

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS  
CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TABATINGA  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NATALI FAÇANHA DE SOUZA

TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA LOCAL DAS CURVAS E SUAS  
APLICAÇÕES

Prof.<sup>a</sup> Orientadora: Ma. Thalita da Costa Taquita Hilário

Tabatinga-AM  
2023

NATALI FAÇANHA DE SOUZA

TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA LOCAL DAS CURVAS E SUAS  
APLICAÇÕES

Prof.<sup>a</sup> Orientadora: Ma. Thalita da Costa Taquita Hilário

Artigo científico apresentado como Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção de nota parcial na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, ministrada pela Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Karem Keyth de Oliveira Marinho, do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga da Universidade do Estado do Amazonas.

Tabatinga-AM  
2023

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
**Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.**

S729tt Souza, Natali Façanha de  
Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas e  
suas Aplicações / Natali Façanha de Souza. Manaus : [s.n],  
2023.  
31 f.: color.; 29 cm.

TCC - Graduação em Matemática - Licenciatura -  
Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2023.  
Inclui bibliografia  
Orientador: Hilário, Thalita da Costa Taquita

1. geometria diferencial. 2. curvatura. 3. torção. 4.  
equações de Frenet. I. Hilário, Thalita da Costa Taquita  
(Orient.). II. Universidade do Estado do Amazonas. III.  
Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas e suas  
Aplicações

**Elaborado por Jeane Macelino Galves - CRB-11/463**

NATALI FAÇANHA DE SOUZA

TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA LOCAL DAS CURVAS E SUAS  
APLICAÇÕES

Artigo científico apresentado como Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção de nota parcial na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, ministrada pela Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Karem Keyth de Oliveira Marinho, do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga da Universidade do Estado do Amazonas.

Data de aprovação: 28 de março de 2023.

Thalita da Costa Taquita Hilário

Prof.<sup>a</sup> Orientadora: Ma. Thalita da Costa Taquita Hilário  
(Presidente da Banca avaliadora / Orientadora – UEA)

Edfram Rodrigues Pereira

Prof. Me. Edfram Rodrigues Pereira  
(Examinador Interno – UEA)

Edilson de Carvalho Filho

Prof. Dr. Edilson de Carvalho Filho  
(Examinador Interno – UEA)

À Deus, por ter sido minha força e não ter permitido que eu perdesse a sanidade mental.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família, em especial minha mãe, Edileuza Façanha de Oliveira, que me deu todo apoio emocional e econômico para que esse sonho se realizasse.

Ao meu noivo, Elvis da Silva Rodrigues, que me deu todo incentivo para eu não desistir e segurou na minha mão em toda essa caminhada de graduação.

Aos (As) meus (minhas) professores (professoras) pelo conhecimento repassado e por terem acreditado em mim.

À Universidade do Estado do Amazonas – UEA, pela estrutura e abrigo para que eu pudesse desenvolver este trabalho.

Ao meu amigo Geovane da Silva Dias, que sempre esteve ao meu lado falando palavras incentivadoras e pelas dicas de escritas.

## RESUMO

O presente trabalho trata-se de um estudo introdutório à geometria diferencial, com objetivo de demonstrar o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas de forma clara, objetiva e citar aplicações acerca dos conceitos preliminares para a demonstração do teorema. Para alcançar os objetivos do trabalho utilizou-se de revisão bibliográfica e, como ferramentas principais, definições de algumas propriedades das curvas parametrizadas diferenciáveis, tais como vetor tangente, comprimento de arco, curvatura, torção, triedro de Frenet, além de resultados clássicos do cálculo diferencial e integral. Ademais, conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias, mais precisamente, o teorema de existência e unicidade, também foram usados. Com esse estudo, foi possível desenvolver o interesse na pesquisa científica, aprimorar o conhecimento na área da geometria diferencial e desenvolver os objetivos propostos. Portanto, o estudo da Geometria Diferencial permite compreender as propriedades das curvas parametrizadas por meio de conceitos fundamentais e com eles citar aplicações. Além disso, este trabalho pode contribuir para a disseminação do conhecimento em Matemática e servir como um material de pesquisa sobre Geometria Diferencial das curvas parametrizadas diferenciáveis.

Palavras-chave: geometria diferencial; curvatura; torção; equações de Frenet.

## RESUMEN

El presente trabajo es un estudio introductorio a la geometría diferencial, con el objetivo de demostrar el Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas de forma clara, objetiva y citando aplicaciones sobre los conceptos preliminares para la demostración del teorema. Para lograr los objetivos del trabajo se utilizó la revisión bibliográfica y como herramientas principales las definiciones de algunas propiedades de las curvas diferenciables parametrizadas, como el vector tangente, la longitud del arco, la curvatura, la torsión, el triedro de Frenet, además de los resultados clásicos de cálculo diferencial e integral. Además, los conceptos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, más precisamente, el teorema de existencia y unicidad, también fueron utilizados. Con este estudio se logró desarrollar el interés por la investigación científica, mejorar los conocimientos en el área de la geometría diferencial y desarrollar los objetivos propuestos. Por tanto, el estudio de la Geometría Diferencial permite comprender las propiedades de las curvas parametrizadas a través de conceptos fundamentales y con ellos citar aplicaciones. Además, este trabajo puede contribuir a la difusión del conocimiento en matemáticas y servir como material de investigación sobre Geometría Diferencial de curvas diferenciables parametrizadas.

Palabras-clave: geometría diferencial; curvatura; torsión; ecuación de Frenet.

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	9
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	11
2.1 Curvas no Espaço; Curvas Parametrizadas .....	11
2.3 Vetor Tangente; Curva Regular.....	11
2.4 Mudança de Parâmetro; Comprimento de Arco .....	13
2.5 Curvatura; Torção; Fórmula de Frenet .....	15
2.6 Movimento Rígido; Teorema Fundamental da Existência e Unicidade.....	17
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....	21
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	22
4.1 Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas .....	22
4.2 Aplicações .....	26
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	31
REFERÊNCIAS .....	32

## 1 INTRODUÇÃO

O Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas - TFTLC é um dos teoremas mais importantes da geometria diferencial.

A Geometria Diferencial tem profundas interligações com outros domínios da matemática, tais como Topologia, Funções Analíticas Complexas, Teoria de Grupo e Sistema Dinâmico. Também tem se desenvolvido em várias direções, apresentando um considerável volume de pesquisas na área. Portanto, o estudo dessa área nos permitiu, inicialmente, abrir o leque para conhecimentos que não são da grade curricular do curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado do Amazonas – UEA, e mais, desenvolveu o interesse na vasta opção de aplicabilidade em outras áreas.

A grosso modo, a geometria diferencial consiste no estudo de propriedades geométricas de curvas e superfícies através do cálculo diferencial e integral e da álgebra linear.

Geometria diferencial clássica é o estudo das propriedades locais das curvas e superfícies. Por propriedades locais entendemos aquelas propriedades que dependem apenas do comportamento da curva ou superfície nas proximidades de um ponto. Os métodos que se revelaram adequados aos estudos de tais propriedades foram os métodos do cálculo diferencial. (CARMO, 2012, p. 1)

Este trabalho tem por finalidade enunciar e demonstrar o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas e citar e mostrar aplicações acerca dos conceitos preliminares para a demonstração do teorema. Para isso, dividimos o trabalho em duas partes e, utilizamos como base o livro “Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies” de Manfredo Perdigão do Carmo (CARMO, 2012), e, o livro “Introdução à Geometria Diferencial” de Ketí Tenenblat (TENENBLAT, 2008).

