UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TABATINGA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

THALISON LOPES NOGUEIRA

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: UM GRANDE DESENVOLVIMENTO PARA O CÁLCULO INTEGRAL

Tabatinga – AM
2021

THALISON LOPES NOGUEIRA

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: UM GRANDE DESENVOLVIMENTO PARA O CÁLCULO INTEGRAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado para obtenção de nota parcial na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, ministrada pela Prof.ª Ma. Karem Keyth de Oliveira Marinho, do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga da Universidade do Estado do Amazonas.

Orientador: Prof. Me. Edfram Rodrigues Pereira

Tabatinga – AM
2021

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

L864t Lopes Nogueira, Thalison Lopes Nogueira
Teorema Fundamental do Cálculo: Um grande desenvolvimento para o Cálculo Integral / Thalison Lopes Nogueira Lopes Nogueira. Manaus : [s.n], 2021.
30 f.: color.; 30 cm.

TCC - Graduação em Matemática - Licenciatura - Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2021.
Inclui bibliografia
Orientador: Pereira, Edfram Rodrigues

1. Cálculo Integral. 2. Descoberta. 3. Área. I. Pereira, Edfram Rodrigues (Orient.). II. Universidade do Estado do Amazonas. III. Teorema Fundamental do Cálculo: Um grande desenvolvimento para o Cálculo Integral

Elaborado por Jeane Macelino Galves - CRB-11/463

THALISON LOPES NOGUEIRA

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: UM GRANDE DESENVOLVIMENTO PARA O CÁLCULO INTEGRAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado para obtenção de nota parcial na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, ministrada pela Prof.ª Ma. Karem Keyth de Oliveira Marinho, do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga da Universidade do Estado do Amazonas.

Data da aprovação: 11 de agosto de 2021.

Prof. Me. Edfram Rodrigues Pereira - Orientador(CSTB/UEA)

Prof. Esp. Zequias Ribeiro Montalvam Filho–Membro interno (CSTB/UEA)

Prof. Dr. Edilson de Carvalho Filho-Membro interno (CSTB/UEA)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação a respeito de uma das principais descobertas da história da matemática- O Teorema Fundamental do cálculo (TFC). Realizada e publicada no século XVII, ela possibilitou expressivo avanço na matemática e, consequentemente, em outras áreas das ciências exatas, visto que a sua principal característica é conectar o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Contemplando de forma clara, objetiva e fidedigna os principais fatores acerca do desenvolvimento desse teorema se pode compreendê-lo de maneira integra, assim como outras ferramentas matemáticas. Com o objetivo de justificar a sua importância para a matemática, especialmente, para o Cálculo Integral é indispensável o conhecimento de fatos históricos relevantes como a criação dos simbolismos matemáticos, o surgimento dos números infinitesimais, assim como o desenvolvimento da Geometria Analítica, por exemplo. Aliado a isso, baseado em obras de prestígios dentro da comunidade acadêmica, explaná-lo de forma explicita, aplicá-lo em situações problemas que envolvam integrais e derivadas e, em seguida, comparar esses procedimentos, bem como os resultados obtidos nele com determinados método tradicionais utilizados antes dessa descoberta nos ajudam a compreender o motivo de destaque do Teorema Fundamental do Cálculo dentro do Cálculo Integral.

Palavras-Chave: Cálculo Integral; Descoberta; Área.

ABSTRACT

This work presents an investigation about one of the main discoveries in the history of mathematics - The Fundamental Theorem of Calculus (TFC). Carried out and published in the 17th century, it enabled an expressive advance in mathematics and, consequently, in other areas of the exact sciences, since its main characteristic is to connect Differential Calculus and Integral Calculus. Contemplating in a clear, objective and trustworthy way the main factors concerning the development of this theorem, it can be understood in an integrated way, as well as other mathematical tools. In order to justify its importance for mathematics, especially for Integral Calculus, it is essential to know relevant historical facts such as the creation of mathematical symbolism, the emergence of infinitesimal numbers, as well as the development of Analytical Geometry, for example. Allied to this, based on prestigious works within the academic community, explain it explicitly, apply it in situations problems involving integrals and derivatives and then compare these procedures, as well as the results obtained in it with certain methods traditions used before this discovery help us to understand why the Fundamental Theorem of Calculus stood out within the Integral Calculus.

Keywords: Integral Calculus; Discovery; Area

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde o início da civilização há a necessidade de descobrir técnicas, desenvolver métodos, ferramentas que auxiliem na compreensão de fenômenos naturais, situações cotidianas e que facilitem processos aproveitando melhor o tempo. Métodos matemáticos sistemáticos e práticos surgiram no decorrer da história e foram desenvolvidos por matemáticos de diferentes épocas, matemáticos que diferiam também, em diversas vezes, na maneira como abordavam os conceitos relacionados a esses métodos.

No decorrer da história da matemática são notáveis que os séculos XVI e XVII foram extremamente proveitosos para os matemáticos da época, métodos sistemáticos e práticos foram desenvolvidos nesse período. Dentre as mais importantes descobertas da matemática está o desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) publicado no século XVII e considerado por muitos historiadores o maior feito do século. Principalmente para o Cálculo Integral.

Assim sendo, é possível que o seguinte questionamento surja: Por qual motivo o Teorema Fundamental do Cálculo se destaca na matemática, especialmente, no campo da integração?

Sua importância para o cálculo Integral pode ser compreendida a partir da comparação dos procedimentos e resultados entre os antigos métodos matemáticos e o TFC, ou seja, observando como eram feitos antes da descoberta do TFC os cálculos que atualmente podem ser resolvidos utilizando a relação entre integrais e derivadas, já que esse teorema evidencia essa relação. Por exemplo, antes do desenvolvimento do TFC um dos métodos utilizados para estimar áreas de regiões com lados curvos era calcular o limite de séries numéricas, porém esse método pode ser rigoroso em diversos casos, podendo falhar em outros.

