

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS  
CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TABATINGA  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JARDEL VIEIRA ALVES

## **GEOMETRIA DOS FRACTAIS E SUAS INFINITAS APLICAÇÕES**

Tabatinga-AM  
2021

JARDEL VIEIRA ALVES

## GEOMETRIA DOS FRACTAIS E SUAS INFINITAS APLICAÇÕES

Pesquisa bibliográfica apresentado para obtenção de nota parcial na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, ministrada pela Prof.<sup>a</sup> Ma. Karem Keyth de Oliveira Marinho, do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga da Universidade do Estado do Amazonas.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Ma. Francilene dos Santos Cruz

Tabatinga - AM  
2021

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
**Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.**

A474g Alves, Jardel Vieira  
Geometria dos Fractais e suas Infinitas Aplicações /  
Jardel Vieira Alves. Manaus : [s.n], 2021.  
24 f.: il.; 30 cm.

TCC - Graduação em Matemática - Licenciatura -  
Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2021.  
Inclui bibliografia  
Orientador: Cruz, Francilene dos Santos

1. Geometría fractal. 2. Geometría não euclidiana. 3.  
Fractal. I. Cruz, Francilene dos Santos (Orient.). II.  
Universidade do Estado do Amazonas. III. Geometria dos  
Fractais e suas Infinitas Aplicações

**Elaborado por Jeane Macelino Galves - CRB-11/463**

JARDEL VIEIRA ALVES

## GEOMETRIA DOS FRACTAIS E SUAS INFINITAS APLICAÇÕES

Pesquisa bibliográfica apresentado para obtenção de nota parcial na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, ministrada pela Prof.<sup>a</sup> Ma. Karem Keyth de Oliveira Marinho, do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga da Universidade do Estado do Amazonas.

Tabatinga - Am, 26 de julho de 2021

---

Prof.<sup>a</sup> Ma. Francilene dos Santos Cruz  
Orientador(a)

---

Prof.<sup>a</sup> Ma. Karem Keyth de Oliveira Marinho  
Membro da Banca

---

Prof. Esp. Zequias Ribeiro Montalvam Filho  
Membro da Banca

**"Em algum lugar, alguma coisa incrível  
está esperando para ser descoberta."**

**Carl Sagan**

## **Resumo**

Este trabalho de conclusão de curso pretende apresentar um panorama da pesquisa bibliográfica sobre a geometria dos fractais e suas aplicações nas diversas áreas do conhecimento humano. Foi realizada uma pesquisa em diversos artigos científicos brasileiros e não brasileiros e em diversas instituições científicas e acadêmicas com publicações sobre o tema de pesquisa. Foram escolhidos apenas artigos com pesquisas significativas e importantes para expor o tema em questão. Logo após todos os artigos passarem por uma análise, foi escolhida uma quantidade de artigos para que se fosse feita esta pesquisa. O maior objetivo desta pesquisa é mostrar o quão importante é o tema em questão não apenas para a matemática, mas para todos os campos científicos e não científicos do conhecimento.

**Palavras-chave:** Geometria fractal. Geometria não euclidiana. Fractal.

## **Resumen**

El trabajo de conclusión de este curso pretende presentar una visión general de la investigación bibliográfica sobre geometría fractal y sus aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento humano. Se realizó una investigación en varios artículos científicos brasileños y no brasileños y en varias instituciones científicas y académicas con publicaciones sobre el tema de investigación. Solo se eligieron artículos con investigación significativa e importante para exponer el tema en cuestión. Poco después de que todos los artículos pasaron por un análisis, se eligieron varios artículos para realizar este proyecto. El objetivo principal de este proyecto es mostrar la importancia del tema en cuestión no solo para las matemáticas, sino para todos los campos del conocimiento científico y no científico.