Na primeira parte do trabalho, estudamos uma questão fundamental em geometria, determinar as quantidades geométricas que caracterizam as curvas, ou seja, associamos a cada curva duas quantidades escalares chamadas curvatura, cuja representação geométrica é analisar o quanto uma curva se curva, isto é, o quanto ele deixa de estar contida em uma reta; e a torção que mede o quanto uma curva deixa de estar contida num plano. Para isso, definimos em cada ponto da curva um conjunto de vetores que formam uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  que denominamos de triedro de Frenet da curva. A variação desse triedro nos informa o comportamento da curva numa vizinhança do ponto. Mas, para chegar a estes conceitos fundamentais, estudamos conceitos como comprimento de arco, vetor tangente e curvas parametrizadas diferenciáveis.

Ademais, mostramos que o referencial ortonormal satisfaz um sistema de equações chamadas de Equações de Frenet de Jean Frederic Frenet (1816-1900), ele foi um matemático e astrônomo francês que descobriu, independentemente do seu compatriota Joseph Alfred Serret, as conhecidas *fórmulas de Frenet* das curvas.

Na seção 4, enunciamos e demonstramos a existência e unicidade da curva, que é o objetivo principal deste trabalho. Também, citamos aplicações acerca do teorema no plano, que está ligada ao teorema no espaço, e das definições curvatura, torção e equações de Frenet.

Ao longo do trabalho introduzimos algumas figuras com intenção de proporcionar melhor entendimento ao leitor, as mesmas foram produzidas através do programa livre, Geogebra<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Geogebra.org

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Curvas no Espaço; Curvas Parametrizadas

As curvas no espaço não diferem muito das curvas no plano, segundo Tenenblat (2008) “Uma curva no plano é descrita dando-se as coordenadas de seus pontos como função de uma variável independente.” Logo, acrescentamos mais uma coordenada, se tratando de aplicação, mais uma função coordenada.

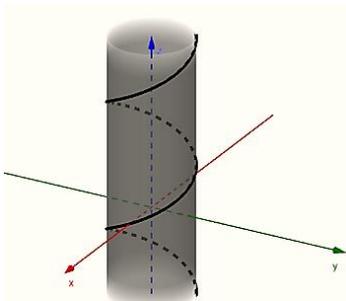
**Definição 1 (Curva Parametrizada):** Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de um intervalo aberto  $I = (a, b)$  da reta real  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ .

A curva diferenciável parametrizada de  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in I$ , onde  $x(t), y(t), z(t)$  são funções reais diferenciáveis de classe  $C^\infty$ , isto é, quando todas as derivadas existem. A variável  $t \in I$  é o parâmetro de  $\alpha$  e  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$  é denominado *traço* da curva  $\alpha$ .

#### Exemplo 2.1

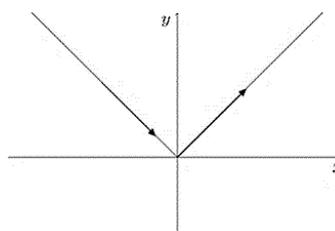
- a) A curva diferenciável parametrizada dada por  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^*$  é uma hélice circular. O traço desta curva está contido no cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ . (ver figura 2-1)

Figura 2-1: Hélice Circular.



Fonte: elaborada pela autora (2023)

Figura 2-2: Função modular.



Fonte: elaborada pela autora (2023)

- b) A aplicação  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t, |t|)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  não é uma curva diferenciável parametrizada, visto que  $|t|$  não é diferenciável em  $t = 0$ . (ver figura 2-2)

### 2.3 Vetor Tangente; Curva Regular

Feita a derivada de primeira ordem de uma aplicação dada podemos encontrar o vetor tangente.

É importante destacar que a escolha das definições que segue, vem da necessidade de existir o vetor tangente, logo uma reta tangente a cada  $t$  para que possamos prosseguir a análise local de curvas regulares.

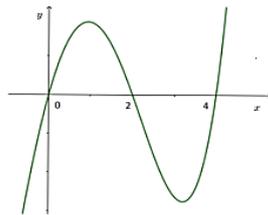
**Definição 2 (Vetor Tangente):** Seja  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva diferenciável parametrizada que, a cada  $t \in I$ , associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . O vetor  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  é chamado vetor tangente a  $\alpha$  em  $t$ .

Para o desenvolvimento do teorema nos restringirmos ao estudo das curvas cuja derivada de primeira ordem exista e seja não-nula para todo  $t$ .

**Definição 3 (Curva Regular):** Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada regular se  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

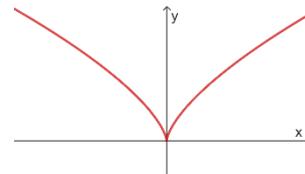
Intuitivamente, o traço de uma curva regular, como a representada na figura 2-3, é suave e sem “picos”. Enquanto na figura 2-4, podemos ver uma curva não regular, que contém “pico”, ou seja, a derivada de primeira ordem é nula.

Figura 2-3: Curva regular.



Fonte: elaborada pela autora (2023)

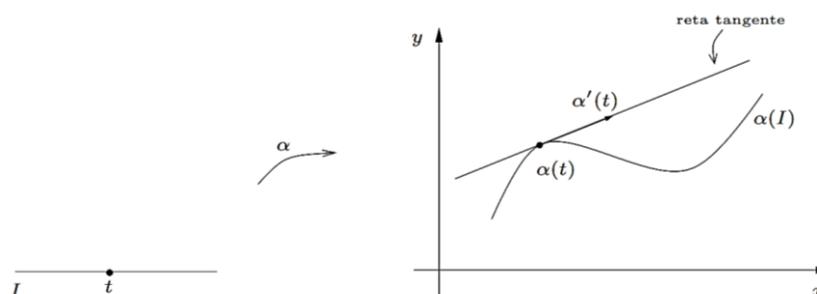
Figura 2-4: Representação de uma curva não regular.



Fonte: elaborada pela autora (2023)

A *reta tangente* à curva regular  $\alpha$  em  $t \in I$  é a reta que passa por  $\alpha(t)$  na direção de  $\alpha'(t)$ , isto é, a reta que é dada pela função  $g(r) = \alpha(t) + r\alpha'(t)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Está é uma reta importante, pois é uma reta bem definida contendo o ponto  $\alpha(t)$  e o vetor  $\alpha'(t)$ . (ver figura 2-5)

Figura 2-5: Ilustração da reta tangente.



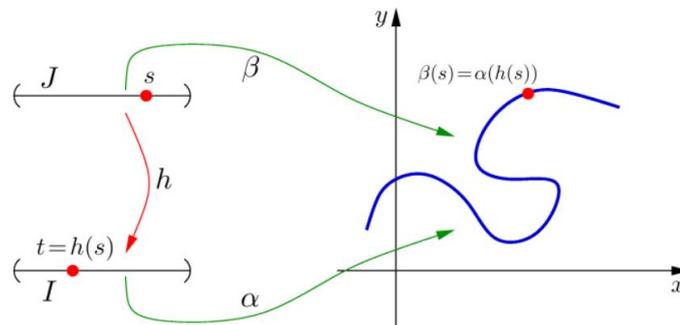
Fonte: DE LIMA (2016)

**Observação 2-1:** Em vez de curvas diferenciáveis parametrizadas regulares, trataremos a mesma como curva parametrizada regular.

## 2.4 Mudança de Parâmetro; Comprimento de Arco

**Definição 4** (*Mudança de Parâmetro e Reparametrização*): Seja  $I$  e  $J$  intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular e  $h: J \rightarrow I$  uma função diferenciável de classe  $C^\infty$ , cuja derivada de primeira ordem é não-nula em todos os pontos de  $J$  tal que  $h(J) = I$ . Então, a função composta  $\beta = \alpha \circ h$  é uma curva regular, que tem o mesmo traço que  $\alpha$ , chamada reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ . A função  $h$  é a mudança de parâmetro. (ver figura 2-6)

Figura 2-6: Os traços das curvas  $\alpha$  e  $\beta$  coincidem.