Por isso, faz-se necessário justificar a importância do desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo TFC para o cálculo integral, baseando-se em fatos históricos da matemática e nas aplicações dessa ferramenta matemática em problemas como, por exemplo: determinar a área de uma região definida sob uma curva e num dado intervalo.

Para compreender o desenvolvimento do TFC é fundamental conhecer o contexto das transformações da matemática nos séculos XVI e XVII. Por isso, na primeira secção deste trabalho, são apresentados fatos históricos importantes acerca dos matemáticos da época e de suas descobertas que posteriormente serviram de base para o desenvolvimento desse teorema.

Logo em seguida, na segunda seção, é apresentado o conceito da Integral de Riemann, método pelo qual é possível estimar a área de uma região com lados curvilíneos definida num dado intervalo fechado.

Na terceira seção, o Teorema Fundamental do Cálculo é enunciado de maneira objetiva e simples para facilitar a compreensão da relação entre a derivada e a integral, já que é esse teorema a principal ferramenta matemática a exprimi-la.

Os problemas matemáticos apresentados e resolvidos por meio das somas de Riemann na segunda seção foram expostos novamente na terceira com a finalidade de que neles seja aplicado o TFC e os correspondentes resultados sejam comparados entre si.

E, por fim, este trabalho é concluído com as observações sobre os dados obtidos nas seções anteriores que deverão justificar ou não a importância do Teorema Fundamental do Cálculo para o cálculo integral.

O Teorema Fundamental do Cálculo apresenta-se como uma ferramenta matemática funcional, visto que suas contribuições para as ciências exatas são numerosas. Em particular, a facilidade e praticidade de sua aplicação aos cálculos de Integrais realça o seu valor para diversas áreas como matemática, química, física, engenharia, entre outras.

Esta investigação sobre o Teorema Fundamental do Cálculo tem como motivação o fato de os diversos cursos de cálculo ministrados nas universidades, bem como nos livros de cálculo, o apresentarem de maneira ligeira e superficial possibilitando que características importantes dessa ferramenta passem despercebidas. Por esse motivo há a necessidade em identificá-las, observá-las e explicá-las a fim de tornar o estudo acerca dessa ferramenta matemática o mais completo possível.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho apresenta-se com uma abordagem qualitativa, tendo sua natureza uma pesquisa aplicada e com caráter explicativo objetiva justificar a importância do TFC para o cálculo integral a partir da compreensão de fatos matemáticos históricos que articulados proporcionaram o desenvolvimentos dessa ferramenta matemática; junto a essa compreensão a sua comparação com métodos tradicionais mais rigorosos como o limite de somas numéricas, por exemplo.

Para o desenvolvimento desse trabalho foi realizado uma pesquisa bibliográfica, ou seja, um levantamento de referências teóricas, obras que tratam com seriedade, clareza e objetividade esse assunto. As obras selecionadas são de autores renomados e de expressivo destaque no meio da comunidade acadêmica. Para embasamento histórico da pesquisa a principal obra é Eves (2011) "Introdução à História da Matemática"; para as definições, demonstrações e exemplificações foram utilizadas Stewart (2010) "Cálculo Vol. 1", Análise de Elon Lages (2006) "Análise Real Vol. 1", análise de Elon Lages (2019) "Curso de Análise" e Anton (2011) "Cálculo". Além dessas obras, também foram selecionados e estudados artigos científicos que contribuem para a fundamentação da pesquisa.

Os dados da pesquisa estão apresentados de maneira discursiva, coesa e coerente no decorrer do trabalho, e sua análise feita a partir da interpretação desse discurso tendo seus resultados expostos de forma discursiva no fim do trabalho.

3 REFERENCIAL TEORICO

3.1 A ORIGEM DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

A descoberta do Teorema Fundamental do Cálculo é uma realização do final século XVII feita pelo inglês Isaac Newton e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, de modo que as colaborações para a descoberta feitas pelo matemático inglês independem das do alemão. Eves (2011, p. 340) afirma que “[...] na esteira preparada por vários matemáticos do próprio século, Newton e Leibniz contribuíram memoravelmente com a criação do cálculo”. É importante saber que antes dessa descoberta, outros métodos matemáticos mais antigos, métodos que foram fundamentais para a descoberta do TFC, eram utilizados para obter resultados iguais ou aproximados daqueles obtidos por este teorema. Entre esses métodos encontra-se o método da *exaustão*.

O método da Exaustão comumente é creditado a Eudoxo (370 a.C.). Esse método é um dos primeiros a exprimir aproximações na obtenção de áreas e volumes afirmando que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente. Baseada na proposição:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegara por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2011, p. 419).

O cálculo de área de um círculo utilizando o *método da Exaustão* de Eudoxo consiste em inscrever no círculo um polígono regular e dobrar o número de lados desse polígono quantas vezes forem necessárias até que a diferença entre a área do polígono e do círculo se torne menor do que qualquer área fixada, por menor que seja.