**Palabras clave:** Geometría fractal. Geometría no euclidiana. Fractal.

## LISTA DE FIGURAS

<b>FIGURA 01:</b> Anjos e demônios .....	19
--	----

## LISTA DE TABELAS

<b>TABELA 01:</b> corpo teórico da revisão bibliográfica.....	17
---	----



## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>2.</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>10</b>
2.1	RACIAIS NO ENSINO BÁSICO .....	10
2.2	FRACTAIS NA BIOLOGIA.....	13
2.3	FRACTAIS NA FÍSICA .....	14
2.4	FRACTAIS NA MEDICINA .....	14
<b>3.</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....</b>	<b>16</b>
<b>4.</b>	<b>RESULTADO E DISCUSSÕES.....</b>	<b>18</b>
4.1	PERCEPÇÃO DO INFINITO.....	18
<b>5.</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>22</b>
<b>6.</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>24</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No presente texto, trago elementos relativos a pesquisa bibliográfica realizada, conforme melhor explicitado nos procedimentos metodológicos.

O matemático Benoit Mandelbrot foi quem apresentou a primeira definição de Fractal. Este geômetra utilizou a informática para estudar o comportamento destes objetos matemáticos.

No início dos anos 80, Mandelbrot nomeou os Fractais para classificar certos objetos que não possuíam necessariamente dimensão inteira, podendo ter dimensão fracionária. Mandelbrot baseou-se no latim, cujo verbo frangere significa criar fragmentos irregulares e fragmentar.

Esta ferramenta matemática é de grande importância para o desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento já que pode ser aplicado em todas as áreas imagináveis, e não apenas em áreas científicas, mas também em campos distintos como a arte educação.

Venho através de esta pesquisa apresentar a geometria fractal, um campo matemático tão complexo e ao mesmo tempo tão simples capaz de explicar desde o infinito do cosmos com suas distribuições fractais de galáxias até algo simples como o crescimento de colônias de bactérias.

Foi levantado um conjunto de artigos e então confeccionado uma pesquisa bibliográfica em diversos artigos científicos brasileiros e não brasileiros.

O objetivo é mostrar o quão esse campo matemático é importante e capaz de tornar áreas do conhecimento distintas e complexas em algo calculável e inteligível. Coisas que a geometria euclidiana não era capaz de fazer, a geometria fractal é capaz de fazer e torna tudo simples.

“Os fractais conseguem transformar o caos em ordem”.

E é com este pensamento que continuaremos nossa pesquisa sobre a temática em estudo.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Fractais no Ensino Básico

A geometria fractal é um campo da matemática muito fértil e sua aplicabilidade é vasta. Dessa forma a sua utilização no ensino fica assegurada pela capacidade de adaptação dessa geometria, o que permite trabalhar diversos conceitos da própria matemática como também de outras ciências.

Pesquisadores que desenvolveram trabalhos acerca do uso da geometria fractal no ensino defendem a sua utilização por tratar de um tema flexível, interdisciplinar e de fácil contextualização, ou seja, “a geometria fractal, por meio de conexões e da interdisciplinaridade, apresenta um potencial histórico e cultural para explorar conteúdos matemáticos” (LOPES et al, p. 49, 2013).

Nunes (2006) ressalta alguns pontos importantes para justificar a inclusão da geometria fractal nos currículos de matemática da educação básica, visto que esta quando inserida no ensino se torna um tema motivador tanto para o docente quanto para os alunos, e ainda é um tema integrador de vários conceitos matemáticos. Sua aplicabilidade se estende a outras ciências e dessa forma um trabalho mais atraente pode ser desenvolvido com alunos nas diferentes etapas da escolaridade.

Alves (2007) afirma que a geometria fractal fomenta a interdisciplinaridade, pois pode-se trabalhar diversos temas. A geometria fractal pode proporcionar aos alunos uma visão diferente da matemática, pois ela permite suavizar a abordagem de conteúdos programáticos, permitindo a conexão de conceitos que muitas vezes são considerados pelos estudantes como desconexos e sem qualquer tipo de correlação. É uma porta de entrada para o mundo da informática e da programação, pois o professor poderá em conjunto da classe gerar imagens fractais em softwares; e ainda a geometria fractal é uma arma poderosa para se conseguir a atenção dos alunos, pois “os fractais e a geometria fractal, são temas que suscitam o interesse de quem os explora pelas inúmeras surpresas que escondem” (p. 183).