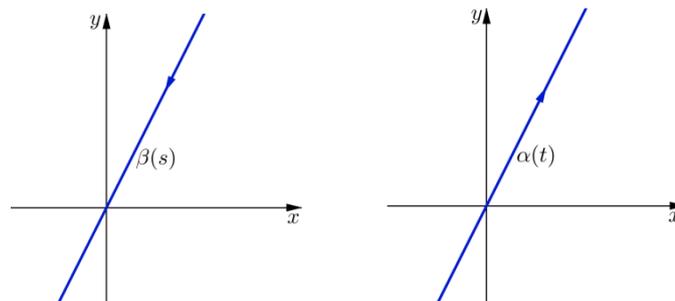


Fonte: elaborada pela autora (2023)

Uma mudança de parâmetro  $h$  é uma função estritamente crescente ou decrescente, portanto é bijetora. O sentido de percurso do traço de  $\alpha$  nos dá a orientação de uma curva regular. Então, se  $h$  é crescente,  $\beta$  e  $\alpha$  têm a mesma orientação; caso  $h$  é decrescente,  $\beta$  e  $\alpha$  têm orientação opostas, sendo  $\beta$  uma reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ .

**Exemplo 2.2** A curva diferenciável  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\beta(s) = (-2s + 1, -4s + 2)$  é uma reparametrização de  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (t, 2t)$ , tem orientação oposta, pois a mudança de parâmetro  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(s) = -2s + 1$ , é uma função decrescente. (ver figura 2-7)

Figura 2-7: Os traços das curvas  $\alpha$  e  $\beta$  com sentidos opostos.



Fonte: elaborada pela autora (2023)

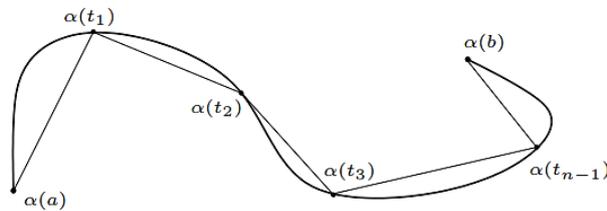
Segundo Perdigão (2012) “o comprimento de arco  $\alpha([a, b])$  é, em certo sentido, um limite de comprimento de polígonos inscritos.”

Seja uma curva regular  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Tomemos  $a < b \in I$  e consideremos uma partição do  $I = [a, b]$ , isto é, um conjunto finito  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\} \subset I$ , em que

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

A linha poligonal é dada pela união dos segmentos de reta cujos extremos são os pontos  $\alpha(t_{i-1})$  e  $\alpha(t_i)$ ,  $n = 1, 2, \dots, n$ . O comprimento da curva de acordo com a partição  $L(\alpha, P)$  é naturalmente definido como a soma dos comprimentos dos segmentos que a formam. (ver figura 2-8)

Figura 2-8: Partição da curva  $\alpha$ .



Fonte: DE LIMA (2016)

Dado  $t_0 \in I$ , a *função comprimento de arco* de uma curva parametrizada regular  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a partir do ponto  $t_0$ , é por definição

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt.$$

Onde  $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$  é o comprimento do vetor  $\alpha'(t)$ . Como  $\alpha'(t) \neq 0$ , o comprimento de arco  $s$  é uma função diferenciável de  $t$  e  $ds/dt = \|\alpha'(t)\|$ .

Ainda podemos definir uma parametrização pelo comprimento de arco, que será bastante usada no decorrer do trabalho.

**Definição 5** (*Parametrização pelo comprimento de arco*): Uma curva regular  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita parametrizada por comprimento de arco se para cada  $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$ , o comprimento do arco da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é igual a  $t_1 - t_0$ . Isto é,  $\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0$ .

**Proposição 2-1:** Uma curva regular  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  está parametrizada por comprimento de arco se, e só se,  $\forall t \in I, |\alpha'(t)| = 1$ .

A proposição a seguir nos permite dizer que toda curva regular pode ter uma reparametrização, onde essa reparametrização está parametrizada por comprimento de arco.

**Proposição 2-2:** Sejam  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular e  $s: I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Então, existe a função inversa de  $h$  de  $s$ , definida no intervalo aberto  $J = s(I)$ , e  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

A demonstração das proposições 2-1 e 2-2 podem ser encontradas no livro Introdução à Geometria Diferencial da Ketí Tenenblat (2008) página 39 e 40, respectivamente.

## 2.5 Curvatura; Torção; Fórmula de Frenet

Através de uma base ortonormal podemos demonstrar e encontrar as equações de Frenet, que serão de grande importância para enunciar e demonstrar o TFTLC. Neste tópico contém os conceitos essenciais sobre curva a serem utilizados na demonstração do teorema e suas aplicações.

Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada regular pelo comprimento de arco  $s$ . Denotamos por  $t(s) = \alpha'(s)$  o vetor tangente unitário, o módulo  $|\alpha''(s)|$  da derivada segunda mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em  $s$ , isto é,  $|\alpha''(s)|$  dá a medida do quão rápida a curva se afasta, em uma vizinhança de  $s$ , da tangente em  $s$ . Com isso, definimos a curvatura, que nos dá a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção.

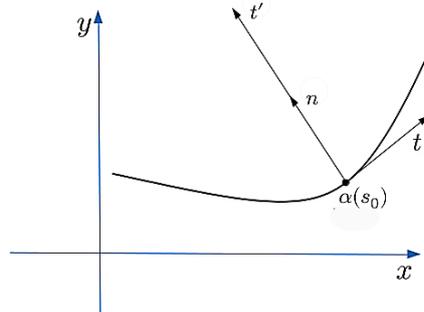
**Definição 6 (Curvatura):** Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . O número  $k(s) = |\alpha''(s)|$  é chamado de curvatura de  $\alpha$  em  $s$ .

Intuitivamente, o número  $|\alpha''(s)|$  é a medida de quão rapidamente a curva  $\alpha$  muda de direção no ponto  $\alpha(s)$ .

Quando diferenciamos  $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$ , obtemos pela regra do produto

$$\begin{aligned}\langle t(s), t(s) \rangle' &= 1' \\ \langle t(s)', t(s) \rangle + \langle t(s), t(s)' \rangle &= 0 \\ 2\langle t(s)', t(s) \rangle &= 0 \\ \langle t(s)', t(s) \rangle &= 0,\end{aligned}$$

ou seja,  $t'(s)$  e  $t(s)$  são perpendiculares, visto que o produto interno entre eles deu zero. Concluimos ainda que  $t'(s) = \alpha''(s)$  é normal a curva  $\alpha$ . Portanto, nos pontos onde  $\kappa(s) \neq 0$ ,  $\forall s \in I$ , podemos definir um vetor unitário na direção de  $\alpha''(s)$ . (ver figura 2-9)

Figura 2-9: Ilustração de  $t \perp t'$ .

Fonte: elaborada pela autora (2023)

**Definição 7 (Vetor normal):** Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $\kappa(s) > 0$ . O vetor

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \frac{t'(s)}{\kappa(s)}$$

é denominado vetor normal a  $\alpha$  em  $s$ . A reta normal a  $\alpha$  em  $s_0 \in I$  é a reta que passa por  $\alpha(s_0)$  na direção do vetor normal  $n(s_0)$ .

