UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
LICENCIATURA EM MATEMATICA

ALAIANE ARAGÃO DE OLIVEIRA

PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA NO ENSINO BÁSICO EM UMA ESCOLA PÚBLICA DA CIDADE DE MANAUS-AM

MANAUS, MARÇO
2022

ALAIANE ARAGÃO DE OLIVEIRA

PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA NO ENSINO BÁSICO EM UMA ESCOLA PÚBLICA DA CIDADE DE MANAUS-AM

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas TCC I e TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador(a): Profa. Dra. Nadime Mustafa Moraes

MANAUS, MARÇO
2022

TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DO CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **ALAIANE ARAGÃO DE OLIVEIRA.**

Em 18 de maio de 2022, às 19:00h, na sala Ilsa Honório na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Dr. Nadime Musatafa Moraes, Dra. Silvia Cristina Belo e Silva e Me. Ana Maria Reis, o(a) aluno(a) **ALAIANE ARAGÃO DE OLIVEIRA** apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado: "**PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA NO ENSINO BÁSICO EM UMA ESCOLA PÚBLICA DA CIDADE DE MANAUS-AM"** A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do referido trabalho, com o conceito 8,0 divulgando o resultado ao aluno e demais presentes.

Keelisângela Ramos da Costa
____
Presidente da Banca Examinadora

Nadime Mustafa Moraes
____
Orientador (a)

Silvia Cristina Belo e Silva
____
Avaliador 1

Ana Maria Reis
Avaliador 2

Alaiane Aragão de Oliveira
____
Aluno

DEDICATÓRIA

À minha família, meu maior suporte.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me dado força para chegar até aqui e poder alcançar este grande objetivo na minha vida.

Também agradeço a minha família, fonte de apoio e inspiração.

À minha professora-orientadora, que incansavelmente soube me compreender e apoiar, mesmo em meio a todas as situações vividas, nunca deixou de me apoiar e acreditar na minha capacidade de alcançar este resultado.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

Buscou-se neste trabalho analisar uma proposta de ensino de Geometria Esférica no ensino médio por meio do software Geogebra, em uma turma do 2º ano do ensino médio, de uma escola pública na cidade de Manaus-AM. Para tanto, dentre outros objetivos, buscou-se apresentar uma síntese da história da Geometria, especialmente a problemática do quinto postulado de Euclides, e também da origem das Geometrias não-Euclidianas por meio das mais significativas tentativas de demonstração do quinto postulado. Também se buscou introduzir os conceitos essenciais da Geometria Esférica, demonstrando alguns de seus principais resultados. Além disso, foi elaborado e aplicado um conjunto de atividades fundamentadas no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, utilizando o software Geogebra, no intuito de introduzir os conceitos essenciais da Geometria Esférica. Como resultado, constatou-se que os alunos obtiveram uma aprendizagem significativa de Geometria Esférica através de atividades desenvolvidas através do uso do software Geogebra, fundamentadas no modelo de van Hiele, evidenciando que essa é uma boa estratégia de introduzir esse conteúdo no ensino básico.

Palavras-Chave: Matemática; Geometria Esférica; Software Geogebra; Ensino-Aprendizagem

Sumário

INTRODUÇÃO

No exercício da docência, frequentemente os professores são questionados acerca tanto da origem quanto da função de determinados conceitos matemáticos. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, 1998), a importância do ensino de Geometria ensino básico é baseada no fato de seus conceitos promoverem ao sujeito a chance de refletir, de forma alternativa, acerca de diferentes campos.

> Situações quotidianas e o exercício de diversas profissões, como a engenharia, a bioquímica, a coreografia, a arquitetura, a mecânica etc., demandam do indivíduo a capacidade de pensar geometricamente. Também é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno. (BRASIL, 1998, p.122)

Mesmo que circunstâncias do dia a dia tenham uma grande relevância no tocante ao entendimento dos conceitos por parte dos estudantes, os PCNs (BRASIL, 1998) enfatizam o valor de esta metodologia não ser a única utilizada para a introdução de novos conteúdos.

> Duas forças indissociáveis estão sempre a impulsionar o trabalho em Matemática. De um lado, o permanente apelo das aplicações às mais variadas atividades humanas, das mais simples na vida cotidiana, às mais complexas elaborações de outras ciências. De outro lado, a especulação pura, a busca de respostas a questões geradas no próprio edifício da Matemática. A indissociabilidade desses dois aspectos fica evidenciada pelos inúmeros exemplos de belas construções abstratas originadas em problemas aplicados e, por outro lado, de surpreendentes aplicações encontradas para aa mais puras especulações. (BRASIL, 1998, p. 24)

No contexto histórico, pode-se notar que se priorizam, no ensino básico, o ensino da Álgebra e da Aritmética, ao passo que o ensino de Geometria, na maior das vezes, é relegado a um segundo plano, sobretudo em escolas públicas. Pode-se notar também que, da mesma maneira que há um nítido descaso do ensino da geometria, há uma visível falta de preparo da maioria dos docentes de matemática no que se refere ao ensino deste conteúdo. De acordo com Pavanello (1993), o indicativo disto mostra-se na grande busca de docentes por cursos de geometria ofertados por universidades, em convênio ou não com as Secretarias de Educação.