Pontos positivos de se utilizar geometria fractal na sala de aula: a conexão da geometria fractal com várias ciências; a possibilidade de difundir o acesso à tecnologia da informática em diversos níveis de escolarização; inserir os alunos no mundo da arte, despertando e desenvolvendo neles o senso estético com as construções dos fractais; causar a sensação de surpresa diante da ordem no caos.

Existem diversas formas de se explorar fractais em sala de aula, uma dessas formas é estudar relações numéricas de seus elementos, ou seja, estudar o perímetro, a área e volumes de figuras fractais, essas aplicações em geral são adequadas ao ensino médio para uma boa fixação da aprendizagem.

Lima *et al.* (2014) destacam a possibilidade da utilização dos fractais na educação básica, por intermédio de materiais manipuláveis e da tecnologia.

Dessa forma, a prática docente se torna mais atraente e menos rotineira, inserindo temas mais recentes da matemática com o desenvolvimento de atividades novas e diferenciadas. A inserção da geometria fractal no ensino permite uma reflexão maior da própria geometria euclidiana, pois amplia as discussões de conceitos e resultados que muitas vezes não são trabalhados em classe.

A introdução de fractais no ensino médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma idéia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas (SALLUM, p. 1, 2005).

No Brasil, o ensino da geometria fractal não é previsto nos PCNs de Matemática. Contudo podemos encontrar algumas justificativas para inserir esse conhecimento na educação. Por se tratar de uma geometria, ela também auxilia os alunos a entender o mundo em que vivem, que é um dos objetivos para o estudo da geometria na educação básica.

Os PCNs do Ensino Fundamental ressaltam a importância do estudo de conceitos geométricos para desenvolver no aluno a compreensão e a representação, de maneira organizada, do mundo em que vive. Além disso, é fundamental o uso de objetos do mundo físico, obras de artes, desenhos, etc. para explorar o conhecimento acerca do espaço e das formas, desse modo permite ao aluno que estabeleça conexões entre a Matemática e outras ciências (BRASIL, 1998).

Já o PCN de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio descreve que é importante o ensino da geometria para que o educando utilize esse conhecimento “para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade” (BRASIL, p.12, 2000).

Como também “utilizar elementos e conhecimentos científicos e tecnológicos para diagnosticar e equacionar questões sociais e ambientais” (BRASIL, 2000, p.13).

Existe também a possibilidade de trabalhar os temas transversais descritos nos PCNs com a geometria fractal. Entende-se como “Temas transversais” um conjunto de questões de grande urgência social que deve ser trabalhado junto aos estudantes visando “a aprendizagem de conceitos, procedimentos e o desenvolvimento de atitudes”.

São considerados como temas transversais: Ética, Pluralidade Cultural, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Trabalho e Consumo. Nesse contexto, podemos trabalhar a geometria fractal na questão da Saúde e Meio Ambiente promovendo a interdisciplinaridade com a Biologia e a Geografia, ou ainda, reproduzir atividades que abrangem a temática Ética e que desenvolvam atitudes como a promoção da autoconfiança de modo que o aluno se sinta capaz de desenvolver as atividades, permitindo a evolução intelectual respeitando os diferentes ritmos de aprendizado. O professor deverá promover meios que possibilitem o estudante alcançar essa evolução; o respeito pelas ideias e os pensamentos dos demais colegas de classe; construção de um comportamento solidário onde o aluno saiba superar o individualismo (BRASIL, 1998).

