Universidade Estadual do Amazonas
Licenciatura em Matemática
Tabatinga – AM

Rayana Paula de Oliveira

Como a Teoria dos Grafos pode ser usada no cotidiano: aplicação usando o algoritmo de Dijkstra

Tabatinga - AM

Rayana Paula de Oliveira

Como a Teoria dos Grafos pode ser usada no cotidiano: aplicação usando o algoritmo de Dijkstra

Trabalho de conclusão de curso apresentado para obtenção de graduação no curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade do Estado do Amazonas, no município de Tabatinga –AM.

Orientador: Professor Mestre Edfram Rodrigues Pereira

Tabatinga – AM
2021

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

048c de Oliveira, Rayana Paula
Como a Teoria dos Grafos pode ser usada no cotidiano: : Aplicação utilizando o algoritmo de Dijkstra / Rayana Paula de Oliveira. Manaus : [s.n], 2021.
32 f.: color.; 30 cm.

TCC - Graduação em Matemática - Primeira Licenciatura - Licenciatura - Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2021.
Inclui bibliografia
Orientador: Edfram Rodrigues Pereira

1. Grafos. 2. Dijkstra. 3. Cotidiano. I. Edfram Rodrigues Pereira (Orient.). II. Universidade do Estado do Amazonas. III. Como a Teoria dos Grafos pode ser usada no cotidiano:

Elaborado por Jeane Macelino Galves - CRB-11/463

Rayana Paula de Oliveira

Como a Teoria dos Grafos pode ser usada no cotidiano: aplicação usando o algoritmo de Dijkstra

Trabalho de conclusão de curso apresentado para obtenção de graduação no curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade do Estado do Amazonas, no município de Tabatinga –AM.

Data de aprovação: 11 de Agosto de 2021

Profº Me. Edfram Rodrigues Pereira – Orientador (CSTB/UEA)

Profº Esp. Zequias Ribeiro Montalvam Filho – Membro interno (CSTB/UEA)

Profº Dr. Edilson de Carvalho Filho – Membro interno (CSTB/UEA)

Dedico esse trabalho aos meus pais, pois sem eles, eu não estaria aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado forças, que eu achava que não tinha, para concluir esse trabalho. Aos meus pais Jonas e Raimunda, mas principalmente à minha mãe por sempre me apoiar e me incentivar a seguir em frente sem desistir. Aos meus amigos que entenderam minhas frustrações e me incitaram a não desistir. Aos professores que, no decorrer do meu curso, tiveram toda a paciência para ensinar. E, claro, agradeço ao meu orientador pelos conselhos, paciência e auxílio durante esse tempo.

Agradeço ao meu parceiro Valdenei, por ter me ajudado com as figuras e também por constantemente ter me dado força e me motivado a seguir em frente. Agradeço imensamente a todas as pessoas que, no decorrer desses anos, cruzaram meu caminho e, de alguma forma, tiveram impacto na minha vida acadêmica e, portanto, profissional.

Aos meus colegas de classe e amigos que vou levar pra toda a vida: Alícia, que esteve comigo desde o ensino fundamental e agora estamos finalizando juntas essa jornada, Ciron, Jovany, à Kayla, que tantas vezes me acolheu. Não posso esquecer da Léia, do curso de Letras, à qual esteve comigo nos piores momentos e nunca me deixou e sempre foi leal. Essas pessoas fizeram tudo valer a pena e ser inesquecível.

E, por último, mas não menos importante, agradeço à Universidade Estadual do Amazonas, por todo o aprendizado prestado a mim e toda a equipe do meu curso pelos serviços essenciais à minha formação.

Resumo: No decorrer da vida, nos deparamos com situações que apresentam desafios, situações corriqueiras ou nem tanto assim, mas, para resolvê-las, precisamos pensar. Quando existem situações onde há coisas e essas coisas estão ligadas entre si de alguma forma, podemos resolvê-la através de um grafo, dando valor a ele e transformando o problema em uma rede (grafo com valores em seus vértices e arestas). O presente artigo mostra como a Teoria dos Grafos, que vem encontrando lugar de destaque no ramo das ciências exatas recentemente, pode ser útil em nosso dia-a-dia. Através de uma aplicação, procurou-se analisar a utilidade dessa ferramenta fascinante que vem ganhando cada vez mais espaço dentro da Matemática. Foi utilizado o algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho mínimo de um determinado vértice a outro, isso de acordo com a situação-problema proposta. Obteve-se sucesso, ou seja, o caminho mínimo foi encontrado e, assim, conseguiu-se mostrar como pode ser útil colocar a Teoria dos Grafos no cotidiano.

Palavras-chave: grafos, Dijkstra, cotidiano

Abstract: Throughout life, we face situations that presente challenges, common situations or no much, but to solve them, we need to think. When there are situations where there are things and these things are connected to each other on some way, we can solve them through a graph, giving value to it and transforming the problem into a network (graph with values in its vertices and edges). This paper shows how the Graph Theory, which has been finding a prominent place in the field of exact sciences recently, can be useful in our daily lives. Through na application, we tried to analyze the usefulness of this fascinating tool that has been gaining more and more space within Mathematics. Dijkstra's algorithm was used to find the shortest path from one vertex to another, according to the proposed problem-situation. Success was achieved, the shortest path was found and, it was possible to show how it can be useful to put Graph Theory in everyday life.