Pavanello ainda afirma que:

> A inquietação com o abandono da geometria – abandono este que é, na verdade, um fenômeno mundial – parece estar ligada a questões de ordem educacional. O estudo da geometria não foi considerado, durante séculos, como indispensável à formação intelectual dos indivíduos e ao desenvolvimento da capacidade de hábitos de raciocínio? Privar indivíduos deste estudo não acarretaria prejuízos à sua formação? A ausência de um trabalho com a geometria não prejudicaria uma visão integrada da matemática? (PAVANELLO, 1993, p. 7)

Pode-se notar que no ensino básico há não somente um segregamento entre os conteúdos de aritmética, álgebra e geometria; como também estes são ensinados de modo separado e por docentes diferentes. Partindo desse ponto, o conteúdo mostrado passa a ser abordado de maneira estritamente abstrato, sem que ocorra nenhuma atenção às aplicações práticas. Certamente, o ensino da Geometria Euclidiana, quando acontece, é realizado partindo-se da reprodução de processos mecanizados o que contribui para a não compreensão dos processos realizados. O ensino da Matemática no ensino básico, em especial da Geometria, infelizmente, não é incentivado de modo adequado, criando dessa maneira a falta de interesse e a não aceitação de grande parte dos estudantes.

No entanto, o escopo deste estudo está longe de ser o levantamento da problemática do ensino da Matemática no Brasil, mas sim destacar a relevância do ensino tanto da Geometria Euclidiana quanto das Geometrais não-Euclidianas, principalmente da Geometria Esférica.

Pode-se considerar que o estudo dos conteúdos relacionados às Geometrias não-Euclidianas, principalmente a Geometria Esférica, favorece o processo de aprendizagem geométrico dos estudantes do ensino básico. A Geometria Esférica, que é um exemplo de Geometria não-Euclidiana, é a geometria mais próxima da realidade do ser humano, uma vez que este vive num planeta cujo formato se assemelha a uma esfera. Isso faz com que estudar Geometria Esférica seja relevante para que os estudantes compreendam os fenômenos que ocorrem em suas vidas.

Essa Geometria abre um gama de possibilidades tanto para o entendimento dos próprios conceitos geométricos quanto para a aplicação desses conceitos em vários campos, como navegação, cartografia e etc, e faz com que o estudante veja e compreenda melhor o mundo onde vive. Portanto, acredita-se que a introdução deste conteúdo no ensino básico possa consolidar a aprendizagem da Geometria e torná-la mais estimulante, pois pode exibir o quanto a Matemática está presente no dia a dia.

Neste estudo serão apresentadas propostas de atividades fundamentadas na metodologia de elaboração do pensamento geométrico de van Hiele e do uso de ferramentas computacionais no ensino básico a respeito da inserção do conceito de Geometrias não-Euclidianas e dos conteúdos da Geometria Esférica.

A seguir será mostrada a organização deste trabalho. No capítulo 1 será realizada uma exposição sintética acerca da história da Geometria e serão abordadas as principais tentativas de demonstração do quinto postulado que deram origem às Geometrias não-Euclidiana; em seguida, serão mostrados alguns conceitos essenciais da Geometria Esférica, alguns de seus resultados, como por exemplo o Teorema de Girard. No capítulo 2, destinado a exploração da metodologia dessa pesquisa, será mostrado o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele que foi adotada como referencial teórico e metodológico para esse estudo; bem como será apresentada uma proposta de sequência didática que visa introduzir a Geometria Esférica a estudantes do ensino básico, sendo todas elas desenvolvidas para fazer uso do software de Matemática dinâmica Geogebra. No capítulo 3 serão apresentados os resultados e análises da aplicação da sequência didática. Por fim, será apresentada na última parte deste estudo a conclusão dessa pesquisa.

CAPÍTULO 1

1.1 GEOMETRIAS EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANA

Neste capítulo, busca-se apresentar uma síntese da história das geometrias euclidiana e não-Euclidiana. Mostrando sua origem e desenvolvimento, principais matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento.

1.2 A origem da Geometria

Ao longo dos últimos séculos do segundo milênio a. C aconteceram várias modificações na esfera política e econômica do planeta que, por outro lado, ocasionaram a diminuição da influência dos babilônios e gregos em vários campos, como a Matemática. Nesse contexto, os gregos assumiram a liderança no desenvolvimento da Geometria. Para esses, era necessário que fossem determinadas as propriedades geométricas não por procedimentos experimentais, mas por argumentos lógicos.

De acordo com Eves (2011), os dados mais relevantes concernentes à Geometria desse tempo são oriundos do *Sumário Edemiano*, de Proclus, durante o século V a. C., próximo de quinhentos anos do começo do desenvolvimento da Matemática grega. Assim, ele passou a ter contato com um variado conjunto de estudos históricos que se perderam com o tempo, excetuando-se poucos que haviam sido anexados por ele e outros estudiosos.

No início, de acordo com o *Sumário Eudemiano*, a Geometria grega se originou primeiramente com o estudo de Tales de Mileto, registrado na primeira metade do século VI a.C. Os estudos preliminares relativos à Geometria demonstrativa são relacionados a Tales, da mesma maneira o uso de métodos dedutivos na geometria.

O filósofo e matemático Pitágoras, nascido em 572 a.C. na ilha de Egeia de Samos, é muito citado no *Sumario Edemiano*. Ele foi indicado como herdeiro da metodização da Geometria da Geometri começada por Tales. O período posterior à sua residência no Egito, quando regressa a Samos, Pitágoras precisou se mudar para Crotona, colônia grega, no sul da Itália, devido ao domínio do tirano Polícrates. Nessa localidade, ele estabeleceu a prestigiada escola pitagórica, uma organização criada por misticismo e aplicada no estudo da Filosofia, Matemática e entre outros.

Nos dois séculos posteriores ao estabelecimento da escola pitagórica, produziram-se uma ampla quantia de conteúdos matemáticos. Ao longo desse tempo, a álgebra geométrica grega se desenvolveu grandemente, sobretudo no que se refere à teoria sobre proporções. Esta teoria era abastadamente plena e utilizada para deduzir propriedades de figuras planas, contudo restrita às grandezas comensuráveis.

Os pitagóricos foram surpreendidos pela evidenciação das grandezas incomensuráveis, acarretando um impasse de assentimento, uma vez que, até aquele momento, todo o saber matemático era fundamentado em números racionais.