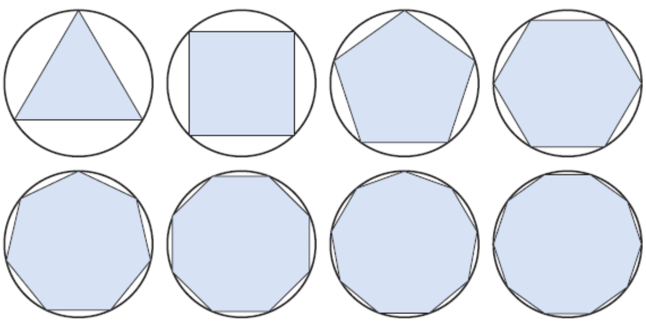

Figura 1. Método da Exaustão
Fonte: Howard (2014, p. 317)

O método de Exaustão em associação a outros métodos mais modernos foram responsáveis pelo surgimento das ideias sobre os infinitésimos que, de início, propulsionadas na matemática pelo matemático Italiano Bonaventura Cavaliere, quando ao publicar sua principal obra matemática *Geometria indivisibilibus Continuorum,* em sua versão inicial no ano de 1635, apresentou o *método dos indivisíveis*.

A consideração sobre uma grandeza ser formada por uma infinidade de porções atômicas, fato já sugerido por outros matemáticos, estava cada vez mais presente na matemática. O método dos indivisíveis de Cavalieri pregava que, considerando-se uma corda de uma porção plana dada então essa será um indivisível dessa porção, de modo semelhante, considerando-se uma secção de um sólido dado então essa será um indivisível desse sólido. O método dos invisíveis considera que uma porção plana é formada por uma infinidade de cordas paralelas e um sólido por uma infinidade de secções paralelas.

> Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual a da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Eves (2011, p. 425)

O surgimento de ferramentas matemáticas como o método dos indivisíveis de Cavalieri proporcionou ao Cálculo Integral grande avanço das técnicas de integração. Importantes matemáticos, tempos depois, usaram o Método dos Indivisíveis e, outros equivalentes a ele, em seus trabalhos. Segundo Eves (2011, p. 428) “[...] No curso de seu trabalho esses matemáticos chegaram a resultados equivalentes à integração de expressões como $x^n \cdot$, $sen\,\theta$, $sen 2\theta$ e $\theta\, sen\,\theta$”.

As bases do Cálculo integral já estavam estabelecidas entre os matemáticos europeus em meados do século XVII e eram efetivamente aplicadas em questões envolvendo áreas e volumes.

Naquele mesmo período, uma importante área da matemática estava em intenso processo de desenvolvimento, a Geometria Analítica, sendo ela fundamental para o desenvolvimento e aprimoramento de descobertas significativas à matemática. A geometria analítica junto ao Cálculo infinitesimal foi decisiva na descoberta do Teorema Fundamental do Cálculo auxiliando Newton e Leibniz.

O cálculo diferencial surgiu, essencialmente, dos traçados de tangentes a pontos quaisquer de curvas dadas e da determinação de máximos e mínimos de curvas. Dentre os mais importantes matemáticos que ajudaram a desenvolver as bases do cálculo diferencial estão os matemático franceses René Descarte e Pierre Fermat que, Segundo Eves (2011, p. 431) em sua obra afirma que "À sua maneira, Fermat determinou tangentes as seguintes curvas: elipse, cicloide, cissoide, conchoide, quadratriz e folium de Descartes".

Apesar de ter desenvolvido seus trabalhos de forma independente e paralela, René Descarte contribuiu para o desenvolvimento do cálculo de forma semelhante à Fermat.

Os predecessores imediatos de Isaac Newton na Inglaterra foram os matemáticos ingleses John Wallis e Isaac Barrow, considerados os mais influentes predecessores ingleses de Newton. As principais contribuições de Wallis situam-se na teoria da integração, devida a sua adequação a geometria analítica e a análise infinitesimal, Wallis obteve sucesso ao sistematizar e estender métodos de Descarte e Cavalieri que produziram resultados notáveis para o cálculo. Além disso, John Wallis ao fazer o uso sistemático de séries em análise contribuiu muito nesse campo abrindo caminho para seu contemporâneo Isaac Newton.

Ao contrário das contribuições de Wallis às de Barrow situam-se mais na teoria da diferenciação. Em uma de suas obras Barrow apresenta uma abordagem muito próxima dos processos modernos de diferenciação. Há afirmações de que Barrow teria percebido a relação inversa entre as operações de diferenciação e integração antes de qualquer outro. Segundo Eves (2011, p. 435):

> Apesar de indícios tênues que apontam noutra direção, em geral considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa importante descoberta é conhecida como *teorema fundamental do calculo* e aparece enunciada e provada nas *Lectiones* de Barrow.

Naquela altura do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral já se tinham feitos muitas integrações, muitos processos de diferenciação já tinham sido desenvolvidos, a ideia de limite já concebida, métodos para traçar tangentes a diferentes tipos de curvas já eram conhecidos e até o Teorema Fundamental do Cálculo reconhecido.

Assim, o inglês Isaac Newton e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, independentemente, criaram um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais, ou seja, um *cálculo* manipulável e prático. E em bases aceitáveis aos rigores matemático da época desenvolveram os conceitos fundamentais do cálculo. Por isso a criação do Cálculo é atribuída a Newton e Leibniz, embora tenham tido muitos predecessores.

3.2 INTEGRAL DE RIEMANN

A integral de Riemann, nome em homenagem ao matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann que tornou claro o conceito de integrabilidade, é um dos principais artifícios matemáticos usados para estimar a área de uma região bem definida.

Considere uma região S definida sob a curva $y = f(x)$ não negativa em um intervalo [a, b], ilustrada na figura 02.