Key Words: Graph, Dijkstra, everyday life

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

Como a Teoria dos Grafos pode ser usada no cotidiano: aplicação utilizando o algoritmo de Dijkstra

How Grapf Theory can be used in everyday life: application using Dijkstra's algorithm

Rayana Paula de Oliveira[1]

orayana244@gmail.com

Edfram Rodrigues Pereira[2]

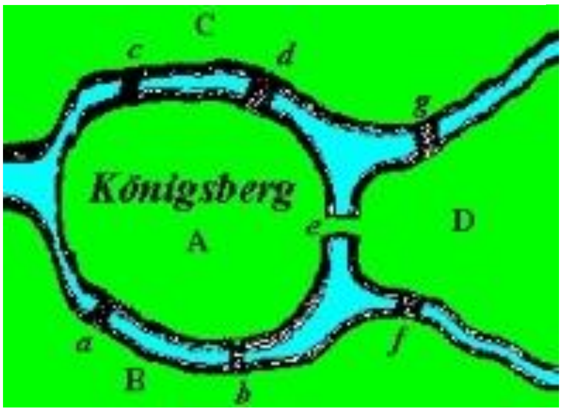
[2]erpereira@uea.edu.br

1 Introdução

No cotidiano, é comum surgirem problemas de difícil solução, problemas estes que envolvem certos elementos e as ligações entre eles. Um exemplo de problemas dessa natureza é o problema do caixeiro viajante, que consiste em determinar a menor rota para percorrer uma série de cidades (visitando uma única vez cada uma delas), retornando à cidade de origem. Tais problemas podem ser solucionados utilizando um sistema que possibilita uma visão ampla do problema para, assim, resolvê-lo com mais facilidade, esse sistema chama-se grafos, e o nosso foco de pesquisa no proposto projeto é demonstrar como esse sistema pode ser útil no cotidiano, apresentando um exemplo. O problema mais antigo envolvendo Teoria dos Grafos de que se tem conhecimento é o problema das Pontes de Königsberg (inclusive, acredita-se que esse problema foi o que deu origem à teoria a qual este trabalho se refere). O problema consistia em descobrir como atravessar sete pontes que ligavam quatro zonas da cidade de Königsberg (território da Prússia até 1945, atual Kaliningrado) sem passar mais de uma vez pela mesma ponte.

[1]Discente
[2]Orientador

Figura 1 - Ilustração do problema das Pontes de Königsberg



Fonte: UFSC

E foi a partir de problemas dessa natureza que surgiu a necessidade de desenvolver a teoria dos grafos, que vem servir de suporte para questões de grande complexidade de resolução. É importante conhecer como esse método, que se mostrou tão útil ao longo dos anos, pode ajudar em problemas corriqueiros, porém importantes e que são difíceis de resolver, obtendo, assim, uma visão bastante ampla sobre o assunto.

> E a teoria dos grafos oferece formas diversificadas de representar objetos matemáticos, modela o problema em um desenho composto por vértices e arestas e encontra uma maneira de resolvê-lo manualmente ou com o auxílio do computador. (SOUZA, 2013, p. 1)

Partindo dessa premissa, a presente pesquisa busca mostrar um problema do cotidiano que é resolvido através de um grafo que possui valores (chamado de rede) e, a partir disso mostrar como os grafos podem ser úteis. O leitor verá aqui um problema envolvendo o fluxo de redes, que nada mais é que um problema comum do dia-a-dia, mas que tem uma solução não tão simples assim. O objetivo é determinar o melhor plano de produção para uma empresa que produz um determinado produto em lotes, ou seja, temos que descobrir qual o menor custo de produção para esse produto. A partir das informações que já temos, vamos analisar e transformar esse problema em um problema de fluxo de redes, ou seja, que dê pra resolver através de grafos, colocando valores nos vértices e nas arestas e, depois, usar as propriedades dos grafos para com isso, resolver o problema. Para isso, terá que ser descoberto o menor caminho do grafo gerado pelo problema, pois assim, descobriremos qual o custo mínimo de produção. Usaremos o algoritmo de Dijsktra para resolver o problema em questão e então analisaremos como os grafos funcionam em problemas do cotidiano, bem como as formas que podemos utilizar os grafos em nossa vida. Sendo assim, este trabalho tem como objetivo apresentar de que forma essas estruturas funcionam em situações diversas do dia-a-dia que se mostram difíceis – ou nem tanto - de resolver. Espera-se que, ao final da leitura, o leitor tenha uma ampla visão de como os grafos são úteis e necessários à vida em geral.

2 Procedimentos Metodológicos

O projeto proposto teve como abordagem a pesquisa descritiva, logo houve o esclarecimento de um assunto já conhecido, neste caso, a Teoria dos Grafos. Como conceitua (TRIVIÑOS, 1987) “a pesquisa descritiva exige do investigador uma série de informações sobre o que deseja pesquisar. Esse tipo de estudo pretende descrever os fatos e fenômenos de determinada realidade.” (apud Gerhardt, Silveira, 2009, p. 35).

