UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TABATINGA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GEOVANE DA SILVA DIAS

GEORGE GABRIEL STOKES E SUAS APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA E FÍSICA

Prof. Orientador: Dr. Antonio Iván Ruiz Chaveco
Prof. Coorientador: Dr. Edilson de Carvalho Filho

Tabatinga-AM
2023

GEOVANE DA SILVA DIAS

GEORGE GABRIEL STOKES E SUAS APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA E FÍSICA

Prof. Orientador: Dr. Antonio Iván Ruiz Chaveco
Prof. Coorientador: Dr. Edilson de Carvalho Filho

Artigo científico apresentado como Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção de nota parcial na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, ministrada pela Prof.ª Dr.ª Karem Keyth de Oliveira Marinho, do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga da Universidade do Estado do Amazonas.

Tabatinga-AM
2023

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

D541gg Dias, Geovane da Silva

George Gabriel Stokes e suas Aplicações na Matemática e Física / Geovane da Silva Dias. Manaus : [s.n], 2023.

29 f.: il.; 29 cm.

TCC - Graduação em Matemática - Licenciatura - Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2023.
Inclui bibliografia
Orientador: Chaveco, Antonio Iván Ruiz
Coorientador: Carvalho Filho, Edilson de

1. Stokes. 2. Integrais. 3. Teorema de Stokes e aplicações . I. Chaveco, Antonio Iván Ruiz (Orient.). II. Carvalho Filho, Edilson de (Coorient.). III. Universidade do Estado do Amazonas. IV. George Gabriel Stokes e suas Aplicações na Matemática e Física

Elaborado por Jeane Macelino Galves - CRB-11/463

GEOVANE DA SILVA DIAS

GEORGE GABRIEL STOKES E SUAS APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA E FÍSICA

Artigo científico apresentado como Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção de nota parcial na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, ministrada pela Prof.ª Dr.ª Karem Keyth de Oliveira Marinho, do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga da Universidade do Estado do Amazonas.

Data de aprovação: 14 de março de 2023.

____

Prof. Dr. Antonio Iván Ruiz Chaveco (Presidente da Banca avaliadora / Orientador – UEA)

Edilson de Carvalho Filho

Prof. Dr. Edilson de Carvalho Filho (Coorientador – UEA)

Edfram Rodrigues Pereira

Prof. Me. Edfram Rodrigues Pereira (Examinador Interno – UEA)

Zequias Ribeiro Montalvam Filho

Prof. Esp. Zequias Ribeiro Montalvam Filho (Examinador Interno – UEA)

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Antes de agradecer, gostaria de declarar: *“Porque Ele vive, eu posso crer no amanhã”.*

Agradeço em primeiro lugar, ao meu Amigo Jesus Cristo, Filho do Deus Vivo. Ele é o motivo de todas as minhas vitórias. Tenho absoluta certeza em meu coração, que Ele me ajudou a suportar todas as dificuldades e momentos que pensei em desistir. Obrigado Jesus!

Agradeço a minha Família, na pessoa dos meus pais, Rosiely e Gilvano Dias, que sempre me apoiaram na minha trajetória acadêmica, e nunca mediram esforços pra me ajudar, seja emocionalmente e financeiramente. Vocês são tudo pra mim. Eu os amo muito.

Agradeço a minha irmã Geane Dias. Aqui eu lhe honro minha querida ‘*irmãzinha’*, suas orações, seus conselhos, ajuda emocional me fizeram suportar as pressões de dias difíceis. Você é um exemplo de busca do Senhor em minha vida. Obrigado por tudo. Amo-te.

Agradeço ao meu irmão Waston Dias, que amo muito. Lembro do seu sacrifício de parar de estudar por um semestre sua faculdade, e cuidar de nossa mãe em meu lugar, que estava passando por período ruim de sua saúde, e eu permanece com os estudos graças à sua abdicação. Eu tenho uma dívida de gratidão com Você: ‘*gagotinho’*.

Agradeço a minha irmã Tatiana Dias, sua ajuda financeira me salvou em dias difíceis. Obrigado irmã.

Agradeço a Família Santos, meu amigo Rubem Albino, Selenir Silva, Romem e Selena. Obrigado por todo apoio e incentivo nos meus estudos.

Agradeço aos amigos que a faculdade me deu. Em especial ao Elvis da Silva Rodrigues e Natali Façanha de Souza, vocês são pessoas muito importantes para mim, me ajudaram muito nos meus momentos de profunda tristeza, pela ausência da minha Família, e me deram muita força quando pensei em desistir. Obrigado pela amizade de vocês. Eu os admiro muito e os guardo em meu coração.

Agradeço ao Professor Dr. Antonio Iván Ruiz Chaveco, por ter aceitado o convite de me orientar neste trabalho. Obrigado pela orientação, sua trajetória me fascina. Ao meu coorientador, Professor Dr. Edilson de Carvalho Filho, obrigado pela atenciosidade na correção de conceitos apresentado neste trabalho e por todo os conselhos e troca de conhecimentos.

Agradeço a minha Professora Dra. Karem Keyth de Oliveira Marinho, por sua atenciosidade nas aulas de TCC, e pelo carinho nas orientações extra-sala de aula, pelas conversas e pelos conselhos para prosseguir com os estudos. Obrigado *‘profa’*.

Agradeço a todos que contribuíram direta e indiretamente para essa conquista. Meu muito obrigado.

“Se você vai por águas rasas, vai onde quer, mas se você vai em águas profundas, é o rio que te leva”.

(Hernane Santos)

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o matemático e físico britânico George Gabriel Stokes, assim como algumas de suas principais contribuições para o desenvolvimento do conhecimento humano, tendo como objetivo demostrar o famoso Teorema de Stokes e suas aplicações na Matemática e Física. Foi feito um estudo bibliográfico, tendo como base o livro de Chaveco (2015), artigos científicos que abordam sobre o assunto e outros livros de cálculo. Apresenta-se algumas definições essenciais do Cálculo Vetorial, para melhor entendimento do teorema. Sendo assim, foi possível compreender com este trabalho, uma ampliação dos estudos acerca de campos vetoriais, integrais de linha (curvilíneas), integrais de superfícies, o trabalho realizado, conceitos que são muito importantes para se chegar na demonstração do teorema. Também concluímos que o Teorema de Stokes é de fundamental importância, pois possibilita encontrar resultados significativos e de grande aplicabilidade na Física, Mecânica, Química, Engenharia e em outras áreas que envolvam o cálculo de fluídos.