Segundo Eves (2011), naquele tempo, diversas tentativas de demonstração lógica da Matemática foram feitas, especialmente da Geometria. Contudo, o trabalho de Euclides, desenvolvido em torno de 300 a.C. e denominada *Os Elementos*, tornou-se o primeiro a possuir um caráter dedutivo formal. Este trabalho é constituído de 13 livros possuindo um total de 465 proposições e reuniu todo o saber matemático existente até aquele momento, tornando-se a matriz da matemática moderna.

Nesse intervalo entre Tales e Euclides ocorreram vastas melhorias na Matemática grega. Naquele tempo, significativa parcela da Geometria de curva foi desenvolvida, motivada por incessantes tentativas de solucionar três famosos problemas geométricos: a duplicação do cubo, o problema da trissecção e a quadratura do círculo.

1.3 A Geometria de Euclides

Depois de vários eventos de ordem política e territorial, em torno de 306 a.C., o governo do Egito foi assumido por Ptolomeu, que elegeu Alexandria sua nova capital. Tendo o intuito de trazer pensadores influentes para sua cidade, ele estabeleceu a prestigiada Universidade de Alexandria. Objetivando construir um grupo de intelectuais de alto escalão para a universidade, foram convidados por Ptolomeu vários matemáticos célebres, dentre esses Euclides.

De acordo com Eves (2011), acerca da vida pessoal de Euclides quase nada se sabe, porém crê-se que ele era natural de Atenas. Há grandes sinais de que o matemático tenha sido professor-fundador da prestigiada Escola de Matemática da Universidade de Alexandria. Proclus e Papus de Alexandria são os responsáveis por aquilo que se sabe acerca de Euclides, devido aos registros que fizeram em *Os elementos e os dados de Euclides*. Sobre a formação matemática de Euclides, provavelmente ocorreu na escola platônica de Atenas. Embora tenha feito muitos estudos, Euclides se tronou famoso de seu mais célebre trabalho: *Os Elementos*.

1.3.1 Os Elementos, de Euclides

Este trabalho do matemático grego é constituído de 465 proposições dispostas em 13 livros. Diferentemente do que se pode pensar, a princípio, este trabalho não trata apenas de tópicos relativos à Geometria, mas também de tópicos relacionados a diversos campos da Matemática.

De acordo Roque (2012), os livros que constituem o trabalho *Os Elementos* estão estruturados desta maneira:

Tabela 1 - Estrutura da obra Os Elementos, de Euclides

Livro I	Os fundamentos da geometria plana
Livro II	Álgebra geométrica
Livro III	Teoria da circunferência
Livro IV	Figuras inscritas e circunscritas
Livro V	Teoria das proporções abstratas
Livro VI	Figuras geométricas semelhantes e proporcionais
Livro VII	Fundamentos da teoria dos números
Livro VIII	Continuação de proporção e teoria dos números
Livro IX	Teoria dos números
Livro X	Classificação dos incomensuráveis
Livro XI	Geometria dos sólidos
Livro XII	Medição de figuras
Livro XIII	Sólidos regulares

Embora os tópicos matemáticos apresentados em *Os Elementos* sejam de grande relevância, decerto, a maneira formal com que eles são exibidos é um dos motivos que atribuem enorme valor à obra como um todo. Esse trabalho influenciou vários matemáticos e se transformou em um modelo da Matemática contemporânea.

1.3.2 Os axiomas e postulados de Euclides

Segundo Eves (2011), a maioria dos gregos distinguiam axiomas e postulados. Pode-se observar os três conceitos principais desses termos a seguir:

I. Um axioma é uma assertiva admitida como autoevidente; um postulado é uma elaboração de algo tido como autoevidente; dessa forma, os axiomas e os postulados estão entre si, em sua maioria, como os teoremas e os problemas de construção.

II. Um axioma é uma suposição comum a todas as ciências, à medida que um postulado é uma suposição inerente a uma ciência especifica em estudo.

III. Um axioma é uma suposição de algo que é, simultaneamente, evidente e admissível para o aluno; um postulado é uma suposição de algo que não é nem absolutamente admissível para o aluno.

Não se sabe sobre a origem que motivou a elaboração das asserções como postulados e axiomas na Geometria Euclidiana, propostas no Livro I de *Os Elementos*. Contudo, há indícios que Euclides tenha feito uso do segundo conceito mencionado acima, e depois, julgado axiomas como princípios comuns de sua teoria, e postulados relativos à princípios conectados à Geometria. Ainda segundo Eves (2011), os cinco postulados e axiomas de Euclides são:

Postulados:

P1. É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.

P2. É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.

P3. É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

P4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.

P5. Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Axiomas:

A1. Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.

A2. Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais.

A3. Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais.

A4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.

A5. O todo é maior do que a parte.

Partindo-se desses postulados e axiomas, o matemático grego conseguiu deduzir as 465 proposições de seus 13 livros fazendo uso de ideias lógicas e demonstrações formais.

Contudo, em razão do enunciado do quinto postulado ser pouco nítido, a aceitação desse não ocorreu facilmente e ocorreram várias tentativas de demonstração do mesmo como se ele fosse um teorema, isto é, ocorreu de se crer que o quinto postulado era uma derivação dos demais axiomas e postulados e, portanto, foram feitas inúmeras tentativas de demonstrá-lo por muito tempo.

1.4 Os esforços relevantes de demonstração do quinto Postulado

As diligências para demonstrar o quinto postulado de Euclides partindo dos outros postulados e axiomas mantiveram diversos matemáticos ocupados por aproximadamente dois milênios, ocasionando, portanto, um desenvolvimento relevante na Matemática. Ocorreram várias melhorias nessas tentativas de demonstração, todavia, ao término todos esses empreendimentos fundamentaram-se em suposições implícitas equivalentes ao quinto postulado.