Para começar, foi feito um estudo sobre o assunto, a fim de se obter aprofundamento sobre os assuntos pertinentes à pesquisa e, assim, ter uma visão ampla do que se pretendia produzir durante a escrita do presente trabalho. Os estudos foram feitos a partir de uma diversidade de artigos científicos relacionados ao tema proposto, a fim de satisfazer os objetivos da pesquisa. Também foram utilizados fragmentos do capítulo 4 do livro Pesquisa Operacional de Marcos Arenales, que trata da otimização em redes, de onde tiramos o exemplo do qual a aplicação apresentada nesse artigo foi baseada, bem como o algoritmo utilizado. Esse livro aborda justamente a aplicação de métodos científicos para abordar problemas complexos, tal como será abordado nesse artigo.

A partir daí, foi feita uma pesquisa bibliográfica para, então, obter resultados a partir de uma demonstração. Tal demonstração foi feita a partir do livro mencionado acima e, quando provadas tais questões, as mesmas foram analisadas e, daí, chegou-se em um resultado.

> A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (FONSECA, 2002, p. 32).

Por fim, foi feita uma conclusão sobre as diferentes variáveis analisadas a fim de descobrir se os objetivos propostos foram alcançados.

3 Desenvolvimento

3.1 Um pouco sobre Grafos e redes

A diversidade dos grafos é grande, estando eles presentes em muitos ramos de nossa vivência. Um dos lugares em que os grafos podem ser encontrados e utilizados de forma a trazer benefícios é na educação matemática, como afirma FERREIRA (2014, p.22) em sua dissertação de mestrado: “Podemos afirmar então que grafos são uma importante ferramenta que colabora com a transversalidade e interdisciplinaridade na escola.” Ainda diz: “São inúmeras as situações que podem ser modeladas por grafos, por isso esta estrutura é considerada tão importante. Alguns problemas são extremamente simples enquanto que outros são bastante sofisticados.” (FERREIRA, 2014, p. 24). Sendo assim, a seguir, serão apresentados conceitos a respeito dos grafos e da estrutura a que eles estão diretamente ligados, que são as redes, que são pertinentes a este artigo, conceitos esses que ajudarão o leitor a compreender melhor o que se pretende passar. Em seguida, seguiremos para a aplicação que servirá de base para entendermos a importância que essa estrutura pode ter em nosso cotidiano.

.

3.2 A respeito dos grafos

Como diz Jesus (2018) em sua dissertação de mestrado: “A teoria dos grafos estabelece a relação entre um objeto e um determinado conjunto.” Ou seja, grafos estabelecem relações entre coisas. A seguir, alguns conceitos de grafos necessários à compreensão desse trabalho.

- **Definição:** Grafo é uma estrutura G = (V, E), onde V é um conjunto finito de elementos chamados de vértices e E é um conjunto de pares ordenados de V, chamados de arestas. Ao número n de vértices do conjunto V chamamos ordem do grafo G. O número de vértices e o número de arestas de um grafo são denotados, respectivamente, da seguinte maneira:

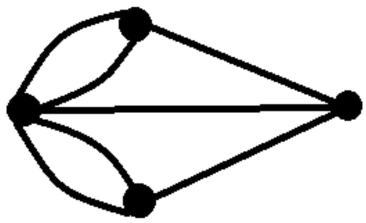
$$|V|, |E|.$$

Representam-se os vértices de um grafo por pontos e as arestas por ligações entre esses pontos. A próxima ilustração mostra um grafo para que o leitor possa visualizar. (JESUS, 2018, p. 3).

- **Grafo simples:** Dizemos que um grafo é simples quando não existe mais de uma aresta ligando cada par de vértices, também não existem laços, que é quando um vértice é adjacente a ele mesmo. (JESUS, 2018, p. 3)

- **Adjacência de vértices e grau de um vértice:** Quando, em um grafo, existe uma aresta u que une dois vértices x e y, ou seja, $\mathrm{u} = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}$, dizemos que esses vértices são adjacentes. O número de arestas que incidem em um vértice x denomina o grau desse vértice, que vai ser representado por deg(x). (JESUS, 2018, p. 4)

Figura 2 - Grafo originado a partir do problema das pontes de Königsberg



Fonte: SILVA JUNIOR (2021)

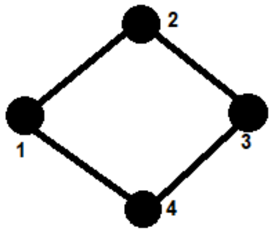
- O grafo da figura 2 tem |V| = 4 e |E| = 7.

- **Observação:** A soma dos graus de todos os vértices de um grafo G é sempre um número par. (JESUS, 2018, p. 3)

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2|E| \quad 1$$

- **Exemplo:** O grafo abaixo ilustra as afirmações anteriores como o leitor pode observar.

Figura 3 - Grafo simples



Fonte: SILVA JUNIOR (2021)

O grafo da figura é um grafo simples, nele podemos observar que:

- Os vértices 1 e 2 são adjacentes, bem como os vértices 2 e 3, 3 e 4 e os vértices 4 e 1.
- $\sum_{1}^{4} \deg(v) = 2|4| = 8$.

