrição matemática.

**Situação-problema:** A polícia chega ao local de um assassinato, às 1 horas e 30 minutos da madrugada e imediatamente registram a temperatura do corpo, que no momento é de aproximadamente 85 °F, e inspecionam completamente o local. Após terminarem a inspeção, às 3 horas e 30 minutos da manhã, a polícia novamente verifica a temperatura do corpo, que cai para 82 °F. Supondo que, a temperatura da cena do crime tenha permanecido estável a 81 °F, determine a hora da morte.

**Solução:**

A resolução será com base na lei de resfriamento para a partir dela obter-se uma equação que possa determinar a hora da morte.

Inicialmente, será substituído o valor da temperatura ambiente na equação (3.23), e após isso, colocar-se-á os dois termos da equação em função do tempo, para então utilizar o método de separação de variáveis conforme a equação (1.3).

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 81)$$

$$\frac{dT}{(T - 81)} = k dt$$

$$\int \frac{1}{(T - 81)} dT = k \int dt$$

$$\ln|T - 81| + c_1 = kt + c_2$$

$$\ln|T - 81| = kt + c_1 + c_2$$

$$\ln|T - 81| = kt + c$$

$$|T - 81| = e^{kt+c}$$

$$T - 81 = \pm e^{kt} \cdot e^c \quad (3.24)$$

Considerando  $\pm e^c = A$  e substituindo em (3.24), temos

$$T(t) = 81 + Ae^{kt} \quad (3.25)$$

O problema nos dar uma informação inicial de que a temperatura do corpo, após a chegada da polícia, é de 85 °F. Dessa forma, considerando que  $T = 85$  °F para  $t = 0$ , e atribuindo esse valor em (3.25), é possível encontrar o valor da constante A,

$$85 - 81 = Ae^{k0}$$

$$4 = Ae^0$$

$$A = 4$$

Substituindo o valor de A em (3.25), temos

$$T - 81 = 4e^{kt}$$

$$T = 81 + 4e^{kt}$$

$$T(t) = 81 + 4e^{kt} \quad (3.26)$$

Outra informação fornecida no problema, é que após duas horas, a temperatura do corpo caiu para 82 °F, ou seja,  $t(2) = 82$  °F. Substituindo em (3.26), temos,

$$T(t) = 81 + 4e^{kt}$$

$$T(2) = 81 + 4e^{k \cdot 2}$$

$$82 = 81 + 4e^{2k}$$

$$82 - 81 = 4e^{2k}$$

$$e^{2k} = \frac{1}{4}$$

$$e^k = \frac{1}{2} \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.26), temos

$$T(t) = 81 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad (3.28)$$

Tendo obtido a equação, é possível calcular aproximadamente a hora da morte. Para isso, supondo que, o indivíduo estivesse sadio, pode ser considerado a temperatura de 97,7 °F. Nessa condição, substituindo o valor da temperatura em (3.28) temos

$$T(t) = 81 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$97,7 = 81 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$97,7 - 81 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$\frac{97,7 - 81}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$4,17 = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Aplicando o logaritmo natural, temos

$$\ln(4,17) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$\ln(4,17) = t \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$t = \frac{\ln(4,17)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$t \approx -2,06 \text{ horas}$$

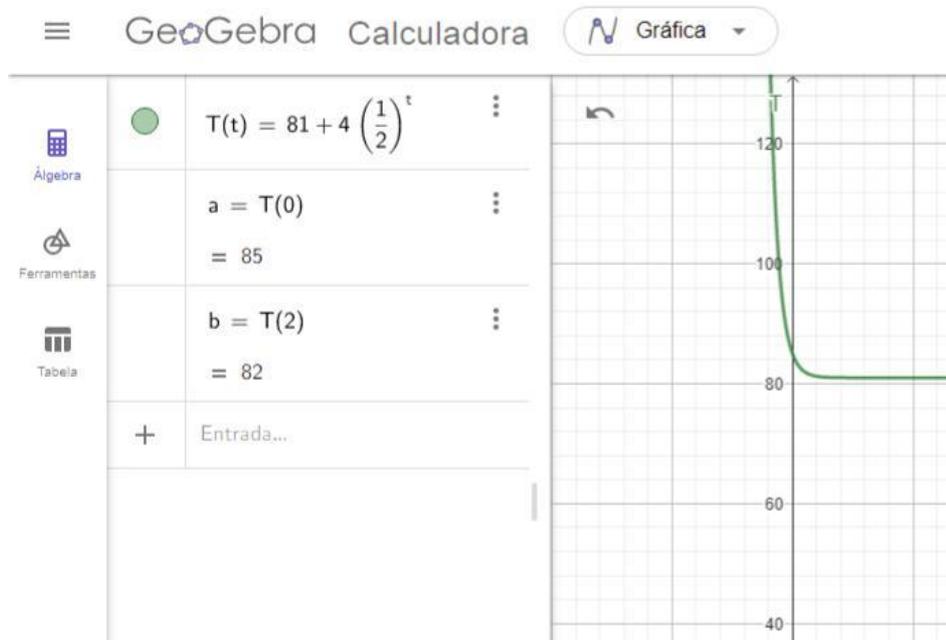
$$t \approx -2 \text{ horas e } 4 \text{ minutos}$$