Palavras-chave: Stokes; Integrais; Teorema de Stokes e aplicações.

RESUMEN

En este trabajo presentamos al matemático y físico británico George Gabriel Stokes, así como algunas de sus principales contribuciones al desarrollo del conocimiento humano, con el objetivo de mostrar el famoso teorema de Stokes y sus aplicaciones en Matemáticas y Física. Se realizó un estudio bibliográfico, basado en el libro de Chaveco (2015), artículos científicos que abordan el tema y otros libros de cálculo. Se presentan algunas definiciones esenciales del cálculo vectorial para una mejor comprensión del teorema. Así, fue posible comprender con este trabajo, una expansión de estudios sobre campos vectoriales, integrales de línea (curvilíneas), integrales de superficie, el trabajo realizado, conceptos que son muy importantes para llegar a la demostración del teorema. También concluimos que el teorema de Stokes es de fundamental importancia, ya que permite encontrar resultados significativos de gran aplicabilidad en química, mecánica, química y engeñaría y en otras áreas que involucran el cálculo de fluidos.

Palabras clave: Stokes; Integral; Teorema de Stokes y aplicaciones.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A História da Matemática constitui um dos capítulos mais interessante do conhecimento. Permitindo-nos compreender as origens das ideias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento; enxergar os homens, os fatos e os protagonistas que criaram essas ideias, estudar as circunstâncias que se desenvolveram tais conhecimentos. Ao longo do tempo, muitos foram os matemáticos que contribuíram para a aparição do Cálculo, cabe citar: Isacc Newton, Leonhard Euler, Gorge Green e entre outros. Desta forma, podemos destacar Stokes e suas importantes contribuições, suas linhas de estudos e o teorema de Stokes, assim intitulado.

O Teorema de Stokes, tem seu nome em homenagem ao matemático e físico britânico Sir George Stokes (1819 – 1903), ele pode ser visto como uma extensão do Teorema de Green. Por sua vez, o Teorema de Green, relaciona uma integral dupla sobre uma região no plano, com uma integral de linha em torno de sua curva limite plana, já o Teorema de Stokes, relaciona uma integral de superfície com uma integral em torno da curva de determinada fronteira, ou seja, em uma curva no espaço.

Neste trabalho apresentaremos de forma didática a demonstração do Teorema de Stokes, um dentre os mais importantes teoremas dentro do Cálculo Vetorial. Esse teorema se aplica na Mecânica, Química e Engenharia. O mesmo, sempre anda ao lado dos seus inseparáveis companheiros, o Teorema de Green e o Teorema da Divergência de Gauss. De acordo com Thomas (2009): "O teorema de Stokes generaliza a forma tangencial do teorema de Green de uma região no $\mathbb{R}^2$ para uma superfície no $\mathbb{R}^3$, da mesma forma que o teorema de Gauss, generaliza a forma normal do teorema de Green". O teorema possibilita encontrar resultados significativos e de grande aplicabilidade na Física, Mecânica, Química, Engenharia e em outras áreas que envolvam o cálculo de fluídos.

Este trabalho subdivide-se em seções. Na seção 1, temos a parte introdutória. Na seção 2, enfatizamos a história e a vida de Stokes, tornando este conhecido e mostrando suas contribuições. Na seção 3, estão as noções preliminares que envolve os conceitos de campo vetorial (estes são as funções que associam vetores a pontos no espaço), integrais de linha (que podem ser usadas para encontrar o trabalho realizado por um campo de força para mover um objeto ao longo de uma curva), o trabalho realizado e integrais de superfícies (que podem ser usadas para encontrar a taxa de fluidos através de uma superfície). E para concluir, na seção 4, apresentaremos a demonstração do Teorema de Stokes na versão do Cálculo Vetorial, e algumas de suas aplicações na Matemática e Física.

2 FATOS HISTÓRICOS

Nesta seção falaremos um pouco sobre a parte histórica da vida de Stokes, sobretudo, enfatizando as suas importantes contribuições para o desenvolvimento do conhecimento humano. Os seus estudos e pesquisas nos ajudaram a entender sobre temas relacionados à dinâmica dos fluídos, ondulatória e dentre outros assuntos com ênfase nesta área. Até hoje esse gênio é lembrado e respeitado pelos seus significativos feitos na Matemática e Física.

2.1 História e Vida de Stokes

Figura 1 - George Gabriel Stokes (1819-1903)

Fonte: (RIBEIRO,2014)

George Gabriel Stokes (1819-1903) foi um grande matemático e físico britânico. Nasceu no dia 13 de agosto de 1819 na cidade de Skreen, Sligo, Irlanda. E faleceu na Inglaterra, na cidade de Cambridge, no dia 1° de fevereiro de 1903.

Era filho de Gabriel Stokes, reverendo da paroquia de Skreen, *County Sligo* (condado de Sligo, Irlanda) e reitor da Skreen. Sua mãe Elizabeth Haughton, era filha de outro reverendo. Stokes nasceu e cresceu em uma família de origem protestante, recebendo uma educação fortemente influenciada pela religião, era o filho mais novo de seis irmãos, três dos mais velhos se tonaram padres.

Antes de ir para uma escola, Stokes foi ensinado por um escrivão da paroquia de seu pai, e estudava também com o seu pai. Gabriel Stokes, em particular, estudou na Faculdade de Trinity Dublin, possibilitando oferecer conhecimentos, além do religioso, ou seja, pode ensinar para os seus filhos a gramática latina. Desta forma, Gabriel, pôde dar as crianças uma introdução mais larga à educação.

No ano de 1832, com 13 anos de idade, Stokes partiu de Skreen, onde começou a estudar na escola Rev. R H Wall´s, em Dublin. Se destacava nos estudos escolares habituais, e também pela solução de problemas geométricos, o que chamava a atenção dos mestres matemáticos. Ele estudou durante três anos nessa escola, onde passou a morar com o seu tio Jhon Stokes. Durante esses anos que estava em Dublin, o seu pai faleceu, causando no garoto um amadurecimento precoce.