Temos que  $t(s)$  e  $n(s)$  são vetores ortonormais, e  $n(s)$  é paralelo a  $t'(s)$ . (ver figura 2-9) Logo, definimos a primeira equação de Frenet

$$t'(s) = \kappa(s)n(s).$$

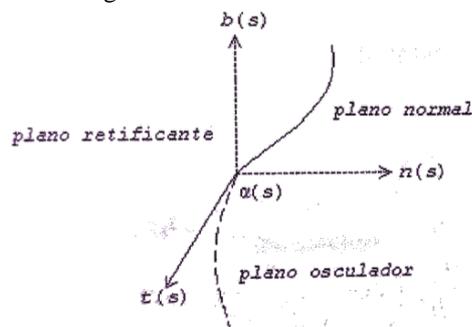
A seguir, definimos um terceiro vetor que, junto com  $t(s)$  e  $n(s)$ , formam uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 8 (Vetor binormal):** Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $\kappa(s) > 0$ . O vetor binormal a  $\alpha$  em  $s$  é

$$b(s) = t(s) \times n(s).$$

Os três vetores  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$  conhecidos como *base* ou *triedro de Frenet* são, em cada ponto, unitário e mutuamente ortogonais.

Figura 2-10: Triedro de Frenet.



Fonte: TENENBLAT (2008)

A figura 2-10 mostra que em cada par de vetores do triedro determinamos um plano. O plano formado pelos vetores  $t(s)$  e  $b(s)$  é chamado de *plano retificante*, o plano  $n(s)$  e  $b(s)$

chamamos de *plano normal*, e o plano determinado por  $t(s)$  e  $n(s)$  é denominado *plano osculador*.

Observamos que,  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$  ao derivarmos o vetor binormal definido acima.

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s)$$

Reescrevendo  $t'(s) \times n(s) = \lambda n(s) \times n(s) = 0$ , visto que o produto vetorial de dois vetores que são múltiplos de si é igual a zero. Assim,

$$b'(s) = t(s) \times n'(s).$$

Decorre daí, como  $|b(s)| = 1$ , que  $b'(s)$  é ortogonal a  $b(s)$ . Concluimos que  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$ , isto é,  $b'(s)$  é igual ao produto de  $n(s)$  por um número real.

**Definição 9** (*Torção*): O número  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  é chamado *torção* de  $\alpha$  em  $s$ .

Resumindo, em cada valor do parâmetro  $s$  associamos três vetores unitários e ortogonais  $t(s), n(s), b(s)$ . A derivada  $t'(s) = \kappa(s)n(s)$  e  $b'(s) = \tau(s)n(s)$ , quando expressos na base  $\{t, n, b\}$ , fornecem entidades geométricas, curvatura e torção, que estes por sua vez informam sobre o comportamento de  $\alpha$  em uma vizinhança de  $s$ .

Com a intenção de encontrar outro ente geométrico local, calculamos  $n'(s)$ .

Sendo  $n(s) = b(s) \times t(s)$ , derivamos  $n'(s) = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s)$ , substituímos  $t'(s)$  e  $b'(s)$  pelas equações que encontramos anteriormente, obtemos

$$n'(s) = \tau(s)n(s) \times t(s) + \kappa(s)b(s) \times n(s).$$

Como  $b(s) = t(s) \times n(s)$ , pela propriedade do produto vetorial ( $u \times v = -v \times u$ ), obtemos  $-b(s) = n(s) \times t(s)$  e  $-t(s) = b(s) \times n(s)$ . Logo,

$$n'(s) = -\tau(s)b(s) - \kappa(s)t(s).$$

As equações,

$$t'(s) = \kappa(s)n(s),$$

$$n'(s) = -\kappa(s)t(s) - \tau(s)b(s),$$

$$b'(s) = \tau(s)n(s),$$

que foram encontradas considerando o triedro ortonormal associado a uma curva regular no  $\mathbb{R}^3$  é chamada de *Equações* ou *Fórmulas de Frenet*.

## 2.6 Movimento Rígido; Teorema Fundamental da Existência e Unicidade

Seja  $\mathbb{R}^3$  com produto interno usual. Uma *isometria* ou um *movimento rígido* em  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação  $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que preserva a distância, isto é,

$$|M(u) - M(v)| = |u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

De fato, se vale  $|Mv| = |v|, \forall v \in \mathbb{R}^3$ , então  $|M(u) - M(v)| = |M(u - v)| = |u - v|$ .

Seja  $a$  um ponto fixo de  $\mathbb{R}^3$ . A aplicação  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que, para cada  $p \in \mathbb{R}^3$ , associa  $A(p) = a + p$  é um movimento rígido de  $\mathbb{R}^3$ , denominada *translação* por  $a$ .

**Definição 10:** Uma aplicação linear  $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que preserva produto interno, é uma transformação ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  quando  $\langle \rho(u), \rho(v) \rangle = \langle u, v \rangle$  para vetores quaisquer  $u, v \in \mathbb{R}^3$ .

O teorema a seguir define, que todo movimento rígido de  $\mathbb{R}^3$  pode ser obtido, de uma forma única, como resultado da composição de uma translação com uma transformação ortogonal com determinante positivo.

**Teorema 1:** Se  $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um movimento rígido, então existe uma única *translação*  $A$  e uma única *transformação ortogonal*  $\rho$ , tal que  $M = A \circ \rho$ .

A prova deste teorema é vista no livro *Introdução à Geometria Diferencial* da Ketten Tenenblat (2008, pg. 85).

Logo, os movimentos rígidos são transformações que preservam a distância entre pontos e, como tal, preservam o tamanho e a forma das figuras.

Podemos dizer, que todo movimento rígido é diferenciável e que a diferencial de um movimento rígido em cada ponto de  $\mathbb{R}^3$  preserva produto interno. Tendo em vista, a seguinte proposição.

**Proposição 2-3:** Seja  $M = A \circ \rho$  um movimento rígido de  $\mathbb{R}^3$ , então  $M$  é diferenciável e  $\forall p, v \in \mathbb{R}^3, dM_p(v) = \rho(v)$ .

**Demonstração:**  $M$  é diferenciável pois é composta de aplicações diferenciáveis. Se  $A$  é uma translação por  $a$ , então

$$M(p + tv) = A \circ \rho(p + tv) = a + \rho(p + tv) = a + \rho(p) + t\rho(v).$$

Portanto,  $dM_p(v) = \frac{d}{dt}(a + \rho(p) + t\rho(v))|_{t_0} = \rho(v)$ .

■

Como consequência da proposição anterior, obtemos

**Corolário 1:** Se  $M$  é um movimento rígido de  $\mathbb{R}^3$ , então para quaisquer  $p \in \mathbb{R}^3, dM_p$  preserva produto interno, isto é,  $\langle dM_p(v), dM_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in \mathbb{R}^3$ .

Decorre daí, que a diferencial de  $M$  em  $p \in \mathbb{R}^3$  leva uma base ortonormal  $v_1, v_2, v_3$  de  $\mathbb{R}^3$  em outra base ortonormal  $dM_p(v_1), dM_p(v_2), dM_p(v_3)$ . Ou seja, o movimento rígido  $M$  preserva orientação se as bases têm a mesma orientação, ou inverte a orientação se as duas bases

têm orientação oposta. Concluímos, que  $M$  preserva ou inverte a orientação se, e só se, o determinante da matriz associada a  $dM_p$  é igual a 1 ou  $-1$ , respectivamente.

Vamos mostrar que a curvatura e torção serão invariantes por movimento rígido.