Como o indivíduo foi encontrado às 1 horas e 30 minutos da madrugada, e de imediato foi realizado a medição de temperatura corporal, pelo resultado obtido, é possível alegar que o óbito aconteceu 2 horas e 4 minutos antes do horário que a polícia chegou ao local. Sendo assim, o indivíduo foi assassinado aproximadamente às 23 horas e 26 minutos do dia anterior ao que foi encontrado.

Além do cálculo também é possível realizar a análise gráfica do problema a partir dos dados informados e da equação obtida. Primeiramente analisaremos se

os dados das condições impostas no enunciado serão aproximados com os dados que o software apresentará e depois observaremos o comportamento gráfico. O gráfico foi construído com auxílio do software geogebra e seu comportamento pode ser observado na figura a seguir.

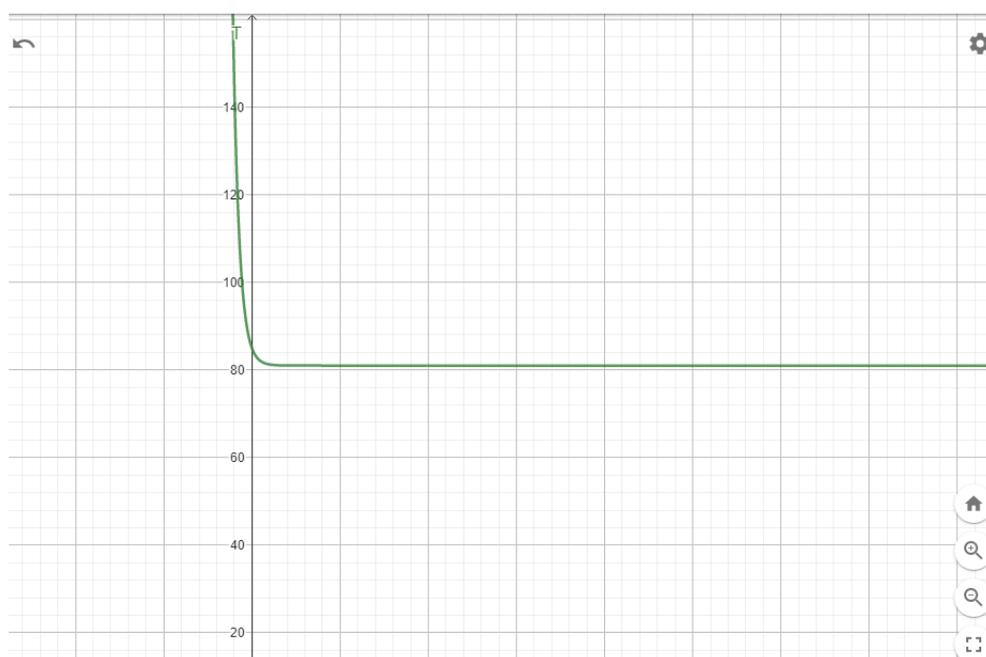
Figura 11. Atribuição de comandos com as condições para o tempo igual a 0 e para as 2 horas depois para realizar comparação dos valores informados no software com os valores informados no enunciado.