Em 1835, com 16 anos de idade, George Stokes se mudou para a Inglaterra e entrou para a Faculdade de Bristol, claramente o talento de Stokes nos seus estudos foi notado, fazendo com que ele ganhasse um prêmio. Pessoas importantes fizeram parte de sua história; o Reitor da Faculdade de Bristol, Dr. Jerrad, sempre o notava, e acreditava no sucesso do rapaz. Esteve em Bristol, durante 2 anos, o que o ajudou a se preparar para os seus estudos em Cambridge, pois ele tinha um grande desejo de entrar na Faculdade de Pembroke, em Cambridge. Esse desejo se realizou em 1837 quando ele entrou na Faculdade de sua preferência. Dois anos depois de ter entrado no *Pembroke College, Cambridge*, o gosto pela matemática começou, cada vez mais, a se desenvolver com o apoio tutorial de William Hopkins (1793-1866), que teve um papel tão importante quanto a de um conferencista.

Passados quatro anos em Pembroke, no ano de 1841, Stokes concluiu sua graduação como Señior Wrangler (O Primeiro da Classe). Imediatamente a Faculdade lhe concedeu uma Bolsa de Estudos. Depois de formado, ele publicou trabalhos que o tornaram reconhecido como um grande matemático. Chaveco (2015), nos diz “em 1849, foi nomeado Professor Lucasiano de Matemática da Universidade de Cambridge, e teve contribuições extraordinárias para a dinâmica de fluídos (Navier-Stokes), a Óptica e o (Teorema de Stokes).” (CHAVECO, 2015, p.190).

Inicialmente, aconselhado por William Hopkins, Stokes começou a investir na pesquisa hidrodinâmica, e foi nesta área que ele começou a trabalhar. Não foi apenas pelo conselho de Hopkins que ele entrou neste campo de estudo, mas se sentiu inspirado pelo recente trabalho de George Green, nessa mesma área. Stokes publicou documentos sobre o movimento de fluídos incompreensíveis nos anos de 1842 e 1843. Completada a sua pesquisa, Stokes descobriu que Duhamel, tinha obtido resultados muito semelhantes aos seus, desde quando trabalhava com a distribuição de calor nos sólidos. Para justificar sua publicação, Stokes concluiu que os resultados foram obtidos em situações completamente diferentes.

Entre 1845 e 1850, Stokes trabalhou na teoria dos fluidos viscosos. Em 1851, ele deduziu uma equação, (Teorema de Stokes), que poderia ser aplicada ao movimento de uma pequena esfera ao cair dentro de um meio viscoso, assim obtendo a velocidade sob a influência de certa força dada, no caso a gravidade. Tal equação podia ser utilizada para explicar a maneira pela qual as nuvens flutuam no ar e como as ondas se desfaziam em água. Podia se usar em problemas de ordem prática que envolvessem a resistência da água aos navios que se movessem nela. Dito isso, podemos perceber uma interconexão de tal ordem, pois depois de 60 anos de enunciada a Lei de Stokes, foi empregada para um objetivo que não imaginávamos estabelecer a carga elétrica de um único elétron na experiência de Milikan.

Em 1849, Stokes publicou um estudo sobre a variação da gravidade na superfície da Terra. Ainda em 1851, Stokes continuava publicando seus artigos e estudos, ele foi eleito para a Royal Society, sendo premiado pela sociedade com a medalha Rumford em 1852, algo que fez ele ser apontado para ser secretário da sociedade em 1854. Até então, apenas Sir Isaac Newton havia assumido esses três cargos.

Em 1852, Gabriel Stokes, explicou como ocorre o fenômeno fluorescência. Ele investigou esse fenômeno e usando-o no estudo da radiação ultravioleta, por exemplo, o quartzo ao contrário do vidro comum, é transparente à radiação ultravioleta. Em outras palavras, certos minerais emitem luz visível, quando expostos à luz ultravioleta. Atualmente, este efeito é a base do sistema de iluminação fluorescente.

Em 1857, Stokes conheceu Mary Susannah Robinson, e se casaram. Ela era filha do ministro Thomas Romney Robinson (1792-1882), que além de ministro, tinha outros títulos: astrônomo, físico e diretor do Observatório Astronômico de Armagh, Irlanda do Norte.

No ano de 1885, Stokes ganhou por votação e se tornou presidente da *Royal Society*, onde presidiu por cinco anos.

Muitas foram as contribuições de Gabriel Stokes, na matemática e na física. Sobre isso, Chaveco (2015), nos diz:

> O Matemático e Físico fez contribuições na Dinâmica dos Fluídos; teoria ondulatória da luz; alteração de comprimento de onda da luz, descrito o fenômeno da fluorescência, observada o espatoflúor e vidro de urânio, materiais que tinha a característica de converter; composição e resolução de fluxos de luz polarizada; reflexão metálica; a birrefringência; a cristal da Islândia longarina; aspecto de absorção de sangue; corpos orgânicos e dentre outros (CHAVECO, 2015, p.190).

Os trabalhos matemáticos e físicos de Stokes foram publicados em cinco volumes. Os primeiros três, Stokes editou em 1880, 1883 e 1891. Os dois últimos, sob a orientação do físico e matemático Joseph Larmor (1857 – 1942). Stokes escreveu as obras *“Sobre a Luz”* (1887) e *“Teologia Natural”* (1981).

Em 1886, foi presidente do Instituto Victoria (uma sociedade filosófica, que buscava defender as verdades bíblicas, contra a ciência).

Em 1902, foi eleito Mestre de Pembroke College.

George Gabriel Stokes faleceu no dia 1º de fevereiro de 1903, deixando um legado excepcional de linhas de estudo, sobretudo vários temas para o enriquecimento da Matemática e Física, dentre muitos, destaco as Integrais de Linha e Integrais de Superfície, os seus estudos sobre o comportamento de fluidos viscosos, em particular pela sua lei da viscosidade, que descreve o movimento de uma esfera sólida num fluído, e pelo teorema de Stokes, um teorema basilar na análise vetorial.

Contudo, sabemos da grande colaboração desse matemático ao longo da história. Com sua peculiaridade, contribuiu com n formas para o desenvolvimento da humanidade nas mais variadas áreas do conhecimento, matemática, física, química, e entre outras.

Em homenagem a Stokes, atribuiu-se o seu nome à unidade de viscosidade dinâmica do sistema CGS (centímetro-grama-segundo), em 1928.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, busca-se apresentar os conceitos básicos sobre o Cálculo Vetorial para, desta forma, demonstrar o Teorema de Stokes.

3.1 Campo Vetorial

A seguir apresentaremos a definição de campo vetorial, que será útil para as aplicações do teorema neste trabalho. Esses campos são muitos utilizados com grandezas físicas.

Um campo vetorial sempre associa um vetor com um ponto no espaço, seja ele no $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$.

Em geral, um campo vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ e cuja imagem é um conjunto de vetores no $\mathbb{R}^2$ou $\mathbb{R}^3$.