**Teorema 2** (Curvatura e torção invariantes por Movimento Rígido): *Sejam  $M = A + p_0$  um movimento rígido direto de  $\mathbb{R}^3$  e  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada por comprimento de arco. Então,  $\beta = M \circ \alpha$  é uma curva regular de  $\mathbb{R}^3$ , parametrizada por comprimento de arco, cuja função curvatura e torção coincide com a de  $\alpha$ , isto é,  $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s)$  e  $\tau_\alpha(s) = \tau_\beta(s)$ ,  $\forall s \in I$ .*

**Demonstração:** Pela necessidade da demonstração, apresentamos os seguintes resultados que podem ser encontrados com mais detalhes no livro “Introdução à Geometria Diferencial” de Tenenblat (2008).

$$\begin{aligned} t_\beta(s) &= dM_{\alpha(s)}(t_\alpha(s)), \\ t'_\beta(s) &= dM_{\alpha(s)}(t'(s)), \\ n_\beta(s) &= \frac{\beta''(s)}{\kappa(s)} = dM_{\alpha(s)}(n_\alpha(s)), \end{aligned}$$

$$b_\beta(s) = t_\beta(s) \times n_\beta(s) = dM_{\alpha(s)}(b_\alpha(s)).$$

Como  $\beta$  é diferenciável pois  $M$  e  $\alpha$  são diferenciáveis. Segue-se da definição de diferencial de  $M$  em  $\alpha(s)$  que para todo  $s \in I$ , que  $\beta'(s) = dM_{\alpha(s)}(\alpha'(s))$ , logo pelo corolário 1,  $|\beta'(s)| = |dM_{\alpha(s)}(\alpha'(s))| = |\alpha'(s)| = 1$ .  $\beta$  é parametrizada por comprimento de arco.

Dessa forma, lembrando que  $dM_{\alpha(s)}$  preserva produto interno, temos

$$\kappa_\beta(s) = |\beta''(s)| = |t'_\beta(s)| = |dM_{\alpha(s)}(t'(s))| = \kappa_\alpha(s).$$

Com os resultados apresentados, obtemos

$$\begin{aligned} \tau_\beta(s) &= \langle b'_\beta(s), n_\beta(s) \rangle \\ \tau_\beta(s) &= \langle dM_{\alpha(s)}(b'_\alpha(s)), dM_{\alpha(s)}(n_\alpha(s)) \rangle \\ \tau_\beta(s) &= \langle b'_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle \\ \tau_\beta(s) &= \tau_\alpha(s) \end{aligned}$$

com isso, obtemos os resultados desejados. ■

**Observação 2-2:** A torção pode ser positiva ou negativa, diferente da curvatura, que é apenas positiva.

**Teorema 3** (Existência e Unicidade): Seja  $\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \dots, x^n), i = 1, 2, \dots, n$  (2) um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. Se as funções  $f^i(t, x^1, \dots, x^n), i = 1, 2, \dots, n$ , além de contínuas no aberto não vazio  $A$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , possuírem todas as derivadas parciais  $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(t, x^1, \dots, x^n), i, j = 1, 2, \dots, n$ , também contínuas em  $A$ , tem-se :

- i. Para cada  $(t_0, x_0) \in A$  existe em correspondência uma solução  $x = \varphi(t)$  do sistema (2) tal que  $\varphi(t_0) = x_0$ ;
- ii. Se duas soluções  $x = \varphi(t)$  e  $y = \psi(t)$  do sistema (2) coincidirem para um valor  $t = t_0$ , isto é,  $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ , então elas coincidiram identicamente para todos os valores de  $t$  em que ambas estiverem definidas.

A demonstração deste teorema é vista no livro “Equações Diferenciais Ordinárias” de Waldyr M. Oliva (1971).

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Inicialmente foram feitas pesquisas bibliográficas das principais obras que abordam o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas sob o ponto de vista analítico e sob o ponto de vista de sua aplicação. Segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 158) “a pesquisa bibliográfica é um apanhado geral sobre os principais trabalhos já realizados, revestidos de importância, por serem capazes de fornecer dados atuais e relevantes relacionados com o tema”. Sendo assim, revisamos e destacamos conceitos preparatórios para que possamos ter maturidade e conhecimento para demonstrarmos e citássemos aplicações acerca das definições de curvatura, torção e equação de Frenet, também acerca do TFTLC planas, ou seja, no plano  $\mathbb{R}^2$ .

Além disso, depois de feitas as leituras, marcamos estudos dirigidos semanais e debatemos cada conteúdo que foi necessário para a compreensão e demonstração do teorema, assim como de suas aplicações.

Com o desejo de mostrarmos geometricamente alguns conceitos, estudamos superficialmente a utilização do programa livre Geogebra.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas

Dada duas funções suaves  $\kappa(s)$  e  $\tau(s)$ , podemos determinar uma curva tal que  $\kappa(s)$  é a curvatura e  $\tau(s)$  é a torção desta curva e mais, a curva é única. Segundo CARMO (2012) “Fisicamente, podemos pensar em uma curva em  $\mathbb{R}^3$  como sendo obtida a partir de uma reta quando esta é entortada (curvatura) ou torcida (torção).”

Decorre daí, a conjectura e afirmação do teorema que segue.

**Teorema 4** (TFTLC): *Dadas as funções diferenciáveis  $\kappa(s) > 0$  e  $\tau(s)$ ,  $s \in I$ , existe uma curva parametrizada regular  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $s$  é o comprimento de arco,  $\kappa(s)$  é a curvatura e  $\tau(s)$  é a torção de  $\alpha$ . Além disso, qualquer outra curva  $\tilde{\alpha}$ , satisfazendo às mesmas condições, difere de  $\alpha$  por um movimento rígido; isto é, existe uma transformação linear ortogonal  $\rho$  de  $\mathbb{R}^3$ , com determinante positivo, e um vetor  $c$  tal que  $\tilde{\alpha} = \rho \circ \alpha + c$ .*

**Demonstração:** Dividimos a demonstração deste teorema em duas partes, sendo elas Existência e Unicidade.

**I. Prova da Existência:** Vamos mostrar que existe um referencial ortonormal  $t(s), n(s), b(s)$  que satisfaz as fórmulas de Frenet e em seguida definir  $\alpha(s) = \int t(s) ds$ .

Denotamos por  $t(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$ ,  $n(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$ ,  $b(s) = (b_1(s), b_2(s), b_3(s))$ . Consideramos as equações de Frenet como um sistema de equações diferenciais em  $I \times \mathbb{R}^9$ ,

$$\begin{aligned} t'_i(s) &= \kappa(s)n_i(s), \\ n'_i(s) &= -\kappa(s)t_i(s) - \tau(s)b_i(s), \quad 1 \leq i \leq 3, \\ b'_i(s) &= \tau(s)n_i(s). \end{aligned}$$

Segue-se do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de Sistema de Equações Diferenciais Lineares que fixado em  $\mathbb{R}^3$  um triedro ortonormal  $\{t_0, n_0, b_0\}$  com orientação positiva e um valor  $s_0 \in I$ , existe uma família de triedros  $\{t(s), n(s), b(s)\}, s \in I$ , com  $t(s_0) = t_0$ ,  $n(s_0) = n_0$ ,  $b(s_0) = b_0$ .