Fonte: AUTOR (2023)

Na figura 11, temos que para o ponto  $a$  com  $T(0)$  a temperatura do corpo é de 85 °F. E, se fomos analisar o enunciado o mesmo valor é informado. Quando se passam as 2 horas depois, em que é feito uma nova medição, a temperatura, de acordo com o que é mostrado na figura no ponto  $b$  para  $T(2)$ , é de 82 °F. Realizando a comparação, temos que os valores são os mesmos que informados no problema, o que em termos gerais é possível afirmar que o modelo obtido descreve as condições do problema.

Figura 12. Representação gráfica do decaimento da temperatura corporal do indivíduo até o momento de sua estabilização com a temperatura ambiente.



Fonte: AUTOR (2023)

Na figura 12, visto que x e y representam respectivamente o tempo e temperatura corporal, é possível observar a curva que representa a queda de temperatura corporal.

No problema temos a informação hipotética que em duas horas a temperatura caiu 3 graus. Nessa linha de pensamento, podemos admitir que com o passar das horas a temperatura irá diminuir até o ponto de se igualar a temperatura do ambiente ao qual estar como mostrado na figura 12. Após se igualar a temperatura ambiente e não houver mais mudanças, o cadáver se manterá em uma temperatura estável, ou seja, não apresentará variações como é expresso no gráfico quando a curva se mantém a uma temperatura de 80 °F. Dessa forma, a modelagem realizada com a lei de resfriamento de Newton pode ser utilizada tanto para estimar a hora morte de um indivíduo como também o comportamento do decaimento de temperatura corporal.

### 3.5. Decaimento Radioativo

As equações diferenciais podem ser aplicadas em diversos ramos, mas muitas de suas aplicações são nas áreas de ciências naturais. Em uma dessas aplicações, é possível observar através dos modelos descritos por EDO's, a desintegração radioativa ou decaimento radioativo.

Mas o que é desintegração radiativa? É um fenômeno nuclear em que um átomo, quando elimina radiação, se transforma em um novo átomo. Para uma compreensão mais geral (Bassanezi e Junior, 1988), nos definem que,

A atividade de uma substância radioativa é medida pelo número de desintegrações por unidade de tempo. Este fenômeno é devido a emissão de três tipos de radiações: partículas  $\alpha$  (núcleo de hélio), partículas  $\beta$  (elétrons) e raios  $\gamma$  (ondas eletromagnéticas de alta frequência). Os principais experimentos de que resultaram tal compreensão, foram realizados por Rutherford, Becquerel, Royds, Vilard e M. Curie no final do século passado e início desse século, quando já se sabia que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante. (p. 36)

Dessa forma temos que, a taxa de desintegração de um elemento radioativo é proporcional ao elemento radioativo existente em cada instante de tempo, ou seja,

$$\frac{dq}{dt} = -kq, \quad (3.29)$$

onde,

$\frac{dq}{dt}$ : Taxa de desintegração em relação ao tempo;

$k$  = Constante de proporcionalidade;

$q$  = Quantidade de átomos radioativos;

A taxa é dada por um sinal negativo por mostrar que é um decaimento, ou seja, perda de átomos ao longo tempo.

O decaimento estima a meia-vida de um elemento, ou seja, o tempo necessário para que o elemento seja reduzido em sua metade. Cardoso (2000) define que

Meia-vida, portanto, é o tempo necessário para a atividade de um elemento radioativo ser reduzida à metade da atividade inicial. Isso significa que, para cada meia-vida que passa, a atividade vai sendo reduzida à metade da anterior, até atingir um valor insignificante, que não permite mais distinguir suas radiações das do meio ambiente. (p. 9)

Já tendo sido apresentado os conceitos básicos sobre decaimento radioativo e meia-vida de um elemento, partiremos para a aplicação. Para a situação-problema, foi criando uma situação hipotética com o elemento radioativo Césio – 137. Tal elemento causou o acidente em Goiânia em setembro de 1987 e também foi um dos elementos lançados na atmosfera no acidente nuclear de Chernobyl em 26 de abril de 1986.

**Situação-problema:** Um laboratório continha uma amostra de 30,0 g de Césio – 137 que foi velada por 10 anos. Após esse tempo os pesquisadores realizam uma verificação e observam que ainda contém 23,7 g desses átomos. Com base nos dados informados, estime o tempo necessário para que se alcance a meia-vida da amostra de 23,7 g.