Em seguida, de acordo com Eves (2011), Gomes (2014) e Roque (2012), mostraremos uma síntese das tentativas de demonstrações mais conhecidas do quinto postulado.

1.4.1 Girolamo Saccheri (1667- 1733)

Girolamo Saccheri, jesuíta italiano, foi quem publicou pela primeira vez um trabalho matemático sobre o quinto postulado de Euclides. Existem poucos dados relacionados à sua vida pessoal, porém é sabido que depois da conclusão de seu noviciado, ele usou grande parte de sua história no exercício da docência.

O matemático italiano ao fazer a leitura da obra *Os Elementos*, de Euclides, fascinou-se com os métodos de demonstrações por absurdo usados no trabalho euclidiano e, tempos depois, fez a publicação de seu trabalho *Lógica Demonstrativa*, no qual utilizou os métodos de demonstração que Euclides fez uso, da mesma maneira como a utilização da lógica formal.

O método de redução ao absurdo foi utilizado por Saccheri em seu trabalho do quinto postulado, redigindo a obra *Euclides* sem qualquer imperfeição, publicado apenas depois de seu falecimento no ano de 1733. Nessa obra, as 28 proposições iniciais de *Os Elementos* são admitidas, sendo plenamente independentes do quinto postulado. Desde então passou a trabalhar começando a partir de um quadrilátero ABCD com diagonais AD e BD, tais que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são dois ângulos retos e AD e BC são congruentes (Figura 1). Este quadrilátero se tornou muito famoso e foi batizado, mais tarde, de “Quadrilátero de Saccheri”.

Figure 1 - Quadrilátero de Saccheri

Fonte: arquivo da autora.

Quando se traça as diagonais BD e AC e utilizar determinadas proposições de Euclides (dentre elas os teoremas de congruência de triângulos), Saccheri demonstrou que os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são congruentes. Desse modo, ficou restando ao matemático investigar três hipóteses para esses ângulos:

I. Hipótese de os ângulos serem agudos;

II. Hipótese de os ângulos serem retos;

III. Hipótese de os ângulos serem obtusos.

De acordo com Eve (2011), o programa de trabalho de Saccheri era constituído de buscar um absurdo aos levar em consideração as hipóteses de os ângulos serem agudos ou obtusos. Desse modo, a hipótese de os ângulos serem retos deveria ser válida. Ao admitir de maneira implícita a infinitude da reta, Saccheri eliminou a hipótese do ângulo obtuso, porém o caso relacionado à hipótese do ângulo agudo apresentou-se mais complexo.

Nesse contexto, o matemático fez uso das noções obscuras de conceitos matemáticos utilizados na sua demonstração e, assim, a contradição vista foi forçada. Sem que notasse, na tentativa de demonstração do quinto postulado ele obteve resultados importantes para as Geometrias não-Euclidianas.

1.4.2 Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

O Matemático suíço Johann Heinrich Lambert nasceu em 1728 e publicou um trabalho parecido ao de Saccheri, algum tempo depois da morte deste, intitulado *Teoria das Paralelas*. Neste estudo, ele considerou que um quadrilátero

ABCD, posteriormente chamado de “Quadrilátero de Lambert”, em que os ângulos Â, B̂ e Ĉ são retos (Figura 2).

Figure 2 - Quadrilátero de Lambert

Fonte: arquivo da autora.

Da mesma maneira que Saccheri, Lambert também levou em consideração as três hipóteses para o quarto ângulo D:

I. Hipótese do ângulo agudo;

II. Hipótese do ângulo reto;

III. Hipótese do ângulo obtuso.

O matemático suíço provou que paras as três hipóteses, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que, igual ou maior que dois ângulos retos, que são equivalentes às hipóteses 1, 2 e 3, respectivamente. Ele chegou a resultados, substancialmente, avançados se contraposto aos obtidos por Saccheri. Do mesmo modo que Saccheri conseguiu excluir a hipótese do ângulo obtuso assim o fez Lambert, contudo, seus resultados acerca da hipótese do ângulo agudo da mesma forma não foram precisos.

1.4.3 John Playfair (1748-1819)

Nascido na Escócia em 1748, John Playfair recebeu educação domiciliar de seu pai até o princípio de sua adolescência, momento em que fora encaminhado à Universidade de St Andrews, lugar em que obteve reverência e consideração de docentes em razão da sua aptição matemática. Alguns anos depois, o matemático escocês obteve a função de docente na Universidade de Edimburgo e, de acordo com Gomes (2014), em 1795, alcançou a equivalência do quinto postulado. Indubitavelmente, tal equivalência é a mais renomada e mais fácil de entender. Frequentemente denominada como “Postulado das Paralelas”, foi publicada em seu estudo denominado *Elementos de Geometria* em 1795. Mostra-se em seguida tal equivalência, que para uma demonstração dessa, verificar Eves (2011):

Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

1.4.4 Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

Adrien-Marie Legendere, nascido em 1752, tornou-se um dos matemáticos mais relevantes de sua época. Ele colaborou para vários campos como Estatística, Teoria dos Números e Equações Diferenciais.

Seus esforços para provar o quinto postulado aparecem em seu trabalho Os Elementos de Geometria, sendo o mais influente de sua época e propiciando a popularização do problema do Postulado das Paralelas.

Na tentativa de provar o quinto postulado, Legendre assumiu que a soma dos ângulos internos de um triângulo fosse menor, igual, ou maior que dois ângulos retos. Ele conseguiu facilmente eliminar a terceira hipótese, entretanto, mesmo com diversas tentativas não foi possível eliminar a primeira hipótese.