Vamos provar que esta família é um referencial ortonormal para todo  $s \in I$ . Para isso, consideramos as equações de Frenet para expressar as derivadas com relação a  $s$  das seis quantidades

$$\langle t, t \rangle, \langle n, n \rangle, \langle b, b \rangle, \langle t, n \rangle, \langle t, b \rangle, \langle n, b \rangle.$$

Derivamos o produto interno e em seguida fazemos substituição das fórmulas de Frenet apresentadas na fundamentação deste trabalho.

$$\begin{aligned}
\langle t, t \rangle' &= \langle t', t \rangle + \langle t, t' \rangle & \langle t, n \rangle' &= \langle t', n \rangle + \langle t, n' \rangle \\
\langle t, t \rangle' &= \langle \kappa n, t \rangle + \langle t, \kappa n \rangle & \langle t, n \rangle' &= \langle \kappa n, n \rangle + \langle t, -\kappa t - \tau b \rangle \\
\langle t, t \rangle' &= 2\kappa \langle t, n \rangle & \langle t, n \rangle' &= \kappa \langle n, n \rangle - \kappa \langle t, t \rangle - \tau \langle t, b \rangle \\
\langle n, n \rangle' &= \langle -\kappa t - \tau b, n \rangle + \langle n, -\kappa t - \tau b \rangle & \langle t, b \rangle' &= \langle t', b \rangle + \langle t, b' \rangle \\
\langle n, n \rangle' &= -\kappa \langle t, n \rangle - \tau \langle n, b \rangle - \kappa \langle t, n \rangle - \tau \langle n, b \rangle & \langle t, b \rangle' &= \langle \kappa n, b \rangle + \langle t, \tau n \rangle \\
\langle n, n \rangle' &= -2\kappa \langle t, n \rangle - 2\tau \langle n, b \rangle & \langle t, b \rangle' &= \kappa \langle n, b \rangle + \tau \langle t, n \rangle \\
\langle b, b \rangle' &= \langle b', b \rangle + \langle b, b' \rangle & \langle n, b \rangle' &= \langle n', b \rangle + \langle n, b' \rangle \\
\langle b, b \rangle' &= \langle \tau n, b \rangle + \langle b, \tau n \rangle & \langle n, b \rangle' &= \langle -\kappa t - \tau b, b \rangle + \langle n, \tau n \rangle \\
\langle b, b \rangle' &= 2\tau \langle b, n \rangle & \langle n, b \rangle' &= -\kappa \langle t, b \rangle - \tau \langle b, b \rangle + \tau \langle n, n \rangle
\end{aligned}$$

Como função destas mesmas quantidades, encontramos um sistema de equações diferenciais,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \langle t, t \rangle &= 2\kappa \langle t, n \rangle, \\
\frac{d}{ds} \langle n, n \rangle &= -2\kappa \langle t, n \rangle - 2\tau \langle n, b \rangle, \\
\frac{d}{ds} \langle b, b \rangle &= 2\tau \langle b, n \rangle, \\
\frac{d}{ds} \langle t, n \rangle &= \kappa \langle n, n \rangle - \kappa \langle t, t \rangle - \tau \langle t, b \rangle, \\
\frac{d}{ds} \langle t, b \rangle &= \kappa \langle n, b \rangle + \tau \langle t, n \rangle, \\
\frac{d}{ds} \langle n, b \rangle &= -\kappa \langle t, b \rangle - \tau \langle b, b \rangle + \tau \langle n, n \rangle.
\end{aligned} \tag{A}$$

Verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned}
\langle t, t \rangle &= \langle n, n \rangle = \langle b, b \rangle \equiv 1, \\
\langle t, n \rangle &= \langle t, b \rangle = \langle n, b \rangle \equiv 0
\end{aligned}$$

é uma solução do sistema acima com condição inicial 1,1,1,0,0,0. Ou seja, basta substituir estas funções no sistema (A) para verificar que formam uma solução do sistema. Por unicidade, a família  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  é ortonormal para todo  $s \in I$ , como havíamos afirmado.

A partir da família  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  é possível obter uma curva fazendo

$$\alpha(s) = \int t(s) ds, \quad s \in I.$$

Como  $t(s)$  é um vetor unitário, obtemos que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Além disso,  $\alpha'(s) = t(s)$  e  $\alpha''(s) = \kappa(s)n(s)$ . Como  $n(s)$  é unitário e  $\kappa(s) > 0$ , temos que  $n$  é o vetor unitário na direção de  $\alpha''$ . Decorre daí, que  $\kappa(s)$  é a curvatura de  $\alpha$ .

A torção será dada por

$$-\frac{\langle t \times t', t'' \rangle}{\kappa^2} = \tau. \quad (\text{B})$$

Para isso, derivamos  $t' = \kappa n$  em relação a  $s$ , temos

$$\begin{aligned} t'' &= \kappa' n + \kappa n' \\ t'' &= \kappa' n + \kappa(b \times t)' \\ t'' &= \kappa' n + \kappa(b' \times t + b \times t') \\ t'' &= \kappa' n + \kappa(\tau n \times t + b \times \kappa n) \\ t'' &= \kappa' n - \kappa \tau b - \kappa^2 t. \end{aligned} \quad (\text{C})$$

Substituímos,  $t \times t' = t \times \kappa n = \kappa(t \times n)$  e (C) em (B), obtemos

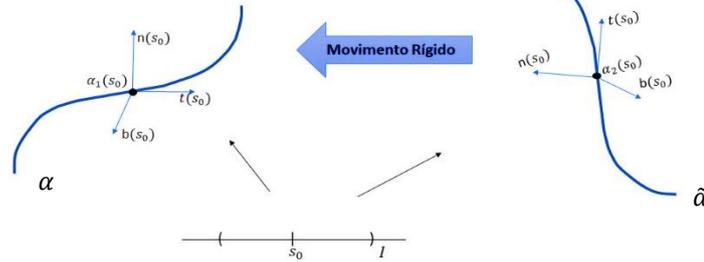
$$\begin{aligned} &\frac{-\langle \kappa(t \times n), \kappa' n - \kappa \tau b - \kappa^2 t \rangle}{\kappa^2} = \\ &\frac{-(\kappa \kappa' \langle t \times n, n \rangle - \kappa^2 \tau \langle t \times n, b \rangle - \kappa^3 \langle t \times n, t \rangle)}{\kappa^2} = \\ &\frac{-\kappa \kappa' \langle b, n \rangle + \kappa^2 \tau \langle b, b \rangle + \kappa^3 \langle b, t \rangle}{\kappa^2} = \\ &\frac{\kappa^2 \tau}{\kappa^2} = \tau; \end{aligned}$$

$\tau$  é a torção de  $\alpha$ . Portanto,  $\alpha$  é a curva desejada. ■

**II. Prova da unicidade:** A unicidade também pode ser provada pelo teorema de existência e unicidade de solução de um sistema de equações diferenciais lineares. Entretanto, vamos mostrar a unicidade a menos de movimentos rígidos, para curvas possuindo as mesmas  $\kappa(s)$  e  $\tau(s)$ .

Precisamos mostrar que  $\alpha$  é única a menos de translação e rotação em  $\mathbb{R}^3$ .

Figura 4-1: Ilustração do movimento rígido.



Fonte: elaborada pela autora (2023)

A figura 4-1 nos mostra uma ideia geométrica do movimento rígido, ou seja, por meio de uma translação podemos mandar o ponto  $\alpha_2(s_0)$  até o ponto  $\alpha_1(s_0)$  e, por meio de uma transformação ortogonal linear fazemos o triedro de  $\tilde{\alpha}$  no ponto  $\alpha_2(s_0)$  tender ao triedro de  $\alpha$  no ponto  $\alpha_1$ .

Primeiramente, observamos que comprimento de arco, a curvatura e a torção são invariantes por movimento rígido. Ou seja, se  $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um movimento rígido e  $\alpha = \alpha(t)$  é uma curva parametrizada, então vale a igualdade

$$\int_a^b \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt = \int_a^b \left| \frac{d(M \circ \alpha)}{dt} \right| dt.$$

De fato, uma vez que estes conceitos são definidos utilizando-se os produtos interno e vetorial de certas derivadas, sendo que as derivadas são invariantes por translação, e os produtos interno e vetorial são expressos em termos de comprimento de arco e dos ângulos entre vetores, e assim são também invariantes por movimento rígido.