A geometria fractal muito pode ajudar a alcançar os objetivos da temática Ética, uma vez que a sua compreensão é acessível e simples, o conceito de autosimilaridade é compreensível permitindo que o estudante não se julgue incapaz de exercer as atividades propostas. Podemos ainda propor atividades em grupo para que os alunos construam fractais em conjunto promovendo a socialização dos mesmos, etc.

Partindo das observações feitas, vê-se que apesar dos PCNs não tratarem da geometria fractal, o uso desta se justifica pelos próprios objetivos descritos nos parâmetros curriculares.

## 2.2 Fractais na Biologia

A matemática pode quantificar fenômenos e muitos de seus aspectos, nos fornecendo novas maneiras de ver e compreender os problemas. A ciência dos fractais apresenta estruturas geométricas de grande complexidade e beleza infinita, ligadas às formas da natureza, ao desenvolvimento da vida e à própria compreensão do universo. São imagens de objetos abstratos que possuem o caráter de onipresença por terem as características do todo infinitamente multiplicadas dentro de cada parte, escapando assim, da compreensão em sua totalidade pela mente humana.

A biologia sempre apresenta numerosas questões não lineares, descontínuas e inesperadas. Neste contexto, são exigidas ferramentas sofisticadas para possibilitar a compreensão da complexidade existente em cada detalhe.

Suas aplicações podem ser encontradas nos mais extraordinários detalhes como na classificação da íris, taxonomia vegetal, neurociências, diagnósticos de diabetes, doença da retina e vários outros. Salientando que a modelagem matemática apenas nos permite fazer uma avaliação qualitativa e não é capaz de prever ou fornecer resultados milimetricamente precisos.

A geometria fractal possibilitou responder enigmas que há muito tempo tem intrigado cientistas, pois traz uma nova perspectiva para o entendimento de fenômenos como a morfogênese ou a neovasogênese, em que um número limitado de genes seriam responsáveis por uma codificação simples que coordene um padrão de desenvolvimento orgânico fractal, mas ainda não há comprovação definitiva. Surge perante de nós uma nova maneira de encarar a natureza, possibilitando uma gama de abordagens inter e transdisciplinares, rompendo com a velha postura cartesiana de se fazer ciência.

Trabalhos impressionantes são realizados na área de biologia no que tange os microrganismos. A observação de colônias de bactérias com estruturas fractais vem sendo relatada na literatura há algumas décadas. Alguns autores sugerem ainda que a dimensão fractal pode ser um dos melhores parâmetros para descrever colônias de fungos e bactérias, uma vez que pode ser calculada independentemente da morfologia e está diretamente associada com o comportamento de ramificações.

## 2.3 Fractais na Física

Os fractais estão ligados a áreas da física e da matemática chamadas Sistemas Dinâmicos, porque suas equações são usadas para descrever fenômenos que, apesar de parecerem aleatórios, obedecem a certas regras-como o fluxo dos rios. Eles não são explicados pela geometria euclidiana, pois possuem dimensão fracionária. Essa fração está relacionada com a quantidade e a escala de ampliação das cópias da figura contidas dentro dela mesma. Outra característica é que possuem complexidade infinita: um zoom em um detalhe da imagem revela novos detalhes.

O conceito de Caos traz também uma nova luz sobre a entropia, que mede também a complexidade de um sistema, e sobre os fundamentos da Mecânica Quântica, nomeadamente o Princípio de Incerteza de Heisenberg.

Os físicos inventaram novas figuras Fractais, a mais famosa dessas figuras é talvez a que resulta do processo conhecido por “Agregação Limitada por Difusão” que representa adequadamente numerosos processos físicos (cristalização, deposição eletrolítica, mistura de fluidos com diferentes viscosidades).

Os Fractais continuam a ser um campo fecundo de aplicação em Física.

## 2.4 Fractais na Medicina

Na Medicina, reconhecem-se características Fractais em fenômenos cardíacos e pulmonares. Em que o Floco de Neve de Koch e a curva de Peano assemelham-se ao movimento dos pulmões.