1.5 GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

O quinto postulado de Euclides, supracitado, não foi aceito plenamente desde a sua publicação em *Os Elementos*, já que seu enunciado não foi considerado intuitivo, assim como, pela razão dele fazer uso desse postulado somente na 29ª proposição. Por muito tempo, várias tentativas de demonstração desse postulado foram feitas, como as supracitadas. Essas se deram no começo do século XIX e conduziram ao aparecimento de novas geometrias (contemporaneamente chamadas de Geometrias não-Euclidianas) aproximadamente dois mil anos depois do começo da Geometria Euclidiana.

Os pioneiros que, efetivamente, desconfiaram que o quinto postulado realmente era independente dos outros, isto é, que não se poderia demonstrar o quinto postulado partindo dos demais, foram Carl Gauss, Janos Bolyai e Nicolai Lobachevsky; fazendo uso da equivalência de Playfauir eles lidaram com estas hipóteses:

I. Por um ponto fora de uma reta, é possível traçar mais do que uma reta paralela à reta dada.

II. Por um ponto fora de uma reta, não é possível traçar nenhuma reta paralela à reta dada.

Será exposto em seguida uma síntese histórica do aparecimento das Geometrias não-Euclidiana.

A organização em seguida está fundamentada no ano em que nasceram os matemáticos Gauss, Bolyai, Lobachevsky e Riemann.

1. Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Nascido em Brunswick em 1777, Carl Friedrich Gauss era filho de trabalhador do campo, que não motivava a se educar. Todavia, ainda que não tenha conseguido estudar, sua mãe o incentivava a fazê-lo. Gauss se apresentou um menino talentoso e, assim, obteve muitos olhares e motivações. De acordo com Eve (2011), considera-se este matemático como sendo o maior de todos do século XIX e, ao lado de Isaac Newton e Arquimedes, um dos melhores de toda a história. Gauss colaborou significativamente em vários campos como Álgebra, Geometria, Astronomia, entre outras.

Existem sinais de que Gauss tenha sido um dos pioneiros a lidar com Geometrias não-Euclidianas. De fato, acredita-se que ele começou a lidar com Geometrias não-Euclidianas aos 15 anos, isto é, em 1792, todavia não há nenhuma publicação dele nesse campo. A razão para Gauss divulgar seus achados do campo está relacionada a seu excessivo perfeccionismo. O matemático só divulgou seus trabalhos terminados e, desse modo, não disseminou seus resultados conseguidos acerca de Geometrias não-Euclidianas. Somente depois de seu falecimento que foram encontrados alguns de resultados obtidos por ele.

2. Janos Bolyai (1802-1860)

Extremamente influenciado pelo pai, Farkas Bolyai, que era docente de Matemática e tinha uma relação próxima de coleguismo com Gauss, Janos Bolyai foi um oficial Húngaro; desde criança, este apresentou grande entusiasmo pelo Postulado das Paralelas.

Bolyai, em 1823, avisou seu pai por meio de uma carta sobre seu interesse com as recentes pesquisas acerca do Postulado das Paralelas; chegando a declarar que “a partir do nada, eu criei um mundo totalmente novo” e intitulou sua teoria de “ciência absoluta do espaço”. Em contestação, seu pai buscou aconselhá-lo a abandonar tal ideal em razão da alta complexidade da empreitada. Segundo Greenberg (2001, p. 161), em um dos registros endereçados a Bolyai, seu pai afirma: “Você não deve tentar essa abordagem das paralelas. Eu sei o caminho para o final. Eu atravessei uma noite sem fundo, na qual extingui toda a luz e alegria da minha vida. Eu suplico a você, deixe a ciência das paralelas sozinha...”. No entanto, Bolyai não abandonou e, em 1829, terminou o estudo e se tornou possível sujeitar a seu pai.

A divulgação de seus resultados se deu em 1832, no formato de um apêndice em um estudo de Farkas, intitulado *O Tentamen*. Farkas encaminhou, em seguida, o estudo de Bolyai para Gauss analisar e conseguiu como retorno que o companheiro ficara impressionado com o estudo, porém que obtivera tais resultados tempos antes. Mesmo Gauss não publicando estudos com o mesmo assunto dos de Bolyai, há indícios de que ele conseguiu alcançar realmente tais resultados antes, como fora supracitado.

3. Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856)

Em 1793 nasceu Nicolai Ivanovitch Lobachevsky, na Rússia, onde ascendeu acadêmica e profissionalmente, lugar em que lecionou e assumiu a função de reitor na Universidade de Kazan. Seu estudo pioneiro foi acerca de Geometrias que não conseguiam satisfazer o quinto postulado de Euclides, sendo divulgado aproximadamente em 1830 no *Kasan Bulletin*, alguns anos antes do estudo de Bolyai, e mesmo sem ter ciência do estudo deste. Todavia, esse estudo quase não teve prestígio na Rússia e, por ter sido redigido em russo, quase não teve importância em outras nações.

O estudo de Lobachevsky obteve glória apenas depois de seu falecimento e a Geometria não-Euclidiana que ele desenvolveu ficou denominada de “Geometria de Lobachesvky” e atualmente é chamada de Geometria Hiperbólica.

> A criação da geometria de Lobachevsky não só libertou a geometria como também teve um efeito semelhante com a Matemática como um todo. A Matemática despontou como uma criação arbitrária do espírito humano e não como algo necessariamente. (EVES, 2011, p. 545)

Bolyai e Lobachevsky conseguiram obter resultados muito parecidos.

4. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Nascido na Alemanha, Riemann começou sua educação na universidade onde Gauss era professor; esse colaborou em vários campos da Matemática, como a Geometria e a Aritmética, fazendo de uma linguagem matemática de extremo rigor. No ano de 1854, fazendo uso da geometria diferencial desenvolvida por Gauss para o trabalho de curvas, Riemann fez uma proposta de generalização da Geometria.