Definição 1. Stwart (2013) Seja D um conjunto em $\mathbb{R}^2$ (região plana). Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é uma função F que associa cada ponto (x, y) em D a um vetor bidimensional $F(x, y)$.

Uma vez que $F(x, y)$ é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas funções **componentes** $\boldsymbol{P}$ *e* $\boldsymbol{Q}$ da seguinte forma:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),$$

ou de forma mais compacta, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$**.** Cabe destacar que $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ são os **vetores unitários** do vetor F. Em um sistema de coordenadas cartesianas, $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ é um unitário na direção do eixo Ox **e** $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ é um unitário na direção Oy.

Se cada ponto A de uma região está associado exatamente a um vetor que tem A como ponto inicial, então a coleção de todos esses vetores constitui um **campo vetorial;** aqui se supõe que os vetores sejam independentes do tempo, tais campos vetoriais são chamados de estacionários.

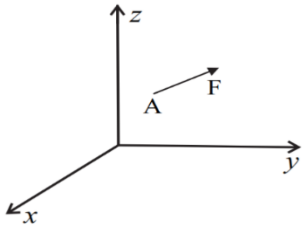
Considere-se um campo vetorial no $\mathbb{R}^3$ e denote-se pela função $F(x, y, z)$ o vetor associado ao ponto $A(x, y, z)$, assim pode-se escrever:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\widehat{\boldsymbol{k}}.$$

Novamente no sistema de coordenadas cartesianas, $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ é um unitário na direção do eixo Ox **,** $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ é um unitário na direção Oy e $\widehat{\boldsymbol{k}}$ é um unitário na direção Oz.

Este é um campo vetorial em três dimensões.

Figura 2 - Gráfico de um campo vetorial.m



Fonte: (CHAVECO, 2015)

Definição 2. Stwart (2013) Um campo vetorial em três dimensões é uma função $F(x, y, z)$ cujo domínio é $D \subset \mathbb{R}^3$ e cujo contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Se $(x, y, z) \in D$, então,

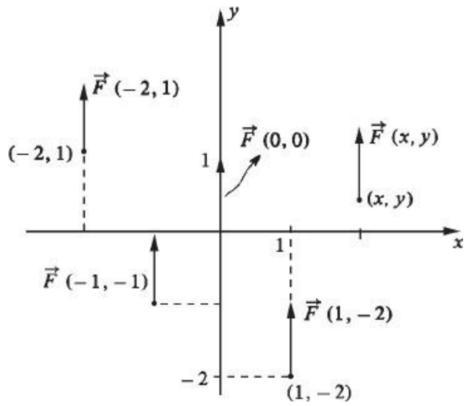
$$\boldsymbol{F(x,y,z) = P(x,y,z)\hat{\imath} + Q(x,y,z)\hat{\jmath} + R(x,y,z)\hat{k}},$$

onde P, Q e R são funções escalares.

Exemplo 01. Represente geometricamente o campo vetorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x, y) = \vec{\jmath} = (0,1)$.

Solução:

Figura 3 - Gráfico de um campo vetorial no $\mathbb{R}^2$.



Fonte: (GUIDORIZZI, 2013)

Trata-se de um campo vetorial constante que associa cada ponto (x, y) de $\mathbb{R}^2$, ao vetor $\vec{\jmath} = (0,1)$, aplicado em (x, y).

3.2 Integrais de Linha

As integrais de linhas são integrais em superfícies planas de uma determinada curva em um campo vetorial; como exemplos temos: o campo magnético ou campo elétrico. Supondo que tenhamos um vetor força não constante e que não seja dado ao longo de uma reta e sim de uma curva. Para encontrar uma resposta para problemas como estes foram criadas as integrais de linha.

A integral de linha pode ser vista como uma forma de generalizar a integral definida de uma variável,

$$\int_{b}^{a} \boldsymbol{f(x)dx}.$$

aqui se tem um intervalo de reta $[a, b]$, mas nesse caso será substituído por um segmento de curva C, e o integrando por um campo escalar ou vetorial definido sobre uma curva. Este tipo de integral denomina-se **integral de linha ou integral curvilínea:**

$$\int_{C} \boldsymbol{f(x,y)ds}.$$

Seja C uma curva plana dada pelas equações paramétricas $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ ou o que é equivalente, pela equação vetorial $r(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$, e se admite que C é uma curva lisa. Divide-se o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ e faz-se $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$, então os pontos correspondentes $P_i^*(x_i, y_i)$ dividem C em sub-arcos de comprimento $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, que em particular podem ser de igual comprimento. Escolhe-se um ponto qualquer $P_i^*(x_i, y_i)$ no i-ésimo sub-arco, calcula-se f no ponto $P_i^*(x_i, y_i)$, e forma-se a soma:

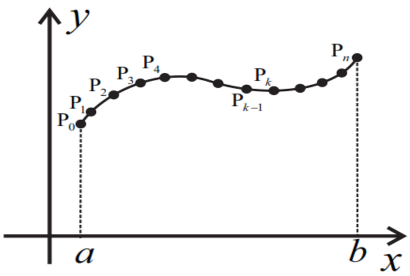
$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i}$$

o que é semelhante a soma de Riemann para uma função de uma variável real. Se f é definida sobre uma curva lisa dada pelas equações antes indicadas, então a integral de linha sobre C é,

$$\int_{C} \boldsymbol{f(x,y)ds} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i}$$

No caso em que existir o limite. Se o limite não existir, não pode definir a integral de linha para a função.

Figura 4 - Partição da Curva C integral de linha.