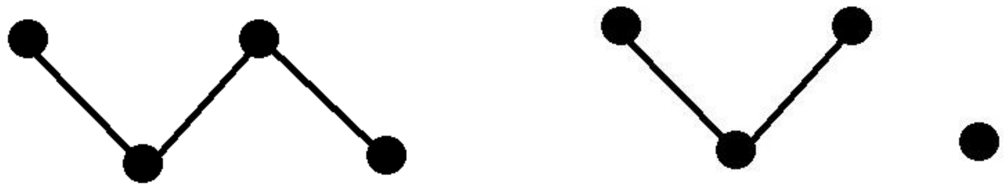
- **Grafo orientado:** temos um grafo orientado ou direcionado quando se definem um sentido para as arestas. E temos um grafo não orientado ou não direcionado quando não há sentido a se tomar nas arestas. (JESUS, 2018, p. 9).

- **Caminho:** P_n é como designamos um caminho, que nada mais é que uma sequência de vértices e arestas, onde esses vértices são adjacentes. Se um grafo for orientado, então chamamos o caminho de caminho orientado ou caminho direto. (JESUS, 2018, p. 6).

- **Caminho mínimo:** esse problema consiste em encontrar o melhor caminho entre dois vértices distintos. Quando temos uma rede, encontrar o menor caminho significa encontrar o caminho que tenha o custo mínimo ou o menor tempo de viagem e assim por diante. (WILHELM, 2013, p. 66).

- **Grafos conexos e grafos desconexos:** Se existir sempre um caminho ligando quaisquer dois vértices, dizemos que este é um grafo conexo. Caso contrário, temos um grafo desconexo. (JESUS, 2018, p. 6).

Figura 4 - Grafo conexo e grafo desconexo



Fonte: SILVA JUNIOR (2021)

3.1 Quanto ao fluxo de redes

Uma rede nada mais é do que um grafo que possui valores associados. Por exemplo, em um grafo onde: $V = \{1, 2, 3\}$ e $E = \{(1,2), (3,1), (2,3)\}$, os vértices podem representar 3 cidades e as arestas são as estradas que ligam essas cidades umas às outras. Podem ser também 3 computadores com cabos de fibra óptica que se conectam entre eles. Enfim, pode-se demonstrar uma variedade de situações através de redes.

Um ponto importante a ressaltar é que nesse artigo não se fará distinção entre grafos e redes, uma vez que um é sinônimo do outro, o que facilitará ao leitor a compreensão do texto. Por isso, considere todos os conceitos sobre grafos supracitados válidos também para redes.

3.2 O algoritmo de Dijkstra

Para resolver a situação-problema aqui apresentada, utilizamos o algoritmo de Dijkstra. Um algoritmo é simplesmente uma receita (finita) para realizarmos alguma tarefa e chegarmos em um objetivo. E o algoritmo utilizado neste trabalho ajuda a encontrar o menor caminho entre dois vértices, se não existir valores negativos nas arestas. O algoritmo de Dijkstra foi inventado em 1956 por um cientista da computação chamado Edsger Dijkstra, algoritmo esse que soluciona o problema do menor caminho.

Antes de qualquer coisa, o leitor precisa entender como o algoritmo funciona, por isso, a seguir, serão mostradas as informações pertinentes ao entendimento do algoritmo.

Antes de partirmos para o entendimento do algoritmo, vamos esclarecer um ponto pertinente à compreensão do mesmo:

> Para recuperar o caminho mais curto até um determinado nó k, guardaremos o nó anterior ao nó k no caminho, que denotamos por p(k), isto é, o caminho de 1 ao nó k é constituído do caminho 1 ao nó p(k) e o arco (p(k), k). Se p(k) = 1. Então o menor caminho que liga o nó 1 ao nó k é constituído tão somente do arco (1,k). (ARENALES, 2006, p. 308).

Algoritmo de Dijkstra

Dados:

G(V,E) : grafo em que V = (1, 2, ... , n)

1 : vértice inicial do caminho

n : vértice final do caminho

c(i,j) : comprimento do arco (i,j) ∈ E (hipótese: c(i,j) ≥ 0)

Saída:

d(n) : menor distância entre o vértice 1 ao vértice n

C : caminho mínimo entre o vértice 1 e o vértice n

Passo 1: Início

R = {1} : inicialmente o vértice 1 é rotulado

NR = {2, ... , n} : os demais vértices não são rotulados

d(1) = 0 : a distância do vértice 1 ao vértice 1 é zero

p(1) = 0 : o vértice 1 é o vértice inicial

Para i ∈ NR

d(i) = +∞ : a distância do vértice 1 aos vértices não rotulados é +∞

p(i) = n + 1 : o vértice 1 não tem predecessor

a = 1 : último vértice incluído em R

Passo 2: Para todo i ∈ NR → d(i) = mínimo {d(i), d(a) + c(a,i)} e p(i) = a, caso d(i) = d(a) + c(a,i).

Se d(i) = +∞, para todo i ∈ NR, então paramos, pois isso implica que não existe caminho do primeiro vértice aos outros em NR.