O estudo que ele desenvolveu foi conduzido por uma vertente oposta a utilizada por Bolyai e Lobaschevsky, uma vez que não era considerada a validade ou não do quinto postulado. Acerca da generalização de Rienmann se recomenda verificar Greenberg (2001).

De acordo com Eves (1994, p. 47):

> Pouca atenção se deu então ao assunto, até 1866, quando G. F. Benhard Riemann sugeriu uma geometria em que duas retas nunca são paralelas e a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois ângulos retos. A geometria de seus predecessores era sintética. A de Riemann era intimamente ligada à teoria de superfícies.

O matemático Félix Klein, em 1871, intitulou as Geometrias de Bolyai e Lobaschevsky, a de Euclides e a de Riemann, respectivamente, de Geometrias Hiperbólica, Parabólica e Elíptica.

De acordo com Ribeiro (2012), a Geometria Hiperbólica considera todos os postulados da geometria euclidiana, com exceção do quinto postulado ou postulado das paralelas, que é substituído pelo postulado hiperbólico ou Axioma de Bolyai-Lobatchevsky que afirma: por um ponto exterior a uma reta passa mais de uma paralela.

Segundo Eves (2011), Riemann mostrou que se fosse descartada a infinitude da reta, mas admitindo-se que a reta é ilimitada e com outros ajustes necessários, esta outra geometria torna-se totalmente consistente e acima de tudo, muito útil. Esta geometria, anos depois recebeu o nome de Geometria Elíptica.

1.6 A GEOMETRIA ESFÉRICA

Pode-se considerar a Geometria Esférica, uma Geometria não-Euclidiana, como sendo o tipo mais comum da Geometria Elíptica. Em seguida, será mostrado os resultados mais relevantes desta Geometria. Da mesma maneira serão comparados os mais importantes conceitos e proposições da Geometria Esférica e da Geometria Euclidiana.

Para um melhor entendimentos dos conceitos fundamentais da Geometria Esférica serão relembrados, num primeiro momento, alguns conceitos fundamentais. Para um aprofundamento do assunto, verificar Coutinho (2001).

- Esfera: é o lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes a um mesmo ponto, intitulado centro da esfera. Denomina-se de raio a distância entre o centro e qualquer ponto dessa esfera.

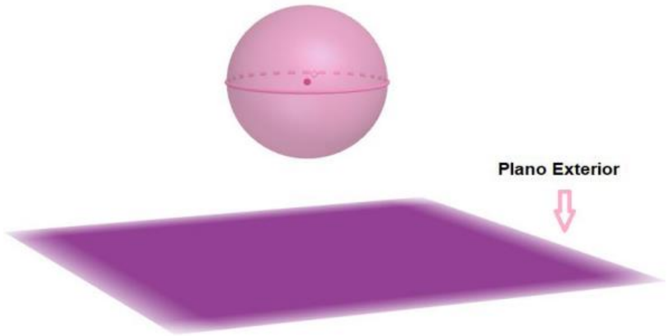
Figure 3 - Esfera de centro O e raio R

Fonte: arquivo da autora.

- Ao se analisar as posições relativas que uma esfera e um plano podem ocupar no espaço, é fácil notar que há 3 tipos de interseção entre uma esfera e um plano:

Interseção vazia: nesse contexto, o plano não intersecta a esfera, portanto ele é chamado exterior a esfera.

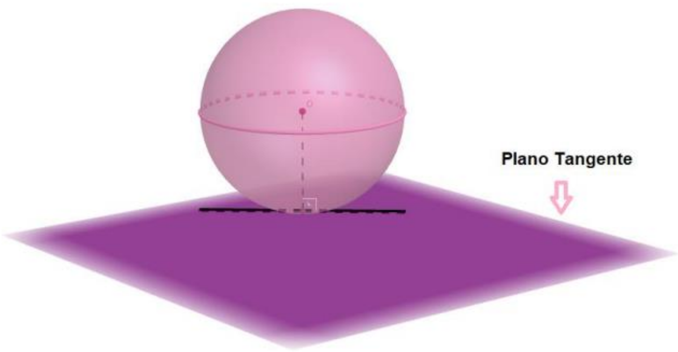
Figure 4 - Plano exterior a uma esfera S



Fonte: arquivo da autora.

Interseção dada por um ponto: nesse contexto, o plano intersecta a esfera apenas em um ponto, logo é chamado tangente a esfera.

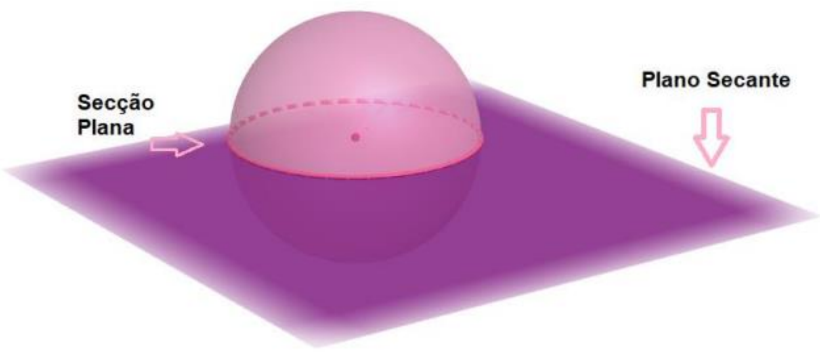
Figure 5 - Plano tangente à esfera S



Fonte: arquivo da autora.

Interseção igual a um círculo: nesse contexto, o plano intersecta a esfera segundo um círculo, portanto ele é chamado secante à esfera.