Fonte: (CHAVECO,2015)

O comprimento de arco da integral de linha pode ser calculado pela fórmula:

$$\int_C \boldsymbol{f(x,y)ds} = \int_a^b \boldsymbol{f\big(x(t),y(t)\big)}\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2}\,\boldsymbol{dt}$$

Se $f(x,y) \geq 0$, então a integral, $\int_C \boldsymbol{f(x,y)ds}$, representa a área de um lado da cerca ou cortina cuja base é C e cuja altura em $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ é $\boldsymbol{f(x,y)}$**.**

3.3 Trabalho Realizado

Suponha-se que $F = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath} + R\hat{k}$ é um campo vetorial de força contínua em $\mathbb{R}^3$, e deseja-se calcular o trabalho exercido por essa força movimentando uma partícula ao longo de uma curva C, para isso, se divide C em sub-arcos $P_{i-1}P_i$ com comprimento Δs_i e escolhe-se $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ o movimento da particula desde P_{i-1} até P_i na curva se processa na direção $T(t_i^*)$, versor tangente à curva em $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$, então o trabalho para movimnetar a partícula desde P_{i-1} para P_i é aproximadamente

$$[\boldsymbol{F_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)} \cdot \boldsymbol{T(t_i^*)}]\Delta \boldsymbol{s_i}$$

E o trabalho total para movimentar a particula ao longo de C é aproximadamente a seguinte soma,

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} [\boldsymbol{F_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)} \cdot \boldsymbol{T(t_i^*)}]\Delta \boldsymbol{s_i}.$$

Portanto, se define o trabalho feito por um campo de força F como o limite da $Soma\ de\ Rieman$, ou seja:

$$\boldsymbol{W} = \int_C \boldsymbol{F(x,y,z)} \cdot \boldsymbol{T(x,y,z)ds} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{Tds}$$

Assim, define-se a integral de linha de F ao longo de C como:

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_C \boldsymbol{F(r(t)} \cdot \boldsymbol{r\grave{}(t)dt} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{Tds}$$

Ou seja,

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_C \boldsymbol{Pdx + Qdy + Rdz}$$

Onde $F = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath} + R\hat{k}$.

Se $D \subset R^2$ e se o contradomínio é um subconjunto de V_2, então F é um campo vetorial em duas dimensões, dado por: $F(x,y) = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$, onde P e Q são funções escalares.

Nesse caso a integral de linha tem a forma,

$$\int_C \boldsymbol{F \cdot dr} = \int_C \boldsymbol{Pdx + Qdy}$$

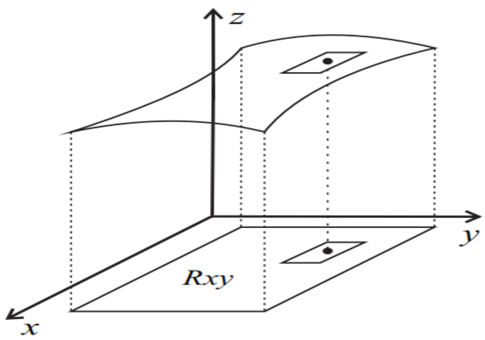
essa integral representa o trabalho realizado pelo campo F, e assim,

$$\boldsymbol{W} = \int_C \boldsymbol{F \cdot ds}\,.$$

3.4 Integrais de Superfícies

Considere o caso em que se tenha uma superfície S representada explicitamente pela equação $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ e seja $\boldsymbol{R_{xy}}$ a projeção de $\boldsymbol{S}$ sobre o plano $\boldsymbol{xy}$, como se mostra no gráfico:

Figura 6 - Gráfico da superfície.



Fonte: (CHAVECO, 2015)

De forma semelhante podem-se expressar os casos de forma em que $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$, projetando-se sobre os planos xy e yz respectivamente.

Denotar-se-ão por ΔS_k e ΔT_k porções de áreas da superfície S e do plano tangente no ponto $B_k(x_k, y_k, z_k)$, respectivamente, que se projetam sobre o retângulo R_k contido em R_{xy}.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^3$ e $S \subset D$ uma superfície limitada. Seja g uma superfície definida em D e limitada em S, obtém-se os elementos de área ΔS_k, $k = 1,2, \dots, m$; elegendo em cada partição um ponto arbitrário $B_k(x_k, y_k, z_k)$, avaliando g em $B_k(x_k, y_k, z_k)$ para cada K e formando a soma,

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{g(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k}.$$

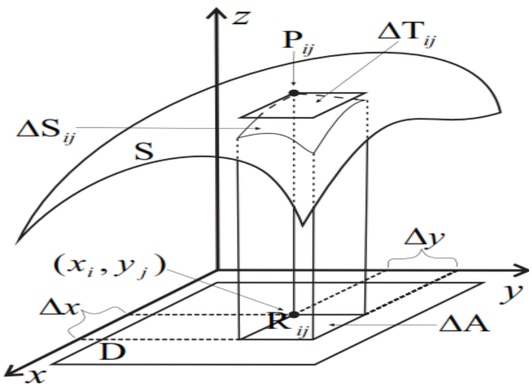
E tomando agora o limite quando $\lambda \longrightarrow 0$, onde $\lambda = max(\Delta S_k)$ este limite, se existir, define-se como a integral da função g sobre S, e denota-se por:

$$\iint_S \boldsymbol{g(x,y,z)ds} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g(x_k, y_k, z_k)}\Delta \boldsymbol{S_k}.$$

Para lograr um procedimento de cálculo da integral superfície com integrando escalar é preciso expressar o ds de uma forma mais adequada, para isso, considere-se que $f(x,y) \geq 0$, e que D (domínio de f) é um retângulo. Dividindo D em sub-retângulos R_{ij} com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Sejam (x_j, y_j) o vértice de R_{ij} mais próximo da origem, e P_{ij} $(x_i, y_j, f(x_i, y_j)$ o ponto de S correspondente a (x_i, y_j). O plano tangente a S em P_{ij} é uma aproximação de S perto de P_{ij}. Assim, a área ΔT_{ij} da parte do plano é a aproximação à área ΔS_{ij} da parte de S. Então a soma, $\sum\sum \Delta T_{ij}$ é uma aproximação da área total S, e chega-se à definição da área da superfície S como:

$$\boldsymbol{A(S)} = \lim_{\boldsymbol{m,n}\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Delta \boldsymbol{T_{ij}}$$

Figura 7 - Gráfico da superfície para a Soma de Riemann.



Fonte: (CHAVECO, 2015)

Sejam os vetores a e b de origem em P_{ij} e que correspondem aos lados do paralelogramo com área ΔT_{ij} . Então $\Delta T_{ij} = |a \times b|$; onde as retas tangentes a S em P_{ij} no plano xy são tais que $\Delta z = f_x \Delta x$ e no plano yz são tais que $\Delta z = f_y \Delta y$ onde f_x e f_y são as inclinações das retas, pela definição de um vetor por suas componentes, pode-se indicar,

$$\boldsymbol{a} = \Delta \boldsymbol{x\hat{\imath}} + \Delta \boldsymbol{z\widehat{k}}$$

$$\boldsymbol{b} = \Delta \boldsymbol{y\hat{\jmath}} + \Delta \boldsymbol{z\widehat{k}}$$