Outro fato importante é que o coração bate a um ritmo Fractal e que um batimento quase periódico é sintoma de insuficiência cardíaca.

Alguns fenômenos de mudança, observados em Medicina, são desencadeados por pequenas alterações iniciais ou pequenas influências no seu decorrer, mas que podem provocar grandes mudanças em um quadro clínico de um indivíduo ou no processo de propagação de uma epidemia, a este fenômeno denomina-se Efeito Borboleta.

O Efeito Borboleta não pode ser confundido com o Efeito Dominó, que se desloca de modo linear, pois este primeiro processa-se em rede de estruturas fractais, caóticas ou de transição entre caos e fractais. Apesar de esse fenômeno Efeito Borboleta estar presente na área médica em geral, particular interesse desperta para a Medicina complementar, onde se pretende entender alguns efeitos que começam com intervenção muito sutis.

Os produtos homeopáticos podem ser exemplos destes tópicos estudados na nova ciência. São usados em quantidades extremamente pequenas para se obter grandes modificações. Assim, não existe proporção material entre o preparado homeopático e o efeito obtido, porque as quantidades, quando existem, são absolutamente desiguais. Entretanto, a que se deve a sua efetiva eficiência.

Quando se estuda caos, fractais e complexidade isso pode ser mais bem compreendido. Os cientistas da área da complexidade observaram e comprovaram que em sistemas complexos, ou caóticos, pequenas alterações em determinados pontos dos processos provocam grandes mudanças no conjunto todo.

Os efeitos lineares - empregados na medicina - devem ser revistos através dos critérios atualmente disponibilizados pela Ciência, entendendo-se que caos e não-linearidade pertencem a uma mesma linguagem (STROGATZ, 1994).

Atualmente, está sendo aberto um interessante campo de pesquisas e tecnologia com o advento das novas ferramentas que estão sendo disponibilizadas pela Ciência.

Particularmente, caos, fractais e complexidade, são instrumentos importantes para a compreensão e prática em Medicina Complementar, pois, podem viabilizar os meios para se concretizar seus objetivos. Faltam, porém, trabalhos com equipes multidisciplinares, com a participação de profissionais da área médica, e profissionais desta área que estejam dispostos a realizar treinamentos com esses novos instrumentos conceituais e tecnológicos.



### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A revisão bibliográfica realizada constitui-se em três etapas. Na primeira delas, houve o levantamento dos principais periódicos científicos encontrados em instituições científicas reconhecida.

Feito esta listagem de artigos, chegou-se a dezenove possíveis periódicos científicos de publicação online, com os quais realizaria as buscas para encontrar textos que abordassem a geometria fractal.

O próximo passo foi à elaboração de critérios de triagem para seleção dos documentos.

As primeiras análises foram feitas, o que forneceu alguns dados como: quantidade de textos por revista, palavras chaves de cada texto, ano das publicações, quantidade de vezes que as palavras Fractal, Fractais e Não euclidianas apareceram dentro dos textos, instituições nas quais as pesquisas estavam vinculadas, entre outros levantamentos expressivos.

A segunda etapa da revisão é caracterizada por um direcionamento dado a pesquisa, que resultou na filtragem dos textos que viriam a ser analisados.

Após a seleção, os dez textos foram lidos e foi o que produziu o resumo de todos eles, organizando referências, referenciais teóricos, objetivos, identificando a metodologia utilizada e resultados ou considerações, tudo afim de conhecer o seu material de pesquisa.

A terceira e última etapa foram escolhidos temas para expor o quão importante e significativa é essa área matemática, assim pesquisou-se alguns trabalhos já publicados que foram extraídos de plataformas on-line a partir de sites do SciELO (Scientific Electronic Library Online), Google Acadêmico, BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações), Science.gov, ScienceResearch.com e sistebib – UFAM (Sistema de *Bibliotecas* da Universidade Federal do Amazonas).

Essas pesquisas são provenientes da temática Geometria dos Fractais e suas aplicações.