Agora, suponha  $\alpha = \alpha(s)$  e  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(s)$ , curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, satisfaçam às condições  $\kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)$  e  $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$ ,  $s \in I$ . Sejam, respectivamente,  $\{t_0, n_0, b_0\}$  e  $\{\tilde{t}_0, \tilde{n}_0, \tilde{b}_0\}$  os triedros de Frenet de  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  em  $s = s_0 \in I$ .

Aplicando movimento rígido  $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ;  $M = A \circ \rho$  tal que  $\tilde{\alpha} = M \circ \alpha$  vai satisfazer  $\tilde{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ . Isto quer dizer, por exemplo, que uma translação  $A$  e uma rotação  $\rho$  vai levar  $\tilde{\alpha}(s_0)$  em  $\alpha(s_0)$  e o triedro  $\{\tilde{t}_0, \tilde{n}_0, \tilde{b}_0\}$  a coincidir com o triedro  $\{t_0, n_0, b_0\}$ . Depois disso, teremos  $\tilde{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$  e os triedros de Frenet  $t(s), n(s), b(s)$  e  $\tilde{t}(s), \tilde{n}(s), \tilde{b}(s)$  de  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$ , respectivamente, satisfazendo as equações de Frenet

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \kappa n, & \frac{d\tilde{t}}{ds} &= \kappa \tilde{n}, \\ \frac{dn}{ds} &= -\kappa t - \tau b, & \frac{d\tilde{n}}{ds} &= -\kappa \tilde{t} - \tau \tilde{b}, \\ \frac{db}{ds} &= \tau n, & \frac{d\tilde{b}}{ds} &= \tau \tilde{n}, \end{aligned}$$

com  $t(s_0) = \tilde{t}(s_0)$ ,  $n(s_0) = \tilde{n}(s_0)$ ,  $b(s_0) = \tilde{b}(s_0)$ .

Agora, vamos mostrar que para todo  $s \in I$  vale a unicidade. Usando as equações de Frenet, faremos com que a distância, entre elas, seja igualmente nula, isto é, dependendo do ponto que desejamos tomar, vale a unicidade.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left\{ |t - \tilde{t}|^2 + |n - \tilde{n}|^2 + |b - \tilde{b}|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left\{ \left( \sqrt{\langle t - \tilde{t}, t - \tilde{t} \rangle} \right)^2 + \left( \sqrt{\langle n - \tilde{n}, n - \tilde{n} \rangle} \right)^2 + \left( \sqrt{\langle b - \tilde{b}, b - \tilde{b} \rangle} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \{ 2\langle t - \tilde{t}, t' - \tilde{t}' \rangle + 2\langle n - \tilde{n}, n' - \tilde{n}' \rangle + 2\langle b - \tilde{b}, b' - \tilde{b}' \rangle \} \\
&= \langle t - \tilde{t}, \kappa n - \kappa \tilde{n}' \rangle + \langle n - \tilde{n}, (-\kappa t - \tau b) - (-\kappa \tilde{t} - \tau \tilde{b}) \rangle + \langle b - \tilde{b}, \tau n' - \tau \tilde{n}' \rangle \\
&= \kappa \langle t - \tilde{t}, n - \tilde{n} \rangle - \kappa \langle n - \tilde{n}, t - \tilde{t} \rangle - \tau \langle n - \tilde{n}, b - \tilde{b} \rangle + \tau \langle b - \tilde{b}, n - \tilde{n} \rangle = 0, \forall s \in I.
\end{aligned}$$

Logo, a expressão entre chaves é constante, e, como é nula para  $s = s_0$ , é de fato identicamente nula. Decorre daí, que  $t(s) = \tilde{t}(s)$ ,  $n(s) = \tilde{n}(s)$ ,  $b(s) = \tilde{b}(s)$ ,  $\forall s \in I$ . Como

$$\frac{d\alpha}{ds} = t = \tilde{t} = \frac{d\tilde{\alpha}}{ds},$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\tilde{\alpha}}{ds} &= t - \tilde{t} \\
\frac{d}{ds} (\alpha - \tilde{\alpha}) &= 0.
\end{aligned}$$

Integrando em ambos lados dessa última igualdade, temos

$$\begin{aligned}
\int \left( \frac{d(\alpha - \tilde{\alpha})}{ds} \right) ds &= \int 0 ds \\
\alpha - \tilde{\alpha} &= c \\
\alpha &= \tilde{\alpha} + c,
\end{aligned}$$

onde  $c$  é um vetor constante. Mas já que  $\alpha(s_0) = \tilde{\alpha}(s_0)$ , temos que  $c = 0$ ; logo,  $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(s)$  para todo  $s \in I$ . ■

## 4.2 Aplicações

Nesta seção, citamos uma aplicação do TFTLC, também apresentamos exemplos acerca do TFTLC no plano e acerca dos conceitos apresentados neste trabalho.

O Teorema da Teoria Local das Curvas Planas “mostra que a curvatura determina uma curva plana a menos de sua posição no plano.” (TENENBLAT, 2008, p.52). Decorre daí, uma

aplicação bem simples e clássica da geometria diferencial do teorema 4 no plano. Observamos ainda que no caso das curvas planas a torção  $\tau \equiv 0$ .

**Exemplo 4-1:** Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então,  $\alpha(I)$  é um segmento de reta se, e só se,  $\kappa(s) = 0, \forall s \in I$ .

Se  $k(s) = 0, \forall s \in I$ , então  $\alpha''(s) = 0$ . Por integrações obtemos,  $\alpha(s) = us + v$ , onde  $v \in \mathbb{R}^3$  e  $u$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^3$ , cujo traço  $\alpha(I)$  é um segmento de reta. Reciprocamente, se  $\alpha(I)$  é um segmento de reta, então  $\alpha(s) = us + v$ . Portanto, derivando  $\alpha(s), \forall s \in I$ ,  $\alpha'(s) = v$  e  $\alpha''(s) = 0$ , onde  $k(s) = |\alpha''(s)| = 0$ .

A hélice é uma curva que possui curvatura e torção constantes, e, também, inclinação constante, isto é, que ela faz ângulos constantes com os meridianos e paralelos. Nos casos extremos, a hélice é uma reta se a curvatura for nula e um círculo se a torção for nula.

**Exemplo 4-2:** Vamos obter o triedro de Frenet, a curvatura e a torção da hélice circular parametrizada pelo comprimento de arco

$$\alpha(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad s \in \mathbb{R},$$

onde  $a > 0$  é uma constante e  $b \neq 0$ . (ver figura 4-1)

Primeiro, derivamos  $\alpha$  em relação a  $s$ ,

$$\alpha'(s) = t(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( -a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right),$$

$$\alpha''(s) = \frac{-a}{a^2 + b^2} \left( \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right).$$

Logo, a curvatura será

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)| = \sqrt{\left( \frac{a}{a^2 + b^2} \right)^2 \left( \cos^2 \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \operatorname{sen}^2 \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$= \text{constante.}$

E os triedros de Frenet da hélice circular serão dados por

$$n(s) = \frac{\frac{-a}{a^2 + b^2} \left( \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)}{\frac{a}{a^2 + b^2}} = \left( -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right),$$

E  $b(s) = t(s) \times n(s)$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left( -a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) & \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left( a \operatorname{cos} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\operatorname{cos} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left( b \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -b \operatorname{cos} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \right),
\end{aligned}$$

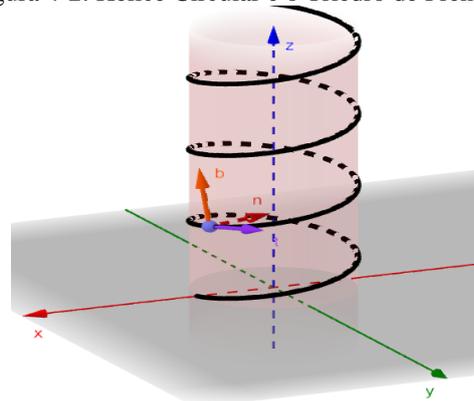
o  $t(s) = \alpha'(s)$  foi encontrado anteriormente.