Se não, determinamos k ∈ NR, onde d(k) = mínimo {d(i), i ∈ NR}. Excluímos o vértice k de NR e incluímos em R e fazemos a = k.

Passo 3: Se a = n (n é o vértice até o qual se deseja saber o caminho mínimo), então recuperamos o caminho mínimo C a partir dos valores armazenados em p(.), iniciamos por $k_1 = p(n)$, em seguida $k_2 = p(k_1)$, até que o primeiro vértice seja atingido. Se a ≠ n, então retornamos ao Passo 2. (ARENALES, 2006, p. 308)

4 Resultados e discussões

4.1 Aplicação

Para desenvolver esse artigo, utilizou-se a situação-problema apresentada a seguir, que foi resolvida através do algoritmo de Dijkstra. A situação foi retirada do capítulo 4 do livro Pesquisa Operacional de Marcos Arenales. O exemplo 4.15 foi modificado para que a presente pesquisa fosse feita.

Ficou assim: Considere uma empresa que produz determinado produto em lotes. A produção é feita em lotes, pois há um custo fixo de preparação cada vez que se inicia a produção, independentemente da quantidade a ser produzida. Admita que se pretenda determinar o plano de fabricação desse produto nos próximos 6 períodos. Considere, também, que há um custo para cada período de produção. As demandas dos produtos em cada um dos 6 períodos são conhecidas e o estoque inicial do produto é nulo. Qual deve ser o plano de produção de custo mínimo desse produto iniciando no período 1 e terminando no período 6, ou seja, qual o melhor plano de produção em 6 períodos que essa empresa poderá ter?

Foram designados os custos de produção de um período para outro na tabela a seguir. Nela podemos ver os custos de produção existentes de um período a outro. Note, na figura 5, que o grafo é direcionado, portanto, o custo de produção do período 1 ao período 2, que é igual a 10, por exemplo, é diferente do custo de produção do período 2 ao período 1, que é $+\infty$.

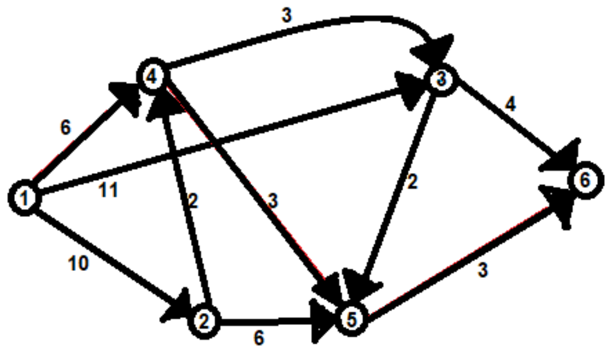
Tabela 1 Custos de produção de um período a outro

Períodos	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	0	10	11	6	+∞	+∞
2	+∞	0	+∞	2	6	+∞
3	+∞	+∞	0	+∞	2	4
4	+∞	+∞	3	0	3	+∞
5	+∞	+∞	+∞	+∞	0	3
6	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	0

Fonte: OLIVEIRA, 2021

Inicialmente, essa situação não parecia gerar um grafo, mas, ao ser analisada a fundo, foi possível perceber que os períodos de 1 a 6 podiam ser transformados em vértices e os custos de produção de um período para outro podiam ser as arestas. O grafo gerado foi o seguinte:

Figura 5 - Grafo gerado pela situação-problema



Fonte: OLIVEIRA, 2021

Foi possível observar que tinha-se um fluxo de redes, isto é, um grafo que contém valores em seus vértices e arestas, então pôde-se determinar qual seria o menor caminho a se percorrer de um vértice a outro, que é o que se pretendia demonstrar aqui. Então, foi determinado o menor caminho que liga o vértice 1 ao vértice 6, em outras palavras: o plano de produção menos custoso indo do período 1 ao período 6.

Para tal, foi utilizado o algoritmo de Dijkstra, o qual possibilitou determinar o desejado. Será descrito agora o passo a passo de como o algoritmo foi utilizado para chegar ao objetivo dessa pesquisa.

À medida que os vértices forem sendo rotulados, o vértice rotulado da vez será colorido de azul, nas figuras que serão postas junto à demonstração.

Passo 1:

No passo 1 foram determinados os dados, a partir do grafo gerado pelo problema, para que se pudesse dar continuidade à resolução do algoritmo.

Dados:

G = (V, E): grafo em que $V = \{1,2,3,4,5,6\}$

1 : vértice inicial do caminho

6 : vértice final do caminho

c(i,j) : comprimento do arco (i,j) ∈ E, tal que o comprimento sempre seja positivo

Temos, então, no grafo em questão: c(i,j)= {c(1,2) = 10, c(1,3) = 11, c(1,4) = 6, c(1,5) = +∞, c(2,1) = +∞, c(2,3) = +∞, c(2,4) = 2, c(2,5) = 6, c(2,6) = +∞, c(3,2) = +∞, c(3,4) = +∞, c(3,5) = 2, c(3,6) = 4, c(4,1) = +∞, c(4,2) = +∞, c(4,3) = 3, c(4,5) = 3, c(4,6) = +∞, c(5,1) = +∞, c(5,2) = +∞, c(5,3) = +∞, c (5,4) = +∞, c(5,6) = 3}