**Solução:**

Partiremos da equação (3.29) e pelo método da separação de variáveis (1.3), obteremos a equação para qualquer instante de tempo para assim estimar o tempo necessário para alcance da meia vida do elemento radioativo. Dessa forma, temos

$$\frac{dq}{dt} = -kq$$

$$\frac{dq}{q} = -k dt$$

$$\int \frac{dq}{q} = -k \int dt$$

$$\ln|q| = -kt + c$$

$$|q| = e^{-kt+c}$$

$$q = e^{-kt} \cdot \pm e^c$$

Considerando que  $B = \pm e^c$ , temos

$$q(t) = Be^{-kt} \tag{3.30}$$

Para encontrar o valor de B, consideraremos que,  $q(0) = q_0$  e substituindo essa condição em (3.30). Temos,

$$q(0) = B e^{-k0}$$

$$q_0 = B e^0$$

$$q_0 = B$$

Substituindo o valor da constante B em (3.30), temos

$$q(t) = q_0 e^{-kt} \quad (3.31)$$

Para obter a constante de proporcionalidade k partiremos da definição de meia vida de um elemento radioativo. Consideraremos que para um tempo  $\alpha$  o elemento radioativo é reduzido a sua metade, ou seja  $q(\alpha) = \frac{q_0}{2}$ . Aplicando a condição em (3.31), temos

$$q(\alpha) = q_0 e^{-k\alpha}$$

$$\frac{q_0}{2} = q_0 e^{-k\alpha}$$

$$\frac{q_0}{2q_0} = e^{-k\alpha}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{e^{k\alpha}}$$

$$e^{k\alpha} = 2$$

$$k\alpha = \ln 2$$

$$k = \left( \frac{\ln 2}{\alpha} \right)$$

Substituindo o valor de k em (3.31), temos

$$q(t) = q_0 e^{-t\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\right)} \quad (3.32)$$

Tendo encontrado a equação para qualquer instante de tempo, é possível estimar o tempo necessário para meia-vida da amostra de Césio – 137. Como informado no problema temos que  $q_0 = 30,0 \text{ g}$ ,  $t = 0$  e  $q(10) = 23,7 \text{ g}$ . Substituindo os valores na equação (3.32), temos

$$q(10) = 30,0 \cdot e^{-10\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\right)}$$

$$23,7 = 30,0 \cdot e^{-\left(\frac{6,93}{\alpha}\right)}$$

$$\frac{23,7}{30,0} = e^{-\left(\frac{6,93}{\alpha}\right)}$$

$$\ln\left(\frac{23,7}{30,0}\right) = -\left(\frac{6,93}{\alpha}\right)$$

$$-0,236 = -\left(\frac{6,93}{\alpha}\right)$$

$$\alpha = \frac{-6,93}{-0,236}$$

$$\alpha \approx 29,4$$

$$\alpha \approx 29 \text{ anos}$$

Dessa forma, para que a amostra de Césio – 137 seja reduzida à metade da sua atividade, a sua estimativa de meia-vida é de aproximadamente 29 anos.

Para análise, utilizaremos o gráfico construído a partir do software geogebra. Realizando comparação do valor obtido analiticamente e do que foi informado no software.

Figura 13. Representação do comportamento gráfico que demonstra o decaimento radioativo da amostra de Césio – 137.