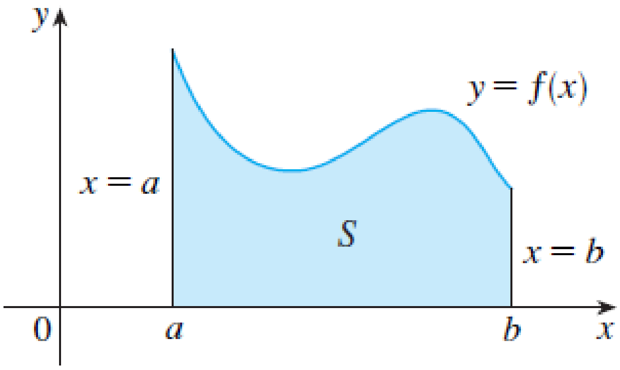

Figura 02 – Região S
Fonte: STEWART (2013, p. 326)

A tentativa de estimar a área de uma região do tipo $S = \{(x, y);\ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ torna-se difícil utilizando apenas os recursos cedidos pela geometria Euclidiana, umas vez que , a região S possui um lado curvo. No entanto, utilizando a integral de Riemann é possível obter um resultado próximo ao valor numérico correspondente a área dessa região.

Para que se possa compreender a chamada integral de Riemann é fundamental estabelecer uma base de conhecimentos auxiliares, alguns conceitos preliminares como, por exemplo, a noção de uma função limitada.

Definição 1. Uma função f com domínio D diz-se limitada quando é limitada à esquerda e à direita ao mesmo tempo, isso equivale a dizer que existe um número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in D$. GERALDO ÁVILA (1999, p 79)

Outros conceitos indispensáveis são as noções de ínfimo e supremo de conjuntos limitados. Segundo ELON LAGES (2019, p 53):

Definição 2. Para que $b \in \mathbb{R}$ seja supremo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$.

S2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

De maneira análoga, define-se cota inferior de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente.

Considerando uma função $f: [(a, b)] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, serão empregadas as seguintes notações para ínfimo e supremo, respectivamente:

$$m = \inf \{ f(x);\ x \in [a, b] \} \text{ e } M = \sup \{ f(x);\ x \in [a, b] \}$$

Além dos conceitos de ínfimo e supremo de um conjunto, convém ter noção a respeito de uma partição de um subconjunto fechado.

Na obra matemática ELON LAGES (2006, p 116), tem-se a seguinte definição:

Definição 3. Uma partição do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que $a \in P$ e $b \in P$. De modo que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. O intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de *comprimento* $x_i - x_{i-1}$, será chamado de *i-ésimo* intervalo de P. Evidentemente $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$.

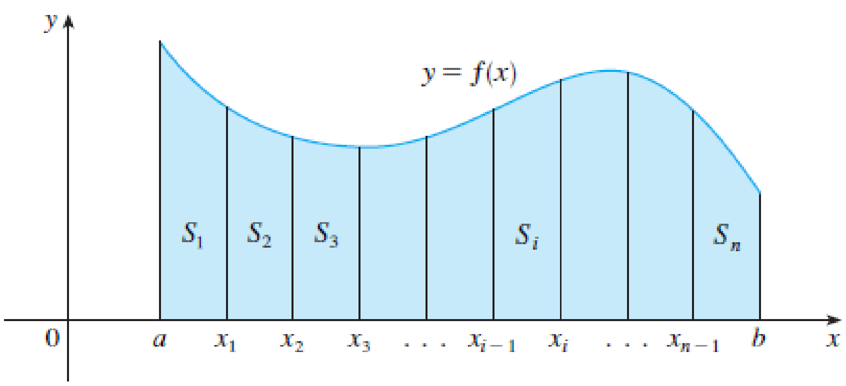

Figura 03 – Região S subdividida em n faixa.
Fonte: STEWART (2013, p. 329)

Pela existência do ínfimo e supremo de $f(X)$, conjunto imagem da f, tem-se que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

Em particular, definem-se as seguintes notações para ínfimo e supremo de $[x_{i-1}, x_i]$ da função f no intervalo$[a, b]$, respectivamente:

$$m_i = \inf \{ f(x) ;\ x_{i-1} \leq x \leq x_i \} \text{ e } M_i = sup\{ f(x) ;\ x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$$

A partir disso podem ser definidas a soma inferior e a soma superior de f relativa à partição P.

- A soma inferior de f relativa à partição P é o número $s\ (f;P)$ tal que:

$$s\ (f;P) = \ m_1.(x_1 - x_0)\ + \cdots + m_n.(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i.(x_i - x_{i-1}).$$

Onde $\sum_{i=1}^{n} m_i.(x_i - x_{i-1})$ é a soma das áreas dos n retângulos formados a partir da partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ no intervalo $[a,b]$ tendo a função avaliada em x_i tal que $f(x_i) = m_i$, ínfimo de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de modo que o comprimento $(x_i - x_{i-1})$ é a base do retângulo e o valor da função m_i é a altura do retângulo.

- A soma superior de f relativa à partição P é o numero $S\ (f;P)$ tal que:

$$S\ (f;P) = \ M_1.(x_1 - x_0)\ + \cdots + M_n.(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i.(x_i - x_{i-1}).$$

Onde $\sum_{i=1}^{n} M_i.(x_i - x_{i-1})$, é a soma das áreas dos n retângulos formados a partir da partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ no intervalo $[a,b]$ tendo a função avaliada em x_i tal que $f(x_i) = M_i$, supremo de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de modo que o comprimento $(x_i - x_{i-1})$ é a base do retângulo e o valor da função M_i é a altura do retângulo. Como ilustrado na figura 04.