Saída:

R = $\{1\}$

NR = $\{2,3,4,5,6\}$

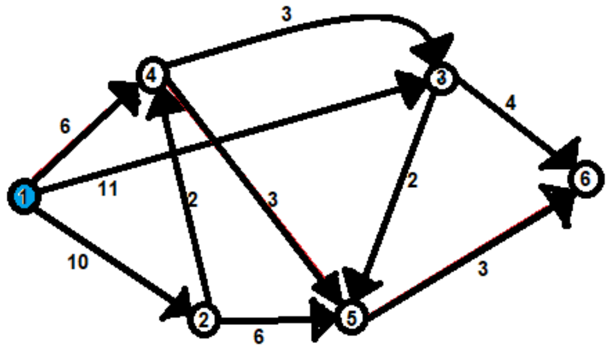
d(1) = 0

p(1) = 0

a = 1

O vértice 1 foi rotulado, portanto o grafo mudou e ficou assim:

Figura 6 - Grafo gerado pela situação-problema com vértice 1 rotulado



Fonte: OLIVEIRA, 2021

Como não se sabe a distância mínima do vértice 1 aos outros vértices, faz-se, inicialmente d(i) = +ꝏ, sendo i = 2,3,4,5,6.

Passo 2:

Foram calculados os caminhos mínimos dos vértices não rotulados.

d(2) = min $\{d(2), d(1) + c(1{,}2)\}$ = min {+ꝏ, 0+10}=min {+ꝏ, 10} = 10 e p(2) = 1

d(3) = min {d(3), d(1) + c(1,3)} = min {+ꝏ, 0+11}=min {+ꝏ, 11} = 11 e p(3) = 1

d(4) = min {d(4), d(1) + c(1,4)} = min {+ꝏ, 0+6}=min {+ꝏ, 6} = 6 e p(4) = 1

d(5) = min {d(5), d(1) + c(1,5)} = min {+ꝏ, 0+ꝏ}=min {+ꝏ, +ꝏ} = +ꝏ

d(6) = min {d(6), d(1) + c(1,6)} = min {+ꝏ, 0+ꝏ}=min {+ꝏ, +ꝏ} = +ꝏ

k = 4

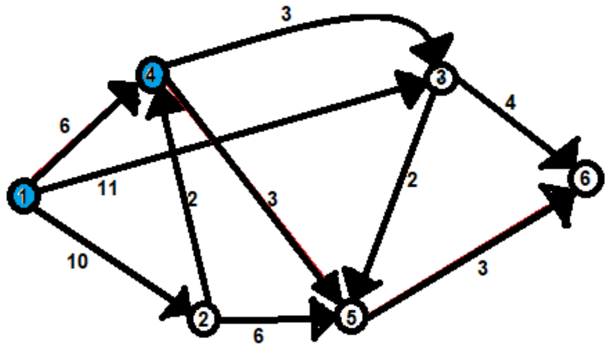
R = {1,4}

NR = {2,3,5,6}

a = 4

Agora tem-se os vértices 1 e 4 rotulados, logo, se tem o seguinte grafo:

Figura 7 - Grafo gerado pela situação-problema com os vértices 1 e 4 rotulados



Fonte: OLIVEIRA, 2021

Passo 3:

Verificou-se se o vértice final não foi rotulado, no caso, o vértice 6. Como ele não está rotulado, o Passo 2 foi refeito.

Passo 2:

Verificou-se novamente o caminho mínimo entre os vértices não rotulados. Porém, com o a = 4, uma vez que este foi o último vértice a ser rotulado.

d(2) = min {d(2), d(4) + c(4,2)} = min {10, 6+∞} = min {10, +∞} = 10

d(3) = min {d(3), d(4) + c(4,3)} = min {11, 6+3} = min {11, 9} = 9 p(3) = 4

d(5) = min {d(5), d(4) + c(4,5)} = min {+∞, 6+3} = min {+∞, 9} = 9 e p(5) = 4

d(6) = min {d(6), d(4) + c(4,6)} = min {+∞, 6+∞} = min {+∞, +∞} = +∞

k = 5 (quando tem-se dois caminhos mínimos iguais, como é o caso dos vértices 3 e 5, escolhe-se um vértice de forma arbitrária)

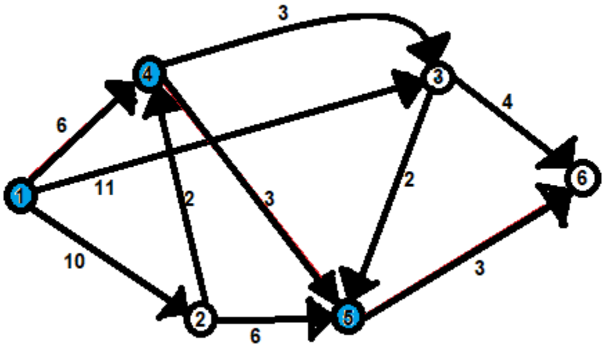
R = {1,4,5}

NR = {2,3,6}

a = 5

Agora os vértices 1, 4 e 5 foram rotulados, logo o grafo ficou assim:

Figura 8 - Grafo gerado pela situação-problema com os vértices 1, 4 e 5 rotulados



Fonte: OLIVEIRA, 2021

Passo 3:

Mais uma vez o vértice final não foi rotulado, portanto, novamente fez-se o passo 2. Dessa vez com a = 5.