Figure 6 - Plano secante à esfera S

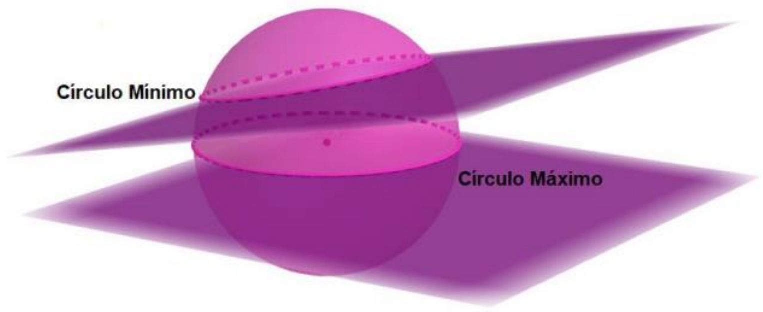


Fonte: arquivo da autora.

Desse modo, partindo-se dessas noções se pode determinar alguns elementos da Geometria Esférica.

Conceito 1: Leva em consideração uma esfera S e um plano π secante à S. Se o plano π passa pelo centro de S, então $\pi \cap S$ é chamado círculo máximo. De outro modo, se o plano π não passa pelo centro da esfera, $\pi \cap S$ é denominado círculo mínimo.

Figure 7 - Círculo máximo e círculo mínimo



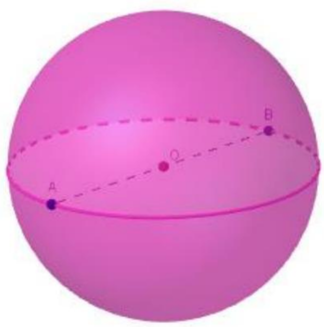
Fonte: arquivo da autora.

Facilmente se percebe que o centro e raio de um círculo máximo coincide com o centro e raio da esfera sobre o qual ele foi criado.

Círculos máximos são as retas da Geometria Esférica.

Conceito 2: Os pontos sobre um círculo máximo que são extremidades de um mesmo diâmetro da esfera são denominados pontos antípodas.

Figure 8 - Pontos antípoda A e B da esfera S centrada em O



Fonte: arquivo da autora.

Perceba que dados dois pontos não antípodas A e B sobre uma esfera S centrada em O, sempre haverá um único plano π passando por A, B e O que será secante a S. Desse modo, $\pi \cap S$ será um círculo máximo. Da mesma maneira, é possível notar que há sempre um único círculo máximo passando por dois pontos não antípodas de uma esfera. Caso se tome dois pontos antípodas sobre uma esfera, haverá infinitos círculos máximos contendo tais pontos.

Na Geometria Euclidiana, de acordo o quinto postulado, por um ponto fora de uma reta há somente uma reta paralela à reta dada. Enquanto que na Geometria Esférica por um ponto fora de um círculo máximo é impossível delinear um círculo máximo que não intercepte o primeiro. Essa ocorrência se dá pelo fato de que os dois círculos máximos geralmente se esbarram em pontos antípodas. Já que os círculos máximos da Geometria Esférica são equivalentes às retas da Geometria Euclidiana, logo a Geometria Esférica é insatisfatória ao quinto postulado de Euclides (o que já se esperava, pois, como salientado anteriormente, a Geometria Esférica é uma ocorrência de Geometria não-Euclidiana).

Conceito 3: Dados dois pontos diferentes de uma esfera, o círculo máximo que abrange esses pontos fica separado, por esses pontos, em duas partes chamadas arcos de círculo máximo.

Conceito 4: Dados dois pontos distintos sobre uma esfera, a distância entre esses pontos é o comprimento do menor arco do círculo máximo que os contém.

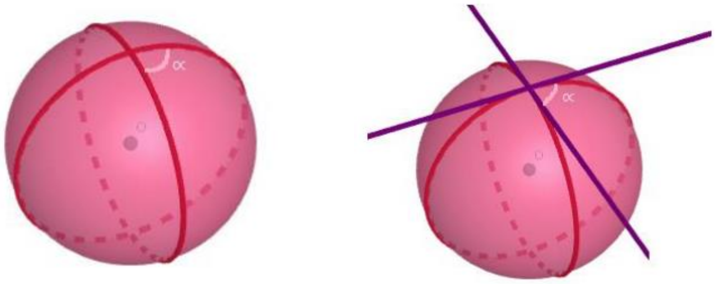
Figure 9 - Arco de círculo determinado pelos pontos A e B

Fonte: arquivo da autora.

O menor arco de círculo máximo que conecta dois pontos sobre uma esfera é o segmento de reta da Geometria esférica.

Conceito 5: O ângulo formado por dois círculos máximos, intitulado ângulo esférico, é o ângulo criado pelas retas tangentes aos círculos máximos em um ponto de interseção entre esses círculos máximos.

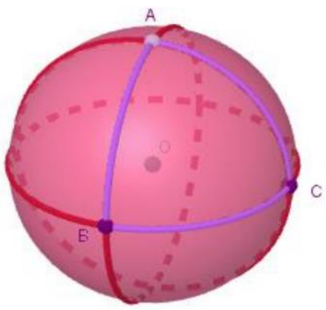
Figure 10 - Ângulo esférico ∝.



Fonte: arquivo da autora.

Cocneito 6: Sejam A, B e C três pontos diferentes de uma esfera e que não pertencem a um mesmo círculo máximo. A figura geométrica criada por arcos de círculo máximo determinados pelos pontos A, B e C, dois a dois, é chamada triângulo esférico.

Figure 11 - Triângulo Esférico ABC

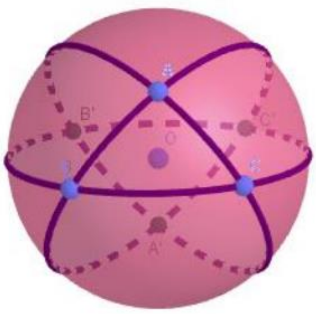


Fonte: arquivo da autora.