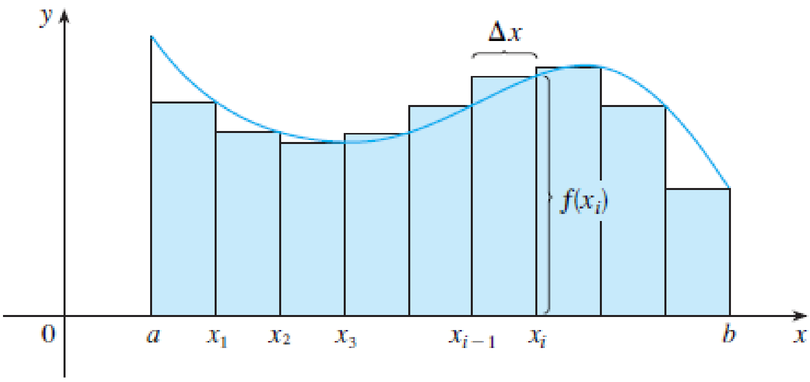

Figura 04 – f avaliada nos supremos $M_i$dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$.
Fonte: STEWART (2013, p. 330)

Para ELON LAGES (2006, p 117), independentemente de qual seja a partição P tomada é válida a relação:

$$m.(b-a) \leq \ s\ (f;P) \leq \ S\ (f;P) \leq M.(b-a)$$

e são definidas Integral inferior e Integral superior, respectivamente, por:

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx \;=\; sup\;_{P}s(f;P) = \lim_{n\to\infty} s(f;P)$$

$$\int_{a}^{-b} f(x)dx \;=\; inf\;_{P}S(f;P) = \lim_{n\to\infty} S(f;P)$$

Definição 4. Uma função limitada $f\colon[(a,b)] \to \mathbb{R}$ diz-se integrável quando sua integral inferior e sua integral superior são iguais. Esse valor comum chama-se a Integral de Riemann de f e é indicado por $\int_a^b f(x)dx.$ Portanto:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \text{ existe se, e somente se, } \int_{-a}^{b} f(x)dx \;\; e \;\; \int_{a}^{-b} f(x)dx \quad \text{existem e são iguais}$$

O valor desse limite é a Integral de Riemann e, por definição, a área da região S.

Exemplo 1. Considere a região S limitada sob o gráfico da parábola $y = x^2$ no intervalo $[0,1]$ e utilizando as somas de Riemann determine a sua área.

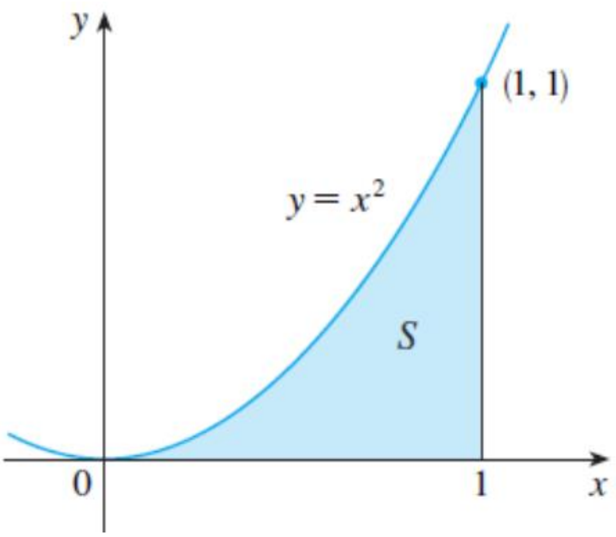

Figura 05 - Região S
Fonte: STEWART (2013, p. 326)

Fazendo a partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que $P \subset [0,1]$ e os n subintervalos regulares com largura $\triangle_x = \frac{b-a}{n}$; $n \in \mathbb{N}$. Assim S fica dividida em n faixas retangulares e avaliando a função pela direita, tem-se:

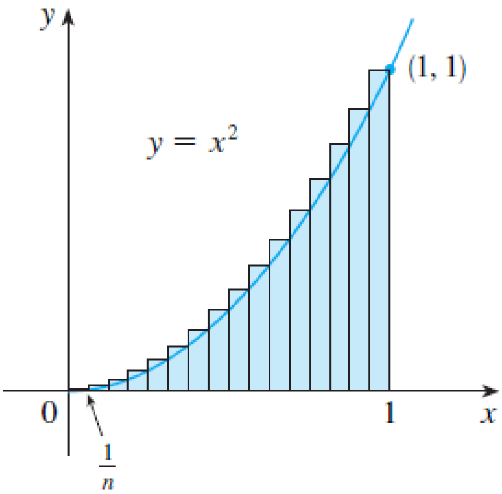

Figura 06 - n subdivisões de S
Fonte: STEWART (2013, p. 328)

O comprimento de cada subintervalo é dado por $\triangle_x = \frac{b-a}{n}$:

$$\triangle_x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

Os extremos direitos dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i] \subset [0,1]$ se organizam da seguinte maneira:

$$x_1 = x_0 + 1.\triangle_x = 0 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_2 = x_0 + 2.\triangle_x = 0 + 2.\frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_3 = x_0 + 3.\triangle_x = 0 + 3.\frac{1}{n} = \frac{3}{n}$$

$\vdots$

$$x_n = x_0 + n.\triangle_x = 0 + n.\frac{1}{n} = 1\text{ , onde } n \in \mathbb{N}$$

Assim os subintervalos $[x_{i-1}, x_i] \subset [0,1]$ de comprimentos $\triangle_x = \frac{1}{\mathrm{n}}$ são as bases dos retângulos, a altura é dada pelo valor da função f nos pontos $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}$.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, f\left(\frac{3}{n}\right) = \left(\frac{3}{n}\right)^2, \dots, f\left(\frac{n}{n}\right) = \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

Desse modo podemos calcular o limite de sua soma superior.

$$S(f;P) = f\left(\frac{1}{n}\right).\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right).\frac{1}{n} + f\left(\frac{3}{n}\right).\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right).\frac{1}{n}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 . \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 . \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 . \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 . \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} . \frac{1}{n^2} . (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{1}{n^3} . (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \qquad (I)$$