Portanto, a torção será o produto interno de  $b'(s)$  e  $n(s)$ , para isso

$$b'(s) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \left( \operatorname{cos} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right),$$

$$\tau(s) = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \left( \operatorname{cos}^2 \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + \operatorname{sen}^2 \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{constante}.$$

Figura 4-2: Hélice Circular e o Triedro de Frenet.



Fonte: elaborada pela autora (2023)

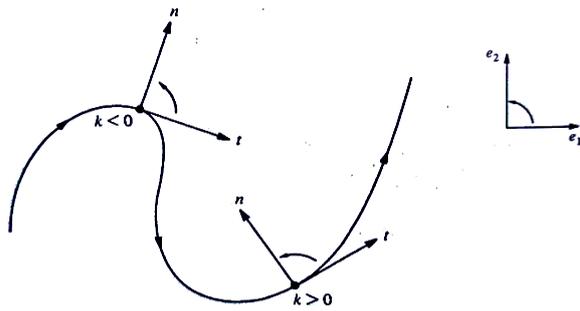
**Exemplo 4-3:** Podemos pensar se existe uma outra curva que tenha as mesmas propriedades da hélice circular na qual a curvatura e a torção são constantes. Através do teorema 4, vimos que para duas curvas com curvatura e torção iguais, elas são as mesmas a menos de um movimento rígido.

**Exemplo 4-4:** Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada regular plana (parâmetro arbitrário), e defina  $n = n(t)$ , de forma que as bases  $\{t, n\}$  e  $\{e_1, e_2\}$  tenham a mesma orientação e a curvatura  $\kappa = \kappa(t)$  definida por  $t' = \kappa n$  e tanto pode ser positiva quanto negativa. ( $\kappa$  muda de sinal quando mudamos a orientação de  $\alpha$  ou a de  $\mathbb{R}^2$ . Ver figura 4-3) Suponha que  $\kappa(t) \neq 0, t \in I$ . Nestas condições, a curva

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t), \quad t \in I,$$

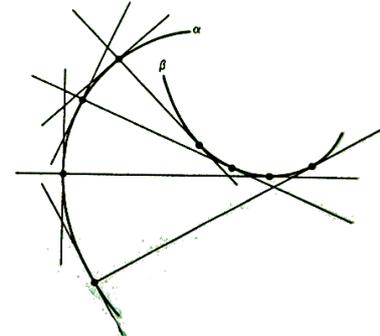
é chamada de *evolva* de  $\alpha$ . (ver figura 4-4)

Figura 4-3: Ilustração do sinal da curvatura.



Fonte: CARMO (2012)

Figura 4-4: Evoluta.



Fonte: CARMO (2012)

a) Vamos mostrar que a tangente em  $t$  da evoluta de  $\alpha$  é normal a  $\alpha$  em  $t$ . Para isso, parametrizamos  $\alpha$  pelo comprimento de arco. Logo,

$$\beta(t) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s), \quad t \in \mathbb{R}, s \in I.$$

Derivando a equação da evoluta e substituindo  $\alpha' = t$  e  $n' = -\kappa t$  (TENENBLAT, 2008) temos,

$$\beta' = \alpha' + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' n + \frac{1}{\kappa}n' = t - \frac{\kappa'}{\kappa^2}n + \frac{1}{\kappa}(-\kappa t) = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}n.$$

Dessa forma, vemos que a derivada da evoluta possui a mesma direção que a normal de  $\alpha$ . Portanto, a tangente de  $\beta'$  é normal a  $\alpha$ .

b) Considere as retas normais de  $\alpha$  em dois pontos vizinhos  $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$ . Faça  $t_1$  tender a  $t_2$  e mostre que o ponto de interseção entre as respectivas normais converge para um ponto do traço da evoluta de  $\alpha$ .

Considerando a parametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco  $s$  temos as seguintes retas normais a curva  $\alpha$  :

$$\beta_1 = \alpha(s_1) + tn(s_1), \quad \beta_2 = \alpha(s_2) + tn(s_2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para obter a intersecção fazemos

$$\alpha(s_1) + tn(s_1) = \alpha(s_2) + tn(s_2)$$

Utilizando artifícios algébricos e dividindo a expressão acima por  $s_2 - s_1$  obtemos

$$\frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{s_2 - s_1} = t \frac{n(s_2) - n(s_1)}{s_2 - s_1}$$

Tomando o produto interno da expressão acima com  $\alpha'(s_1)$  e fazendo o limite quando  $s_2 \rightarrow s_1$  temos:

$$\frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{s_2 - s_1} \alpha'(s_1) = t \frac{n(s_2) - n(s_1)}{s_2 - s_1} \alpha'(s_1)$$

$$1 = \lim_{s_2 \rightarrow s_1} t \frac{n(s_2) - n(s_1)}{s_2 - s_1} \alpha'(s_1)$$

$$1 = t \langle n'(s_1), \alpha'(s_1) \rangle$$

Concluimos deste modo que o ponto de intersecção converge para  $\frac{1}{k}$ . Ou seja, converge para um ponto do traço da evoluta de  $\alpha$ .

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse estudo da geometria diferencial nos permitiu compreender as propriedades da curva parametrizada regular por meio de conceitos fundamentais. Também foi possível ter conhecimentos de entes geométricos que, a grosso modo, mostram o comportamento local de uma curva, sendo eles, a curvatura e a torção.

A interpretação geométrica da curvatura é o quanto uma curva é entortada, ou ainda, o módulo é a medida de quão rapidamente a curva  $\alpha$  muda de direção no ponto  $\alpha(s)$ . A torção nos mostra o quanto a curva deixa de estar contida num plano, mais precisamente no plano osculador. O estudo desses conceitos nos permitiu desenvolver aplicações acerca dos conceitos utilizados para a demonstração do TFTLC e mais, demonstramos o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas que era nosso objetivo principal.

As aplicações desenvolvidas continham os conceitos necessária para a demonstração do teorema em questão, o exemplo 4-1 é uma aplicação que está ligada ao teorema 4 porém levamos ela para o  $\mathbb{R}^2$ , no plano, cuja torção é identicamente nula. Indicamos no exemplo 4-3 uma aplicação acerca do TFTLC, que pode ser trabalhada futuramente.

O estudo do Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas foi rico em novos conhecimentos, introduziu técnicas de geometria diferencial e reforçou o conhecimento de Cálculo. O aprofundamento de um conteúdo em que se aprofunde o mínimo, abre um leque muito grande para continuar estudando, podendo mesclar, tanto na matemática, quanto em outras áreas.

Conclui-se que este trabalho pode contribuir para a disseminação do conhecimento em Matemática e servir como um material de pesquisa sobre Geometria Diferencial das curvas parametrizadas diferenciáveis.

## REFERÊNCIAS

BROCKVELD, Leonardo de Liz. **Um estudo sobre curvas no plano e no espaço**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2018.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6° ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

DE LIMA, Ronaldo Freire. **Introdução à Geometria Diferencial**. 1° ed. Macapá: SBM, 2016.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5° ed. São Paulo: Atlas, 2003.

OLIVA, W. M. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 1971.

TENENBLAT, Keti. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2° ed. São Paulo: Blucher, 2008.