Passo 2:

d(2) = min {d(2), d(5) + c(5,2)} = min {10, 9+∞} = min {10, +∞} = 10

d(3) = min {d(3), d(5) + c(5,3)} = min {9, 9+∞} = min {9, +∞} = 9

d(6) = min {d(6), d(5) + c(5,6)} = min {+∞, 9+3} = min {+∞,12} = 12 e p(6) = 5

k = 3

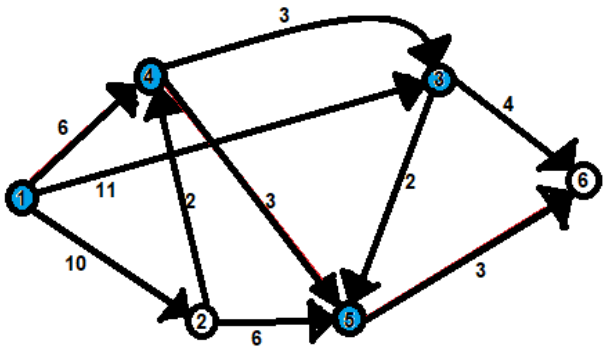
R = {1,3,4,5}

NR = {2,6}

a = 3

Nesse momento, os vértices 1, 3, 4 e 5 foram rotulados, logo, o grafo é:

Figura 9 - Grafo gerado pela situação-problema com os vértices 1, 3, 4 e 5 rotulados



Fonte: OLIVEIRA, 2021

Passo 3:

Ainda não foi rotulado o último vértice, então vamos voltar ao Passo 2 com a = 3.

Passo 2:

d(2) = min {d(2), d(3) + c(3,2)} = min {10, 9+∞} = min {10, +∞} = 10

d(6) = min {d(6), d(3) + c(3,6)} = min {12, 9+4} = min {12, 13} = 12

k = 2

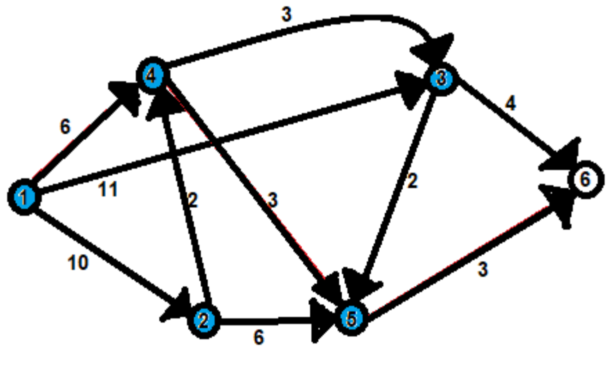
R = {1,2,3,4,5}

NR = {6}

a = 2

Agora, como os vértices 1, 2, 3, 4 e 5 foram rotulados, tem-se esse grafo:

Figura 10 - Grafo gerado pela situação-problema com os vértices 1, 2, 3, 4 e 5 rotulados



Fonte: OLIVEIRA, 2021

Ainda falta rotular o vértice 6, logo, voltamos ao Passo 2 com a = 2.

Passo 2:

d(6) = min {d(6), d(2) + c(2,6)} = min {12, 10+∞} = min {12, +∞} = 12

k = 6

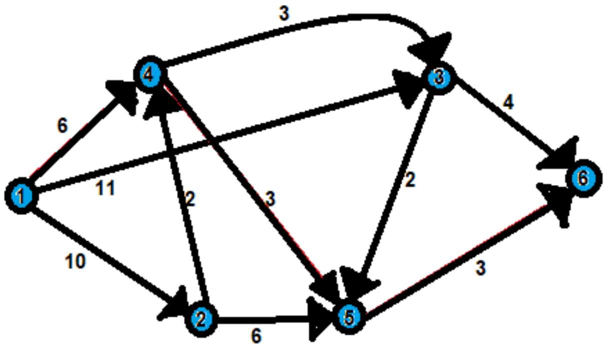
R = {1,2,3,4,5,6}

NR = {∅}

a = 6

Com o vértice 6 rotulado, temos o seguinte grafo e partimos para o Passo 3.

Figura 11 - Grafo gerado pela situação-problema com todos os vértices rotulados



Fonte: OLIVEIRA, 2021

Passo 3:

Agora que rotulou-se todos os vértices, inclusive o 6, o qual era o objetivo, o passo seguinte foi realizar o Passo 3, que consistiu em recuperar o caminho mínimo C a partir dos valores que foram armazenados em p(k). Portanto:

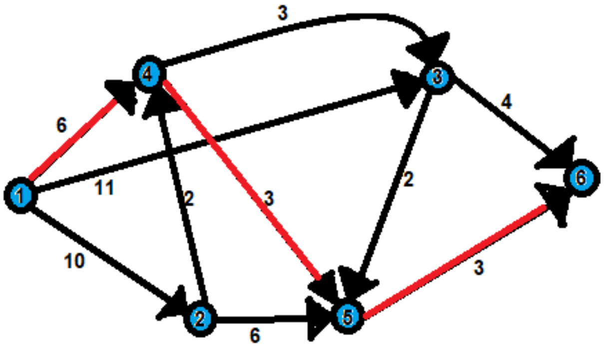
p(6) = 5, p(5) = 4, p(4) = 1, p(3) = 4, p(2) = 1 e p(1) = 0

Como p(2) = p(4) = 1 e p(3) = p(5) = 4, utilizou-se apenas o valor armazenado que corresponde ao menor caminho.