Assim, têm-se que,

$$\boldsymbol{a} = \Delta \boldsymbol{x\hat{\imath}} + \boldsymbol{f_x}\Delta \boldsymbol{x\widehat{k}},$$

$$\boldsymbol{b} = \Delta \boldsymbol{x\hat{\imath}} + \boldsymbol{f_y}\Delta \boldsymbol{y\widehat{k}}.$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \widehat{\boldsymbol{k}} \\ \Delta \boldsymbol{x} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{f_x} \Delta \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} & \Delta \boldsymbol{y} & \boldsymbol{f_y} \Delta \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{f_x} \Delta \boldsymbol{x} \Delta \boldsymbol{y} \hat{\boldsymbol{\imath}} - \boldsymbol{f_y} \Delta \boldsymbol{x} \Delta \boldsymbol{y} \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \Delta \boldsymbol{x} \Delta \boldsymbol{y} \widehat{\boldsymbol{k}} = \left[-\boldsymbol{f_x} \hat{\boldsymbol{\imath}} - \boldsymbol{f_y} \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \widehat{\boldsymbol{k}}\right] \Delta \boldsymbol{A}.$$

Conclui-se que,

$$\Delta \boldsymbol{T_{ij}} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{\boldsymbol{f_x^2} + \boldsymbol{f_y^2} + \boldsymbol{1}} \Delta \boldsymbol{A}.$$

Fazendo uso de ΔT_{ij}, a integral de superfície com integrando escalar pode ser calculada por meio de uma integral dupla do seguinte jeito.

Definição: Se S é uma superfície dada explicitamente pela equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está na região R_{xy} do plano xy , então ds ,que representa o diferencial de superfície, se define mediante a expressão:

$$\boldsymbol{ds} = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{2}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{1}}\right] \boldsymbol{dA} = \sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{2}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{1}} \boldsymbol{dxdy}.$$

Assim, a integral de superfícies pode ser calculada pela fórmula:

$$\iint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \boldsymbol{ds} = \iint_{\boldsymbol{R_{xy}}} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\big) \sqrt{\boldsymbol{f_x}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{f_y}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{1}} \boldsymbol{dxdy}.$$

De forma semelhante, se a equação de S está dada de forma explícita pela equação $y = h(x, z)$, então, a integral de superfície pode ser calculada pela fórmula:

$$\iint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \boldsymbol{ds} = \iint_{\boldsymbol{R_{xz}}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) \sqrt{\boldsymbol{h_x}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{h_z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{1}} \boldsymbol{dxdz}.$$

No caso em que $x = k(y, z)$, então, a integral de superfície pode ser calculada pela fórmula:

$$\iint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \boldsymbol{ds} = \iint_{\boldsymbol{R_{yz}}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \sqrt{\boldsymbol{k_y}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{k_z}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{1}} \boldsymbol{dydz}.$$

4 O TEOREMA DE STOKES E AS SUAS APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA E FÍSICA

Nesta seção iremos demonstrar um dos teoremas de fundamental importância para a Matemática e outras áreas do conhecimento humano que é o Teorema de Stokes. O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green, ou seja, o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região no plano, com uma integral de linha em torno de sua curva limite. O Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral em torno da curva da fronteira S (que é uma curva no espaço).

4.1 Teorema de Stokes

O teorema de Green na forma vetorial pode ser formulado do seguinte jeito:

$$\oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \boldsymbol{ds} = \iint_{\boldsymbol{R}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{K} \boldsymbol{dA}$$

Onde $\boldsymbol{C}$ é a fronteira de $\boldsymbol{R}$. Esse resultado pode ser estendido a uma curva fechada $\boldsymbol{C}$ em três dimensões que seja a fronteira de $\boldsymbol{S}$.

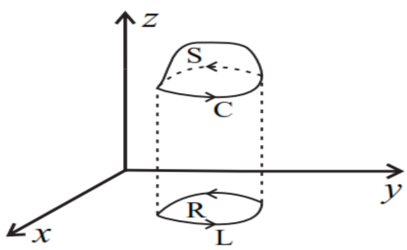
Teorema de Stokes: A integral curvilínea do componente tangencial de $\boldsymbol{F}$ tomada uma vez ao longo de $\boldsymbol{C}$ na direção positiva é igual a integral de superfície do componente normal de $\boldsymbol{rot\ F} = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})$ sobre $\boldsymbol{S}$.

$$\oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \boldsymbol{ds} = \iint_{\boldsymbol{S}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \boldsymbol{ds}$$

Onde $\boldsymbol{n}$ é o vetor unitário normal a $\boldsymbol{S}$, e o $\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial}{\partial z}\widehat{\boldsymbol{k}}$.

Demonstração: Considera-se que $\boldsymbol{S}$ está dada pela equação $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ e que a projeção de $\boldsymbol{S}$ sobre o plano $\boldsymbol{xy}$ é a região $\boldsymbol{R}$, limitada pela curva $\boldsymbol{L}$ orientada de acordo a curva $\boldsymbol{C}$.

Figura 4 - Gráfico da superfície considerada no Teorema de Stokes.



Fonte: (CHAVECO, 2015)

Nesse caso o produto escalar tem a seguinte forma,

$$(\nabla \times F) \cdot n = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial Z}\right)(\hat{\imath} \cdot n) - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)(\hat{\jmath} \cdot n) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(\hat{k} \cdot n)$$

Considere-se inicialmente a integral,

$$\iint_S [\nabla \times (P\hat{\imath})] \cdot nds$$

$$\nabla \times (P\hat{\imath}) = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & 0 & O \end{bmatrix} = \frac{\partial P}{\partial z}\hat{\jmath} - \frac{\partial P}{\partial y}\hat{k}$$

De modo que:

$$\nabla \times (P\hat{\imath}) \cdot nds = \left(\frac{\partial P}{\partial z} n \cdot \hat{\jmath} - \frac{\partial P}{\partial y} n \cdot \hat{k}\right) ds$$

Como a equação de S é $z = f(x, y)$, então o vetor de posição correspondente a qualquer ponto de S é: $r = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + f(x, y)\hat{k}.$

Assim o vetor,

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial y}\hat{k}$$

é tangente à superfície de S em qualquer um de seus pontos, e, portanto, perpendicular ao vetor normal n em cada um de seus pontos, de modo que:

$$n \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = n \cdot \left(\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial y}\hat{k}\right) = n \cdot \hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial y} n \cdot \hat{k} = 0$$