**TABELA 01:** Corpo Teórico da Revisão Bibliográfica.

Título do trabalho	Autores
Geometria Fractal e Teoria do Caos	Departamento de Matemática Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades para o ensino de Matemática.	Hamilton Cunha de Carvalho
A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos.	Tiago Pereira Fábio Alexandre Borges
Fractal – a geometria da natureza aplicada no ensino.	Josemy Brito Da Silva
fractal signature of coronaviruses related to severe acute respiratory syndrome	Thiago de Salazar e Fernandes
Dimensões Fractais Aplicadas ao Estudo de Bactérias	Elisa Morandé Sales
Quantifying the branching frequency of virtual filamentous microbes using fractal analysis,	D. J. Barry
Aplicações médicas das abordagens complexas não lineares: a geometria fractal do EEG	Sant'Ana, Antonio Carlos
Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais	Thiago Albuquerque de Assis, Jose Garcia Vivas Miranda, Fernando de Brito Mota, Roberto Fernandes Silva Andrade e Caio Mario Castro de Castilho.
Geometria fractal e teoria do caos	Departamento de Matemática Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

**Fonte:** Arquivo pessoal.

A seguir, continuaremos abordando sobre os trabalhos relacionados nesta tabela, assim como demonstrar as inúmeras possibilidades que se encontram os fractais.

## 4 RESULTADO E DISCUSSÃO

Os fractais estão por toda parte. Seu estudo é muito importante para melhor compreender as funções matemáticas que apresentam um perfil serrilhado, como o da costa de um país. São funções representadas por gráficos com perfil fractal. Figuras geométricas complexas cuja característica fundamental é a autossimilaridade, os fractais estão presentes em praticamente todos os ramos do conhecimento.

Essa área matemática se torna muito mais poderosa quando utilizado a computação para a geração de figuras e cálculos mais complexos.

### 4.1 Percepção do Infinito

A percepção do infinito é um assunto fundamental para darmos início à compreensão da Geometria Fractal.

Por ser um conceito estritamente matemático, existe uma dificuldade em contextualizá-lo no dia a dia. Os conjuntos numéricos já trazem a ideia de infinito.

O conjunto dos números naturais (0,1,2,3, ...) se caracteriza por ser um conjunto infinito e enumerável, pois para cada número natural temos um sucessor  $n+1$ . Já no conjunto dos números reais, não podemos falar em sucessor, pois dado dois números reais distintos,  $x$  e  $y$ , existe o número real  $z$  tal que  $x < z < y$ .

A percepção do infinito foi bem explorada na arte de Escher, como podemos notar na xilogravura “Anjos e Demônios” mostrada na **Figura 1**.



**Figura 1 - “ Anjos e Demônios, 1960 ”**

Uma Análise da Geometria Fractal - Curso de Ciências Naturais - Faculdade UnB de Planaltina

Fazendo uma análise da imagem acima, o artista começa a preencher o círculo pelo centro com figuras de um anjo contra pondo com a figura de um demônio e conforme vai se deslocando para a borda do círculo esses padrões vão se repetindo, porém, em tamanhos menores seguindo uma progressão geométrica. Transmitindo para as pessoas que estão visualizando a percepção do infinito. O uso prático de Fractais constitui uma maneira nova de encarar a realidade e também uma ferramenta científica de enorme alcance, aliada a larga disseminação de computadores. Nos últimos 20 anos, a Geometria Fractal e seus conceitos têm se tornado uma ferramenta central em diversas áreas:

Na Matemática, a análise de dados caoticamente dispersos impulsionou a evolução do tratamento estatístico e da noção de probabilidade. Por outro lado, a Geometria Fractal aprofundou a ideia intuitiva de infinito.

Na Física, o conceito de Caos traz uma nova luz sobre a entropia, que mede também a complexidade de um sistema, e sobre os fundamentos da Mecânica Quântica, nomeadamente o Princípio de Incerteza de Heisenberg.