Com isso, tem-se C = {(1,4), (4,5), (5,6)} como caminho mínimo do vértice 1 ao vértice 6.

Assim, concluiu-se que o menor custo de produção saindo do período 1 e chegando no período 6 será de 12 reais. Como mostra a figura a seguir.

Figura 12 - Grafo final com o caminho mínimo do vértice 1 ao 6 destacado



Fonte: OLIVEIRA, 2021

5 Considerações finais

O presente artigo mostrou, através de uma aplicação, como a Teoria dos Grafos pode ser útil em nosso cotidiano. Foi mostrado como se pode utilizar um grafo valorado (rede) para resolver um problema que, à primeira vista, parecia ser de difícil solução.

A situação-problema aqui demonstrada foi a de uma empresa que produz determinado produto em lotes em determinados períodos. O problema consistia em descobrir qual o menor custo de produção partindo do primeiro período até o último, sendo que foram definidos 6 períodos.

Para a resolução desse problema, utilizou-se o algoritmo de Dijkstra, comumente usado em computadores, através de códigos, na área de Tecnologia da Informação, porém, o algoritmo aqui foi usado de forma manual, uma vez que não se tinham os recursos necessários à primeira opção. De certa forma, o algoritmo se mostrou bastante capaz de analisar o grafo e, com ele, descobriu-se o caminho mínimo que liga o vértice 1 ao vértice 6.

Primeiro, foram coletados os dados necessários à resolução do problema através do algoritmo, logo depois todos os cálculos necessários foram realizados e, no fim, chegou-se ao resultado esperado.

Através dessa aplicação, foi possível observar como a Teoria dos Grafos pode ser fundamental em algumas situações corriqueiras, onde podemos estabelecer ligações entre determinadas coisas. Sendo assim, concluímos que os objetivos dessa pesquisa foram alcançados e espera-se que o leitor possa ter tido uma ampla visão da Teoria dos Grafos, bem como da sua importância.

O objetivo aqui era demonstrar como a Teoria dos Grafos ajuda em problemas do cotidiano, para isso utilizou-se uma aplicação onde foi demonstrada a veracidade da afirmação através de um algoritmo computacional, mas que no presente artigo foi usado manualmente. Com isso, podemos concluir que a Teoria dos Grafos pode ser útil à vida.

Essa estrutura vem mostrando seu papel e cada vez mais vem ganhando ênfase dentro da área das ciências exatas. Usada até para gerar mais interesse pela disciplina de Matemática no Ensino Médio, a Teoria dos Grafos tem um papel muito importante na formação acadêmica de qualquer aluno, uma vez que ela ajuda a solucionar problemas de otimização, não só isso, como também é possível usá-la em várias áreas dentro do ramo não só de ciências exatas, como também em outras ciências, como a química, entre outras.

A Teoria dos Grafos alcança notoriedade, é útil e necessária para simplificar o dia-a-dia, bem como desenvolver as capacidades de pensar e agir da pessoa que se interessa por essas estruturas que são estritamente importantes.

6 Referências

ARENALES, Marcos Nereu, **Pesquisa Operacional**, 2006. 544 páginas. Elsevier; 1ª edição (24 novembro 2006).

FERREIRA, Verônica Craveiro de Santana, **De grafos a emparelhamentos: uma possibilidade viável de encantar-se com a matemática**, 2014. São Cristóvão-SE, 2014.

FONSECA, João José Saraiva da, **Metodologia da pesquisa científica**, 2002. 120 páginas. Fortaleza: UEC, 2002.

GERHARDT; SILVEIRA, Tatiane Engel; Denise Tolfo, **Métodos de pesquisa**, 2009. 120 páginas. Editora UFRGS - Porto Alegre, 2009.

N. ABREU, R. DEL-VECCHIO, V. TREVISAN, C. VINAGRE, **Teoria espectral de grafos: uma introdução**, In: Colóquio de Matemática da Região Sul, III, 2014, Florianópolis. Minicurso. Região Sul, 2014. (p. 13, 28)

SOUZA, Aldemir Lima de, **Teoria dos Grafos e Aplicações**, 2013. 88 páginas. (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, 2013.

JESUS, José Vitor Oliveira de, **Introdução à teoria espectral dos grafos**, 2018. 140 páginas. (Mestrado em Matemática) - Universidade da Madeira, Funchal (Portugal), 2018.

WILHELM, Volmir Eugênio, **O problema de caminho mínimo**, 2013. Departamento de Engenharia de Produção –UFPR.