Usando a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{n . (n+1).(2n+1)}{6} \qquad (II)$$

Substituindo (II) em (I), tem-se:

$$= \frac{1}{n^3} . \frac{n . (n+1).(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1).(2n+1)}{6.n^2}$$

Sendo assim, obtemos o seguinte limite:

$$\lim_{n \to \propto} S(f;P) = \frac{1}{6} . \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1).(2n+1)}{n^2}$$

$$= \frac{1}{6} . \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)}{n} . \frac{(2n+1)}{n}$$

$$= \frac{1}{6} . \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) . \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Utilizando as propriedades de limites, sabe-se que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, logo:

$$\frac{1}{6} . \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) . \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} . (1+0).(2+0) = \frac{1}{3}\ u.a$$

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} S(f;P) = \frac{1}{3} = A$$

Ao calcular o limite das somas superiores da função limitada sob o gráfico da parábola $y = x^2$ no intervalo $[0,1]$, obteve-se a aproximação por excesso da área de S.

Obtém-se a aproximação por falta da área da região S avaliando a função pela esquerda, ou seja, nos extremos esquerdos dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, veja:
O comprimento de cada subintervalo não é alterado, ou seja,

$$\triangle_x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

Os extremos esquerdos dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i] \subset [0,1]$ se organizam da seguinte maneira:

$$x_0 = x_0 + 0.\triangle_x = 0 + 0.\frac{1}{n} = 0 = a$$

$$x_1 = x_0 + 1.\triangle_x = 0 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_2 = x_0 + 2.\triangle_x = 0 + 2.\frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_3 = x_0 + 3.\triangle_x = 0 + 3.\frac{1}{n} = \frac{3}{n}$$

$\vdots$

$$x_{n-1} = x_0 + (n-1).\triangle_x = 0 + (n-1).\frac{1}{n} = (n-1).\frac{1}{n} \text{ , onde } n \in \mathbb{N}$$

Os subintervalos $[x_{i-1}, x_i] \subset [0,1]$ de comprimentos $\triangle_x = \frac{1}{n}$ continuam sendo as bases dos retângulos, a altura é dada pelo valor da função f nos pontos $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{(n-1)}{n}$.

$$f(0) = 0, f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, f\left(\frac{3}{n}\right) = \left(\frac{3}{n}\right)^2, \dots, f\left(\frac{(n-1)}{n}\right) = \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2$$

Desse modo podemos calcular o limite de sua soma inferior.

$$\begin{aligned} s\,(f;P) &= f(0).\frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right).\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right).\frac{1}{n} + f\left(\frac{3}{n}\right).\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right).\frac{1}{n} \\ &= 0.\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2.\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2.\frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2.\frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}.\frac{1}{n^2}.(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2) \\ &= \frac{1}{n^3}.(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2) \qquad (III) \end{aligned}$$

A soma dos $(n-1)$ quadrados apresenta-se como consequência direta da soma dos n quadrados, basta realizar a substituição de n por $(n-1)$, desse modo tem-se:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2) = \frac{n.(n-1).(2n-1)}{6} \qquad (IV)$$

Substituindo (IV) em (III):

$$= \frac{1}{n^3}.\frac{n.(n-1).(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{(n-1).(2n-1)}{6.n^2}$$

Desse modo, calculando o limite de $s\,(f;P)$

$$\lim_{n\to\infty} s\,(f;P) = \frac{1}{6}.\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1).(2n-1)}{n^2}$$
$$= \frac{1}{6}.\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)}{n}.\frac{(2n-1)}{n}$$
$$= \frac{1}{6}.\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

Utilizando as propriedades de limites, sabe-se que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, logo:

$$\frac{1}{6}.\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}.(1-0).(2-0) = \frac{1}{3}\,u.a$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} s\,(f;P) = \frac{1}{3} = A$$

Note que o valor do limite das somas superiores e o limite das somas inferiores são iguais, sendo assim, por definição, esse resultado em comum é o valor da Integral de Riemann que corresponde à área da região S.

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = \frac{1}{3} \qquad e \qquad \int_{a}^{-b} f(x)dx = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{1}{3}$$

Exemplo 2. Considerando a região $S = \{(x,y);\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le f(x) = x^2 - x + 1\}$ estime a sua área utilizando as somas de Riemann.

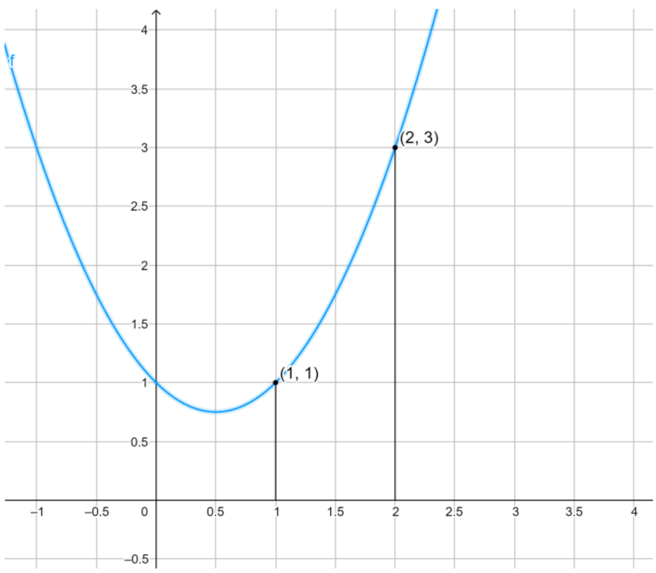

Figura 07: Região S
Fonte: GeoGebra Classic

Inicialmente, faz-se a partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ no intervalo fechado $[1,2]$ para obter os n subintervalos regulares de largura $\triangle_x = \frac{b-a}{n}$; $n \in \mathbb{N}$. Assim S fica dividida em n faixas retangulares e avaliando a função pela direita, tem-se:

O comprimento de cada subintervalo é dado por $\triangle_x = \frac{b-a}{n}$:

$$\triangle_x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

Os extremos direitos dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i] \subset [1,2]$ se organizam da seguinte maneira:

$$x_1 = x_0 + 1.\triangle_x = 1 + \frac{1}{n}$$

$$x_2 = x_0 + 2.\triangle_x = 1 + 2.\frac{1}{n} = 1 + \frac{2}{n}$$

$$x_3 = x_0 + 3.\triangle_x = 1 + 3.\frac{1}{n} = 1 + \frac{3}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_0 + n.\triangle_x = 1 + n.\frac{1}{n} = 2 \text{, onde } n \in \mathbb{N}$$

Os subintervalos $[x_{i-1}, x_i] \subset [1,2]$ de comprimentos $\triangle_x = \frac{1}{\mathrm{n}}$ são as bases dos retângulos, a altura é dada pelo valor da função f nos pontos $1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}, 1 + \frac{3}{n}, \dots, 1 + \frac{n}{n}$.

$$f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} + 1$$

$$f\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} + 1$$

$$f\left(1 + \frac{3}{n}\right) = \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \frac{3}{n} + 1$$

$$\vdots$$

$$f\left(1 + \frac{n}{n}\right) = \left(\frac{n}{n}\right)^2 + \frac{n}{n} + 1$$

Desse modo, tem-se:

$$S(f;P) = f\left(1 + \frac{1}{n}\right).\frac{1}{n} + f\left(1 + \frac{2}{n}\right).\frac{1}{n} + f\left(1 + \frac{3}{n}\right).\frac{1}{n} + \cdots + f\left(1 + \frac{n}{n}\right).\frac{1}{n}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} + 1\right].\frac{1}{n} + \left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} + 1\right].\frac{1}{n}\left[\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \frac{3}{n} + 1\right].\frac{1}{n} + \cdots + \left[\left(\frac{n}{n}\right)^2 + \frac{n}{n} + 1\right].\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} + 1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} + 1 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \frac{3}{n} + 1 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 + \frac{n}{n} + 1\right] \qquad (V)$$

Perceba que a expressão acima é constituída por duas somas, (VI) e (VII), respectivamente:

$$\frac{1}{n}.\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + 1 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 + 1\right] \qquad (VI)$$

$$\frac{1}{n}.\left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\right] \qquad (VII)$$

Adaptando o resultado encontrado em STEWART (2013, p. 584) temos que (VI) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + 1 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 + 1\right] = \frac{1}{6}.\left(1 + \frac{1}{n}\right).\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 1$$

E para (VII) aplica-se o resultado encontrado em STEWART (2013, p. 583):

$$\frac{1}{n}.\left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}.n.\frac{(n+1)}{2}$$

Assim, a expressão (V) pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\frac{1}{6}.\left(1 + \frac{1}{n}\right).\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 1 + \frac{1}{n^2}.n.\frac{(n+1)}{2}$$

Calculando o limite quando n tende para o infinito, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S\,(f;P) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{6}.\left(1 + \frac{1}{n}\right).\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 1\right] + \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}.n.\frac{(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right).\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] + \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2}.\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right).\left(\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\right] + \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2}.\left(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$$

Utilizando as propriedades de limites, sabe-se que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, logo:

$$= \frac{1}{6}\left[\left(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\propto}\frac{1}{n}\right).\left(\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\right] + \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2}.\left(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6}[(1+0).(2+0)] + 1 + \frac{1}{2}.(1+0)$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{11}{6}\ u.a$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\propto} S\,(f;P) = \frac{11}{6} = A$$

O procedimento para encontrar o resultado das somas inferiores é análogo ao realizado para o cálculo do limite das somas superiores.

3.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO.

Como o nome sugere, o Teorema Fundamental do Cálculo é um dos principais teoremas do cálculo diferencial e integral. Para compreender essa ferramenta matemática, primeiro será necessário ter conhecimento de alguns conceitos importantes do cálculo, como a noção topológica de continuidade de uma função.

Para ELON LAGES (2006, p 73), tem-se definida a continuidade de uma função:

Definição 5. Uma função $f: X \to \mathbb{R}$, definida num conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz ser contínua num ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter um $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Ou seja:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\,;\ x \in X, \| x - a \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \varepsilon$$

Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ será dita contínua em X quando f for contínua em todos os pontos $a \in X$.

Outra informação relevante para a compreensão do TFC é a ideia de primitiva ou antiderivada de uma função f.

A definição a seguir é dada por HOWARD (2014, p. 322), na qual é definida a antiderivada de uma f.

Definição 6 . Dizemos que uma função F é uma antiderivada de uma função f em um dado intervalo aberto se $F'(x) = f(x)$ em cada x do intervalo.

Por exemplo, a função $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ é uma antiderivada de $f(x) = x + 1$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$, pois em cada ponto x desse intervalo, tem-se:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right] = x + 1 = f(x)$$

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua não negativa com $x \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x \leq b$ e supondo $A(x)$ uma função derivável no intervalo (a,b), de modo que:

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

(será usado t como variável de integração para evitar confusão com o limite de integração superior)

Se cumprida essa igualdade, pode-se interpretar $A(x)$ como a função área da região definida sob o gráfico da f de a até x, onde $a \leq x \leq b$.