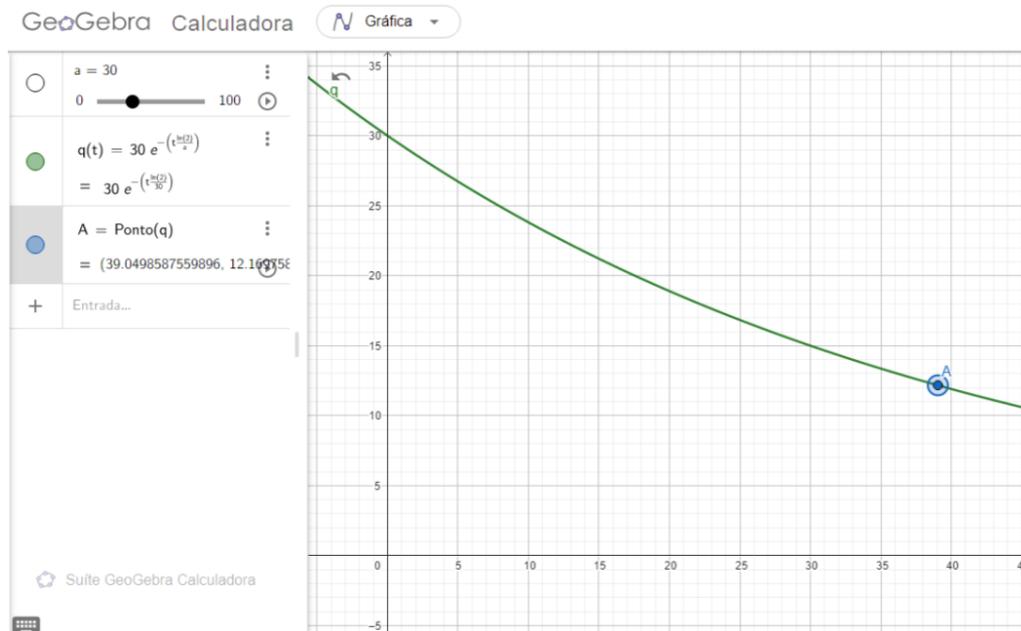


Fonte: AUTOR (2023)

A partir da figura 13, onde x representa o tempo e y a quantidade de amostra de Césio – 137, podemos observar que ao decorrer dos anos a quantidade de amostra de amostra de Césio – 137 vai decaindo. É possível observar também a meia-vida deste elemento. De acordo com (Collins, K. E, Jardim e Collins, C. H, 1988), a meia-vida do Césio – 137 é de aproximadamente 30 anos, sendo um dos isótopos com maior tempo de desintegração de meia-vida. Dessa forma, observando o gráfico da figura 13, ao observarmos no eixo x o valor de 30 anos, para a amostra de 30 g representado no eixo y, é notório a representação da primeira meia -vida. Ou seja, ao decorrer 30 anos, a quantidade aproximada de amostra é de 15g de Césio – 137 o que comprova o que os autores afirmam..

Para o que foi solicitado no enunciado, aplicaremos um ponto na função do gráfico para analisarmos de forma mais específica.

Figura 14. Atribuição do ponto na projeção da função do decaimento radioativo do Césio – 137 para comparação dos valores obtidos na resolução analítica com os valores apresentados no software

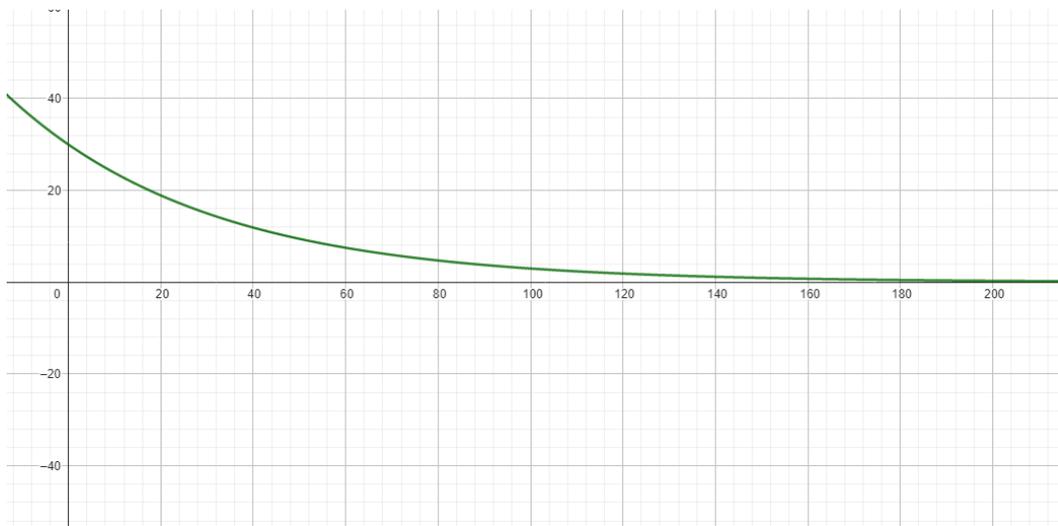


Fonte: AUTOR (2023)

No problema, temos que é solicitado o tempo para a meia-vida da amostra após 10 anos, ou seja, o tempo de meia-vida para a amostra de 23,7 g. Nos cálculos analíticos, é encontrado um tempo aproximado de 29 anos. Sabe-se que a meia-vida é a metade da amostra, nesse caso a meia-vida de 23,7 g é aproximadamente 11,9 g.