Já que o produto escalar do membro esquerdo é zero. Logo se tem:

$$n \cdot \hat{\jmath} = -\frac{\partial z}{\partial y} n \cdot \hat{k},$$

Assim chega-se a,

$$\nabla \times (P\hat{\imath}) \cdot nds = -\left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} n \cdot \hat{k} + \frac{\partial P}{\partial y} n \cdot \hat{k}\right) ds$$

Essa expressão pode-se também escrever como:

$$\nabla \times (P\hat{\imath}) \cdot nds = -\left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) n \cdot \hat{k} ds$$

Agora sobre S, tem-se que,

$$P(x, y, z) = P\big(x, y, f(x, y)\big) = f(x, y)$$

Vê se que P é uma função composta, aplicando a regra da cadeia, tem-se que,

$$\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Então, se chega a,

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{P\hat{\imath}}) \cdot \boldsymbol{nds} = -\frac{\boldsymbol{\partial F}}{\boldsymbol{\partial y}}\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\hat{k}ds}$$

E como que $|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\hat{k}}|\boldsymbol{ds} = \boldsymbol{dxdy},$ e devido os vetores $\boldsymbol{n}$ **e** $\boldsymbol{\hat{k}}$ formarem um ângulo agudo, tem-se que $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\hat{k}} > \boldsymbol{0}$ e então resulta, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\hat{k}ds} = \boldsymbol{dxdy}.$

Então,

$$\iint_{\boldsymbol{S}} [\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{P\hat{\imath}})] \cdot \boldsymbol{nds} = \iint_{\boldsymbol{R}} \frac{\boldsymbol{\partial F}}{\boldsymbol{\partial y}} \boldsymbol{dxdy}.$$

Onde $\boldsymbol{R}$ é a projeção de $\boldsymbol{S}$ sobre o plano $\boldsymbol{xy}.$ Pelo Teorema de Green, resulta que,

$$\iint_{\boldsymbol{R}} -\frac{\boldsymbol{\partial F}}{\boldsymbol{\partial y}} \boldsymbol{dxdy} = \oint_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{Fdx}.$$

Onde $\boldsymbol{L}$ é a fronteira de $\boldsymbol{R}$.

Como para cada ponto $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de $\boldsymbol{L}$ o valor de $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ coicinde com o valor de $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ para cada ponto de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ de $\boldsymbol{C}$ e o $\boldsymbol{dx}$ é o mesmo, então,

$$\oint_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{Fdx} = \oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{Pdx}.$$

Logo:

$$\iint_{\boldsymbol{S}} [\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{P\hat{\imath}})] \cdot \boldsymbol{nds} = \oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{Pdx}.$$

Quando a superfície $\boldsymbol{S}$ é representada pela equação explícita $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, levando a cabo um processo semelhante conclui-se que,

$$\iint_{\boldsymbol{S}} [\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{Q\hat{\jmath}})] \cdot \boldsymbol{nds} = \oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{Qdy}.$$

Considerando que a superfície *S* pode ser representada mediante a equação $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, aplicando um procedimento análogo ao feito antes, e projetando $\boldsymbol{S}$ sobre o plano $\boldsymbol{yz}$, chega-se a:

$$\iint_{\boldsymbol{S}} [\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{R\hat{k}})] \cdot \boldsymbol{nds} = \oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{Rdz}.$$

Se admitirmos que *S* pode representar-se em qualquer das três formas $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ ou $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ e somando, membro a membro as expressões anteriores chega-se por fim ao resultado do teorema,

$$\iint_{\boldsymbol{S}} [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}] \cdot \boldsymbol{nds} = \oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{Pdx} + \boldsymbol{Qdy} + \boldsymbol{Rdz} = \oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \oint_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{Tds}.$$

Assim está demonstrado o Teorema de Stokes. Agora cabe fazer algumas aplicações deste teorema.

Observações: O teorema de Stokes afirma que se $\boldsymbol{F}$ é um campo de forças, então o trabalho realizado por $\boldsymbol{F}$ ao longo de $\boldsymbol{C}$ é igual ao fluxo de $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})$ sobre $\boldsymbol{S}$.

A expressão $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \boldsymbol{ds}$ indica que a integral é calculada sobre uma curva fechada.

Gostaria de apresentar uma extensão do mesmo, apenas para complementar o entendimento do Teorema de Stokes, sem demonstração.

Teorema 1. Seja $F(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{\imath} + Q(x, y, z)\hat{\jmath} + R(x, y, z)\hat{k}$ tal que P, Q, R tem derivadas parciais de segunda ordem continuas, se as superfícies S_1, S_2 tem uma curva de intercessão e nenhum outro ponto comum, então:

$$\iint_{\boldsymbol{S_1}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n_1} \boldsymbol{ds} = \iint_{\boldsymbol{S_2}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n_2} \boldsymbol{ds}.$$

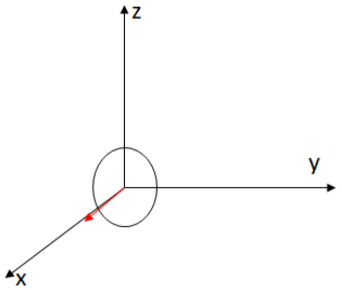
4.2 Aplicações do Teorema de Stokes na Matemática e Física

Agora iremos mostrar algumas aplicações do Teorema de Stokes na área da Física.

Aplicação 01 - O campo dado por $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{y}\hat{\boldsymbol{k}}$ representa um círculo centrado na origem sabendo que este círculo tem raio 2. Calcule o trabalho realizado por uma partícula que se move no sentido anti-horário deste determinado campo.

Solução: Para acharmos o trabalho realizado pela partícula devemos resolver a integral de linha $\oint_C \boldsymbol{zdx} + \boldsymbol{xdy} + \boldsymbol{ydz}$, para isso iremos utilizar o Teorema de Stokes. Como ilustrado na Figura 4, temos que o vetor normal é dado por $\hat{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$. Com isso precisamos calcular o rotacional.

Figura 4 - Partição da Curva C integral de linha.



Fonte: (JUNIOR, 2020)

Calculando o rotacional, temos

$$(\Delta \times \boldsymbol{F}) = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{z}}.$$

Como

$$\oint_{C} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \iint_{C} (\Delta \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{\hat{n} dS}$$

temos:

$$\boldsymbol{W} = \oint_{C} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \iint_{S} (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}) \cdot (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \boldsymbol{dS} = \iint_{S} \boldsymbol{dS}.$$

Com isso temos que o trabalho é a integral dupla da própria função, ou seja, o trabalho vai ser igual a integral da área do círculo. Como a área de um círculo é dada por:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r^2} \cdot \boldsymbol{\pi}.$$

Temos,

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{2^2} \cdot \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{4\pi J} *.$$

Aplicação 02 - (LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica**.pg. 1126.): Utilizando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial de forças dado por $\vec{F} = (z - y, -x - z, -x - y)$. Isto quando uma partícula se move sob influência desse campo ao longo da curva de intersecção de superfícies: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ tendo $z = y$, orientada no sentido positivo quando vista de cima.