Os físicos inventaram novas figuras Fractais, a mais famosa dessas figuras é talvez a que resulta do processo conhecido por “Agregação Limitada por Difusão” que

representa adequadamente numerosos processos físicos (cristalização, deposição eletrolítica, mistura de fluidos com diferentes viscosidades).

Os Fractais continuam a ser um campo fecundo de aplicação em Física.

Na Biologia, o Caos está sendo usado para identificar processos evolutivos que permitem um novo entendimento do algoritmo genético, simulações realistas de formas de vida artificiais e uma nova abordagem da atividade cerebral a Geometria Fractal é usada para tentar resolver problemas de dinâmica do transporte de energia em meios fluidos (hidrodinâmica).

Os organismos vivos variam muito de tamanho, desde os seres microscópicos às baleias e há muito que os biólogos tentavam compreender a relação entre o tamanho e fisiologia e cada ser vivo. Sabia-se, por resultados obtido em diversas medições, que o ritmo metabólico é proporcional a uma potência de expoente  $\frac{3}{4}$  da massa do organismo – quanto maior a criatura, mais lento é o seu metabolismo.

E relações idênticas foram encontradas para o aumento da população de uma espécie, idade na primeira reprodução, duração do desenvolvimento do embrião, relacionados com potências da massa de expoentes  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$  e  $-\frac{1}{4}$  respectivamente. O comum em todas estas relações e que parece ser válido para todos os organismos vivos dos mais diversos tamanhos, quer do reino animal como vegetal, é a potência de expoente  $\frac{1}{4}$   $p4Y = \alpha M$  E por muito tempo, este facto espantava os investigadores já que, tratando-se de corpos tridimensionais, seria muito mais lógico que aparecesse na potência o expoente  $\frac{1}{3}$ . Esta equipe analisou em termos geométricos e físicos os sistemas lineares de tubos que fazem a distribuição de recursos (oxigénio, alimento) e de desperdícios por todo o organismo e consideraram que tais sistemas teriam que ter três características:

- A rede de distribuição tem que alcançar todos os pontos do corpo tridimensional;
- Deve requerer o mínimo de energia para transportar esses elementos num meio fluido;
- Os últimos “tubinhos” da rede (por exemplo, os vasos capilares num sistema

circulatório) terão que ter todos o mesmo tamanho já que as células em todos os seres vivos são, grosso modo, do mesmo tamanho.

A resposta apareceu quando a equipa se apercebeu de que tal rede de distribuição era mais bem caracterizada por um sistema de ramificação Fractal para preenchimento do espaço neste sistema, ao qual foram acrescentando melhoramentos que vão tendo em conta alguns aspectos dinâmicos que foram inicialmente desprezados (como por exemplo, a elasticidade dos vasos sanguíneos), conseguiram-se obter previsões que se aproximavam mais dos valores observados na prática e outras que teriam depois que ser, ou não, comprovadas. Este método, por exemplo, prevê o grau de ramificação de um sistema circulatório: indica que uma baleia sendo 107 vezes mais pesada que um rato, apenas necessita de mais 70% de ramificações no seu sistema circulatório para poder abastecer todo seu organismo.

Na Medicina, reconhecem-se características Fractais em fenómenos cardíacos e pulmonares. Em que o Floco de Neve de Koch e a curva de Peano assemelham-se ao movimento dos pulmões.

E também descobertas recentes indicam que o coração bate a um ritmo Fractal e que um batimento quase periódico é sintoma de insuficiência cardíaca. No campo das Ciências Humanas e mesmo das Ciências Policiais, o Caos tem sido aplicado ao estudo do comportamento de multidões.

Já no ensino por ser um tema atual e amplo, a exploração da geometria dos fractais permite tornar a aula de matemática um espaço propício para aprendizagem, que une aspectos lúdicos da manipulação do cartão com a abordagem de conceitos matemáticos. É possível ainda investigar, a partir de tópicos da matemática tradicional, conceitos mais elaborados que podem servir como introdução para um conteúdo futuro, como séries e limites.