Analisando o gráfico da figura 14, é visto que no comando do ponto, os valores das coordenadas são para o eixo x, aproximadamente 39 e para o eixo y, aproximadamente 12,1. Comparando com os valores analíticos, os valores não são iguais, mas são aproximados, o que é aceitável já que se trata de um modelo que nos cálculos analíticos houveram alguns arredondamentos. O ponto tem essas coordenadas pois como já haviam se passado 10 anos, e após os cálculos se obteve 29 anos, somando esses valores que fica 39 anos e observando o gráfico teremos o valor de meia-vida da amostra de 23,7 g como é possível observar na figura 14.

Figura 15. Representação gráfica do decaimento da amostra de Césio – 137 até o ponto em que atinge um valor desprezível de radiação.



Fonte: AUTOR (2023)

Ao analisarmos o primeiro gráfico representado na figura 13 observamos o decaimento até a primeira meia-vida da amostra de Césio – 137, agora observando o gráfico de uma forma mais completa como mostra a figura 15, é visto que a quantidade de anos necessário para que a amostra atinja um valor desprezível a ponto de as radiações não serem diferenciadas das radiações emitidas pelo meio ambiente é de aproximadamente 200 anos.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Interpretar as aplicações das equações diferenciais ordinárias (EDO), pode fazer com que desperte o interesse em estudos neste campo de pesquisa. Suas aplicações estão entre os mais diversos ramos e auxiliam em grandes estudos. Os conhecimentos e modelos obtidos até este século se dão ao aperfeiçoamento do cálculo diferencial.

É notório que no decorrer dos séculos houve grande evolução no que se diz respeito ao cálculo diferencial. O que antes foi utilizado para problemas do cotidiano da época, hoje são de grande valia para soluções de problemas na sociedade atual. Exemplos disso são as modelagens realizadas para observar o comportamento de uma epidemia, modelar sistemas complexos para obter soluções simples ou até mesmo observar um comportamento de um elemento radioativo.

Visualizar a importância das equações diferenciais ordinárias é imprescindível, não apenas para conhecer e saber manusear os cálculos, mas para poder visualizar que são através delas que é possível buscar novas soluções em áreas como medicina, engenharia, química, biologia e muitas outras. Sua grande aplicabilidade contribui tanto na melhoria quanto no bem-estar de uma sociedade.

Quanto mais estudos forem sendo realizados neste campo, mais terão avanços e novas descobertas, tanto para o mundo científico, quanto para a sociedade em geral.

Dessa forma, o principal objetivo desta pesquisa foi apresentar algumas aplicações envolvendo equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. E com o uso de situações hipotéticas, foi possível apresentar os dois métodos de resolução propostos – fator integrante e separação de variáveis – para assim construir os modelos que descreviam os problemas de disseminação de uma doença, lei de resfriamento de Newton, escoamento de um fluido através de um orifício, circuito elétrico em série e decaimento radioativo.

Boyce e D'Prima (2010) mencionam, que o uso de computação gráfica possibilitou um novo olhar para o estudo das EDO's, principalmente as não lineares. Mediante isso, foi utilizado para uso complementar o software geogebra para construção gráfica, ou seja, não foi um software proposto na pesquisa, mas com o

seu manuseio foi possível realizar análises de comparação com dados analíticos, projeção e comportamento gráfico, assim como compreensão da resolução obtida pelos cálculos.

Realizar a junção das equações analíticas obtidas e descrição gráfica no geogebra, possibilitou uma melhor visualização construção que os modelos podiam descrever. O software demonstrou de forma simples o que por vezes se torna demasiado difícil de visualizar somente com os cálculos analíticos.

Porém, há dificuldades que podem ser encontradas quando há uma inserção de um software. Um exemplo bem comum é a dificuldade em manusear os controles e demais atribuições contidas dentro deste software. É necessário de antemão possuir conhecimentos prévios a respeito desses controles, caso contrário, em vez de ajudar acaba atrapalhando pois será necessário aprender a manusear tais controles.

Referindo-se aos métodos elementares para resolução de EDO's, ambos os métodos propostos foram bem empregados, mas nem sempre somente eles podem por si só desenvolver a resolução da EDO, um exemplo foi a aplicação envolvendo disseminação de uma doença, onde foi necessário utilizar a equação de Bernoulli pois a princípio a equação era do tipo não linear. Essa situação ocasionou uma inserção de um novo método, mesmo que utilizado somente em uma aplicação.