Solução: Primeiro iremos calcular o rotacional do campo, com isso temos

$$(\Delta \times \boldsymbol{F}) = \left[\frac{\boldsymbol{\partial F_3}}{\boldsymbol{\partial y}} - \frac{\boldsymbol{\partial F_2}}{\boldsymbol{\partial z}}, \frac{\boldsymbol{\partial F_1}}{\boldsymbol{\partial z}} - \frac{\boldsymbol{\partial F_3}}{\boldsymbol{\partial x}}, \frac{\boldsymbol{\partial F_2}}{\boldsymbol{\partial x}} - \frac{\boldsymbol{\partial F_1}}{\boldsymbol{\partial y}} \right].$$

Fazendo cada derivada parcial acima, obtemos os seguintes valores,

$$\frac{\boldsymbol{\partial F_3}}{\boldsymbol{\partial y}} = \boldsymbol{-1}, \frac{\boldsymbol{\partial F_2}}{\boldsymbol{\partial z}} = \boldsymbol{-1}, \frac{\boldsymbol{\partial F_1}}{\boldsymbol{\partial z}} = \boldsymbol{1}, \frac{\boldsymbol{\partial F_3}}{\boldsymbol{\partial x}} = \boldsymbol{-1}, \frac{\boldsymbol{\partial F_2}}{\boldsymbol{\partial x}} = \boldsymbol{-1}, \frac{\boldsymbol{\partial F_1}}{\boldsymbol{\partial y}} = \boldsymbol{-1}.$$

Agora, substituindo estes valores na expressão acima, temos,

$$(\Delta \times \boldsymbol{F}) = [\boldsymbol{-1} - (\boldsymbol{-1}), \boldsymbol{1} - (\boldsymbol{-1}), (\boldsymbol{-1}) - (\boldsymbol{-1})] = [\boldsymbol{-1} + \boldsymbol{1}, \boldsymbol{1} + \boldsymbol{1}, \boldsymbol{-1} + \boldsymbol{1}] = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{0}].$$

Por conseguinte, iremos interpretar a curva C e encontramos o vetor normal, que é dada por

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2} + \boldsymbol{z^2} = \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} \end{cases}$$

$$\vec{\boldsymbol{N}} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{-1}, \boldsymbol{1}).$$

---

* A unidade no Sistema Internacional de Unidades (SI) de trabalho é o **joule** (abreviada pela letra ***J*** e pronunciada como ‘jaule’, nome dado em homenagem ao físico inglês do século XIX James Prescott Joule). A unidade de trabalho joule é equivalente a um $newton \cdot metro$ $(N \cdot m)$: $1\, joule = (1\, newton)(1 metro)\ ou\ 1\, J = 1\, N \cdot m$.

Agora colocamos todos os valores que encontramos na fórmula do Teorema de Stokes.

$$\iint_S (\Delta \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N}\boldsymbol{ds} = \iint_S (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{0}) \cdot (\boldsymbol{0}, -\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0})\boldsymbol{dxdy} = \iint_S -\boldsymbol{2dxdy}.$$

Note que como temos uma constante dentro da integral de superfície, podemos colocar essa constante para fora da integral, com isso temos:

$$\iint_S -\boldsymbol{2dxdy} = -\boldsymbol{2} \cdot (\text{Á}\boldsymbol{rea})$$

Agora iremos encontrar a área, fazendo

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 4 \; como \; z = y}$$

$$\boldsymbol{x^2 + 2y^2 = 4.}$$

Como se pode perceber, temos a equação da elipse, e com isso podemos encontrar a área fazendo:

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{4}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{1}.$$

Com isso temos que os valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ da elipse, são respectivamente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = 2} \\ \boldsymbol{b = \sqrt{2}.} \end{cases}$$

Como a área de uma elipse e dada pela fórmula:

$$\text{Á}\boldsymbol{rea = \pi \cdot a \cdot b}.$$

Temos que a área é,

$$\boldsymbol{A = 2\pi\sqrt{2}.}$$

Pela equação

$$\boldsymbol{W} = \int_C \boldsymbol{F \cdot ds},$$

o trabalho é:

$$\boldsymbol{W = -4\pi\sqrt{2}\, J.}$$

5 CONCLUSÃO

O Teorema de Stokes é de fundamental importância na matemática, como dito anteriormente, esse teorema possibilita encontrar resultados significativos e de grande aplicabilidade na Física, Engenharia, Mecânica e em outras áreas que envolvam o cálculo de fluídos. O presente estudo possibilitou uma ampliação e extensão dos estudos acerca de campos vetoriais, integrais de linha (curvilíneas), integrais de superfícies, o trabalho realizado, conceitos que são muito importantes para se chegar na demonstração do Teorema de Stokes. Acredito que a revisão bibliográfica apresentada neste trabalho, serve de ferramenta para melhor entendimento, e para a construção do conhecimento científico, assim como despertar curiosidades outrora não visto em uma sala de aula. Abrindo um leque para novas pesquisas com este mesmo tema sob uma perspectiva diferenciada.

REFERÊNCIAS

CHAVECO, Antonio Iván Ruiz. **Cálculo com fatos históricos**: funções de várias variáveis. Curitiba, PR: CRV,2015.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. V.3

JÚNIOR, Gustavo Alexandre de Araújo Silva. **Teoremas de Green, Gauss e Stokes e algumas aplicações**, 2020. Monografia (graduação) - Universidade Federal Rural do Semiárido, Curso de Ciência e Tecnologia, 2020.

RIBEIRO, Daniel. George Gabriel Stokes. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). **Rev. Ciência Elem**., v.2, n.4:307. (2014). Disponível em: <http://doi.org/10.24927/rce2014.307>. Acesso em 27 de fevereiro de 2023.

STWART, James. **Cálculo.** tradução EZ2 Transplante. São Paulo: Cengage Learning, 2013.V.2.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. 1. ed. [S.l.]: São Paulo: Adilson Wesley, 2009. v. 2.

YOUNG, Hugh D. **Física I**/Yong e Freedman. 12. ed. São Paulo: Adilson Wesley, 2008.