## 5 CONCLUSÃO

O conceito de Fractal está correlacionado com a dimensão, pois um Fractal é por definição um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica (número inteiro que caracteriza a geometria de um objeto euclidiano – por exemplo: zero para um ponto, um para uma linha, etc.).

A Geometria Fractal pode ser trabalhada de forma interdisciplinar nas escolas junto com as disciplinas de Matemática, Biologia, Geografia, Ciências Naturais e Artes. Com a finalidade de contextualizar os temas abordados em sala de aula.

“A abordagem da Geometria Fractal pode incrementar nas turmas da educação básica proporcionando mais uma fonte motivacional no estudo de diversos conteúdos presentes nas propostas curriculares, tais como: padrões numéricos e geométricos; sequências e séries; progressões geométricas (PGs); problemas de contagem; perímetro e área figuras planas; volume de sólidos geométricos; logaritmos; introdução ao conceito de limite” (MOREIRA, p.35, 2013).

Entretanto o ensino da Geometria Fractal vem sendo um obstáculo a ser superado pelos professores, pois a maioria em suas graduações não estudaram essa nova geometria. Com isso, é sempre bom o educador buscar novos cursos de atualizações para que seus alunos sempre estejam atualizados sobre os assuntos.

Dessa forma, este trabalho de revisão bibliográfica teve como finalidade divulgação dessa nova geometria, pois, estamos acostumados desde a educação básica somente com a Geometria Euclidiana, entretanto está não era capaz de explicar alguns fenômenos da natureza como as ramificações que os raios fazem; a estrutura do couve-flor e formato das nuvens. Com isso surge a Geometria Fractal que explica esses fenômenos que antes eram tidos como “monstros da matemática”.

Como podemos notar a Geometria Fractal está presente no nosso cotidiano e a maioria das vezes passamos despercebidos por causa da falta de informação. Em um dia chuvoso quando olhamos para o céu vemos aquelas ramificações que os raios fazem; quando vamos ao supermercado e compramos um couve-flor, estamos diante

de objetos fractais. Com isso, a importância do estudo da Geometria Fractal tanto no ensino básico quanto no ensino superior.



## REFERÊNCIAS

- ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais: Conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário**. 2007. 324 p. Dissertação de Mestrado em Matemática para o Ensino. Universidade de Lisboa, Lisboa. Disponível em: <<http://pt.scribd.com/doc/20939623/Fractais-Conceitos-Basicos-RepresentacoesGraficas-e-Aplicacoes-ao-Ensino-nao-Universitario#scribd>> Acesso em: Ago. 2020.
- BARKER, Stephen F. **Filosofia da Matemática**. Tradução de Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.
- LOPES, J. M. ;SALVADOR, J. A. ; BALIEIRO FILHO, I. F. .**O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas**. Revista Eletrônica de Educação (São Carlos), v. 7, p. 47-62, 2013. Disponível em: <[www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/500/291](http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/500/291) > Acesso em: Set. 2015.
- LOPES, M. J.; SALVADOR, B. J.; FILHO B. F. I. **O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas**. *Revista Eletrônica de Educação*, São Paulo, v.7, n.3, p.47-62, 2013.
- LOPES, M. C. R. M.; AMARAL, A.; MATTO, F. A.; SILVA. R. B. K. **Fractais na Educação Básica: aprendendo com quebra-cabeças, arte francesa e cartões**. *Educação Matemática em revista*, Paraná, ano 19, n.41, mar. 2014.
- NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria fractal e aplicações**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Cidade do Porto, 2006. Disponível em: <<http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>> Acesso em: Ago. 2015.
- SALLUM, E. M.; **Fractais no Ensino Médio**. Revista do Professor de Matemática, v. 59, p. 01 -08, 2005.
- SANTOS, T. S. **A inclusão das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Educação Básica**. 2009. 138f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.