De modo geral, o principal objetivo desta pesquisa foi alcançado, pois foi demonstrando a obtenção e manipulação dos modelos por meio dos métodos elementares propostos em aplicações que envolvem situações do cotidiano, assim ressaltando a aplicabilidade da EDO's de 1º ordem.

Com isso, para extensão desse trabalho, sugere-se:

- Uma remodelação dos métodos utilizados, podendo acrescentar outros métodos elementares de resolução de EDO's e assim abordar outras EDO's do tipo não linear.
- Ser expandido para EDO's de ordem superior e assim abranger mais temas como por exemplo circuitos elétricos do tipo RLC, sendo esse obtido por EDO de 2º ordem.

- Observar e coletar dados de campo para averiguar o grau de aplicabilidade na vida real, para assim demonstrar as diferenças e erros de aproximação que podem ser obtidas na comparação de dados analíticos com dados reais.
- Utilizar outros softwares de simulações que possibilitem análises mais detalhadas dos dados obtidos analiticamente.

## REFERÊNCIAS

- ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. ABNT-NBR 13714, janeiro de 2000. **Sistema de hidrantes e de mangotinhos para combate a incêndio**. Rio de Janeiro, 2000.
- ALITOLIF, S. S. **Algumas aplicações das equações diferenciais**. Ji Paraná: Unir, 2011.
- ARAÚJO, C. D. **Equações diferenciais aplicadas em circuitos elétricos**. Trabalho de conclusão de curso licenciatura em matemática -universidade tecnológica federal do paraná. Cornélio Procópio, 2014. 61p
- BASSANEZI, R. C. JUNIOR, W. C. F. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988. p. 36-42.
- BASSANEZZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2022. 389p
- BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução: Valeria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução: Valeria de Magalhães Iorio. 7 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: editora Edgar Blücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
- CARDOSO, E. M. et al. Radioatividade. **Comissão Nacional de Energia Nuclear- CNEN**, 2000.
- COLLINS, K. E.; JARDIM, I. C. S. F.; COLLINS, C. H. **O que é Césio – 137**. Química nova, v. 11, n. 2, 1988.
- CRUZ, I. B. **Modelos matemáticos com o uso de edo's de 1º ordem**. P.56. Monografia (licenciatura em matemática) – universidade federal da paraíba. Araruna, pb, 2014.
- CUNHA, C. P. **A importância da matemática no cotidiano**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. 4 ed. Ano 02, vol. 01. Pp 641-650, julho de 2017. ISSN: 2448-0959..
- CURY, H. N. **Pesquisa em análise de erros no ensino superior: retrospectivos e novos resultados**. In: frota, m.c.r., nasser l.(org) educação matemática no ensino superior. Pesquisas e debates. Recife: sbem, 2009.
- GERHARDT, T. E. SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. Ed. São Paulo: atlas, 2007.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. Ed. São Paulo: atlas, 2008.
- GOMES, T. O; SILVA, R. C.; MORAIS, I. B. **Aplicações do cálculo diferencial no cotidiano**. revista semiário de visu. 2019

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física, volume 3: eletromagnetismo**. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

LUZ, A. M. S.; CORRÊA, F. J. S. A. **Equações diferenciais ordinárias e aplicações**. Revista virtual de iniciação acadêmica da universidade federal Pará. Vol. 1, nº1, março 2001.

PIZZANI, Luciana; SILVA, Rosemary Cristina da; BELLO, Suzelei faria; HAYASHI, Maria Cristina Piumbato Innocentini. 2012/7/10 RDBCI: revista digital de biblioteconomia e ciência da informação.

SANTOS, C. O. **Equações diferenciais: modelagem de problemas**. s.d.

SILVA, I. L. N. **Equações diferenciais: aspectos históricos, teoria e aplicações em física**. Trabalho de conclusão de curso (graduação em matemática) - universidade estadual da paraíba, centro de ciências humanas e exatas, 2016

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**, 3 ed., Thompson learning, são Paulo, 2003.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. 3. Ed. São Paulo: Pearson makron books, 2001. 473 p.

ZILL, D. G; FARIAS, A. A de; CULLEN, M. R. (trad.). **Equações diferenciais**. 3.ed 2.v ISBN: 8534611416 v.2