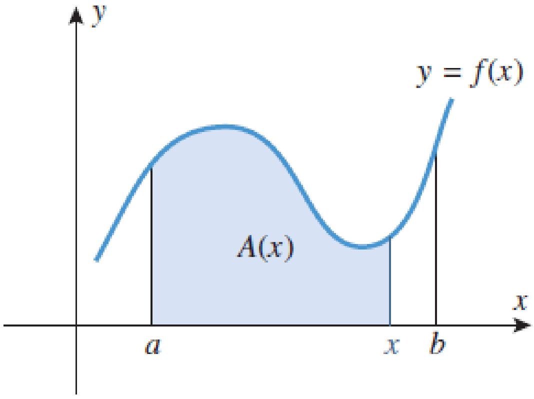

Figura 07 - área por $A(x)$
Fonte: Howard (2014, p. 362)

A definição de antiderivada permite formular $A'(x) = f(x)$, pois $A(x)$ é derivável em (a, b), isso possibilita encontrar qualquer outra antiderivada $F(x)$ de $f(x)$ em $[a, b]$ acresecentando uma constante a $A(x)$. Assim, determina-se:

$$F(x) = A(x) + C$$

uma antiderivada de $f(x)$. Subtraindo $F(a)$ de $F(b)$, obtém-se:

$$F(b) - F(a) = [A(b) + C] - [A(a) + C] = A(b) - A(a) = A - 0 = A$$

Portanto, a área A pode ser expressa por:

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

A afirmação que $A(x)$ é a função área sob o gráfico $y = f(x)$ no intervalo $[a, x]$ tal que $a \leq x \leq b$ implica que $A(x)$ pode ser expressa como integral definida:

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

A relação de antiderivada mencionada anteriormente $A(x)' = f(x)$ pode ser adaptada para:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Sendo assim, ELON LAGES (2019, p 224), apresenta o Teorema Fundamental do Cálculo da seguinte maneira:

Teorema (Fundamental do Cálculo). Se uma função integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ possui uma primitiva $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Em outros termos, se uma função $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, então

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

Vamos aplicar o TFC nos dois exemplos citados anteriormente.

Considerando novamente o exemplo 1, tem-se que $f(x) = x^2$ é positiva e contínua em $[a,b]$, sendo assim pode-se aplicar o TFC para determinar a área da região S. Acompanhe:

A região S é defnida por $f(x) = x^2$ tal que $a \leq x \leq b$ e $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ uma antiderivada de $f(x) = x^2$.

Aplicando o teorema, tem-se:

$$\int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{1^3}{3} + C\right] - \left[\frac{0^3}{3} + C\right] = \frac{1}{3} + \frac{0}{3} + (C - C) = \frac{1}{3}u.a$$

Agora, retomando o exemplo 2 e aplicando o TFC torna-se simples determinar a área da região S.

A função $f(x) = x^2 - x + 1$ é positiva e contínua no intervalo $[1,2]$ e sua primitiva é a função $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$ de modo que $C \in \mathbb{R}$, logo aplicando o TFC, tem-se:

$$\int_1^2 (x^2 - x + 1)\,dx = F(2) - F(1) = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 2 + C\right] - \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1 + C\right]$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{5}{6} + (C - C) = \frac{11}{6}u.a$$

O fato é que “[...] se não tivéssemos a vantagem do Teorema Fundamental Cálculo, teríamos de calcular um limite de somas difícil usando obscuras identidades trigonométricas” (STEWART, 2013, p.350).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É indiscutível entre os matemáticos que o Teorema Fundamental do Cálculo se destaca no campo da Integração. Por conta desse expressivo destaque ele foi o objeto de pesquisa deste trabalho. Fez-se necessário compreender por qual motivo é dada a ele significativa importância.

Para isso foi fundamental investigar o desenvolvimento histórico do TFC, conhecendo a sua origem, seu desenvolvimento e sua formalização com Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716), no século XVII.

Outro fator crucial para atingir esse objetivo foi a comparação entre dois métodos matemáticos que geram resultados similares, a Integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo. Com o objetivo identificar características relevantes de cada método foi preciso comparar seus procedimentos e resultados, se buscou resolver especificamente problemas de áreas de regiões definidas sob uma curva em um dado intervalo fechado utilizando ambos os métodos. Pode-se perceber que buscar os resultados desejados por meio das integrais de Riemann nem sempre é a melhor maneira, pois, em diversos casos, obter uma série numérica e calcular seu limite pode ser algo difícil e não muito prático.

Por outro lado, o TFC ao relacionar a integral e a derivada evidencia a relação inversa entre elas, minimiza o cálculo de integrais e torna ágil o trabalho dos matemáticos em diversas situações, logo o TFC apresenta-se como uma ferramenta prática e eficiente em comparação a outros métodos utilizados.

Justificada a importância dessa ferramenta para as Integrais percebe-se que convém explorá-la o máximo possível nos cursos de cálculo, possibilitando que os alunos compreendam-na, bem como outras ferramentas matemáticas a partir dela, instigando nos alunos o desejo pelo conhecimento e, consequentemente, pela pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anton, Howard. Cálculo [recurso eletrônico] / Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis ; tradução: Claus Ivo Doering. – 10. ed. – Porto Alegre : Bookman, 2014.

ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. Introdução a análise matemática / Geraldo Severo de Sousa Ávila- São Paulo: Blucher, 1999.

Lima, Elon Lages. Curso de Análise / Elon Lages Lima. -15.ed. –Rio de janeiro: IMPA, 2019.

Lima, Elon Lages. Análise Real Volume I. Funções de uma variável / Elon Lages Lima. 8.ed. Rio de janeiro: IMPA, 2006.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.

STEWART, James. Cálculo, volume I / James Stewart; [tradução EZ2 Translate]. -- São Paulo: Cengage Learning, 2013.