Os pontos A, B e C do conceito antecedente são denominados vértices do triângulo esférico e os arcos AB, AC e BC são chamados lados do triângulo esférico. Desse modo, os círculos máximos criados por pontos dois a dois compõem os ângulos internos do triângulo esférico em cada um de seus vértices. Toda vez que forem tomados três pontos sobre uma esfera, pode-se notar que são criados dois triângulos esféricos, sendo um deles contido em uma semiesfera e o outro não contido na mesma semiesfera.

Conceito 7: Levando em consideração um triângulo esférico de vértices A, B e C, o triângulo esférico representado pelos pontos antípodas de A, B e C é chamado triângulo antípoda.

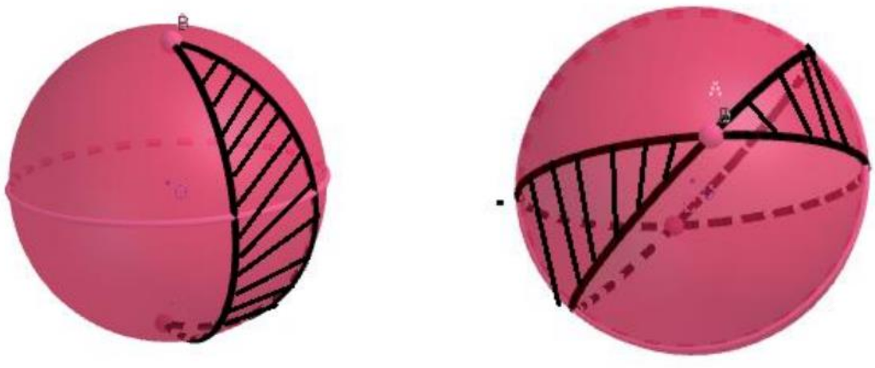
Figure 12 - Triângulo antípoda de vértices A', B' e C'



Fonte: arquivo da autora.

Conceito 8: Chama-se fuso ou lúnula a região contida entre dois círculos máximos. O ângulo de um fuso é dado pelo ângulo esférico definido pelos arcos dos círculos máximos referentes a ele.

Figure 13 - Fuso de ângulo e fuso completo



Fonte: arquivo da autora.

Calcula-se a área A de um fuso de ângulo através de α, expresso em radianos, faz-se necessário recordar que a área da superfície esférica de uma esfera de raio r equivale a $4\pi r2$. Logo, pode-se por uma regra de três simples, entre área da superfície e ângulo representado por ela, achar que:

$$\frac{4\pi r^2}{360º} = \frac{A}{\alpha} \leftrightarrow A = \frac{\pi r^2}{90º}$$

Perceba que sendo 90° = $\frac{\pi}{2}\,rad$, obtém-se esta relação:

$$A = 2r^2\alpha$$

Será estudado em seguida um resultado da Geometria Esférica renomado como Teorema de Girard. Albert Girard (1595-1632) em grande parte de sua história morou na Holanda e desenvolveu interesse, sobretudo, por Geometria Esférica e trigonometria. No ano de 1626, ele divulgou um tratado de trigonometria que contém a mais velha utilização das abreviações de seno, cosseno e tangente. Foi Girard que conseguiu a expressão da área de um triângulo esférico, que passou a ser intitulado de Teorema de Girard, passando a ser um algebrista de grandes realizações.

Teorema de Girard: Leve em consideração um triângulo esférico sobre uma esfera de raio R e $\propto$, β e γ seus ângulos internos, medidos em radianos. Logo:

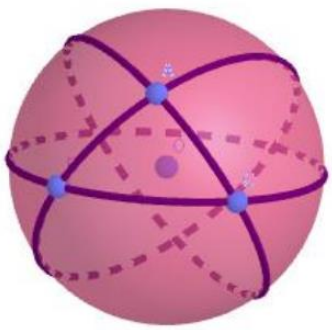
$$\propto + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$$

Em que A é a área do triângulo esférico.

Demonstração: Essa demonstração será dividida em dois casos:

1º Caso: Suponha que o triângulo esférico esteja contido em uma semiesfera, facilmente se percebe que esse triângulo (levando em consideração os círculos máximos que possuem seus lados) faz uma divisão da esfera em seis fusos disjuntos dois a dois.

Figure 14 - Fusos do triângulo esférico ABC



Fonte: arquivo da autora.

Desse modo, três fusos abrangem o interior do triângulo esférico e o remanescente abrange o interior do triângulo antípoda deste triângulo. Dessa maneira, tem-se que a soma das áreas destes fusos é igual a área da esfera somada de duas vezes a área triângulo esférico. Isto é,

$$4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 = 4\pi r^2 + 2.2A$$
$$R^2(\alpha + \beta + \gamma) = \pi R^2 + A$$

Como r é raio da esfera, logo, r≠0 e, assim:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$$

2º Caso: Suponha que o triângulo esférico não esteja contido em uma semiesfera, pode-se averiguar que esse triângulo cria um triângulo complementar que, por outro lado, está contido em uma semiesfera. Desse modo, pode-se calcular a área desse triângulo esférico a partir da distinção entre a área da superfície da esfera e seu triângulo complementar. Sejam, portanto, Ac a área do triângulo complementar e a, b e c os ângulos internos desse triângulo complementar. Então, fazendo uso da fórmula encontrada no 1º caso, tem-se que:

$$Ac = (a + b + c - \pi)R^2$$
$$A = 4\pi R^2 - (a + b + c - \pi)R^2$$
$$= 4\pi R^2 - (2\pi - \alpha + 2\pi - \beta + 2\pi - \gamma - \pi$$
$$= R^2(4\pi - 5\pi + \alpha + \beta + \gamma)$$
$$= R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Logo,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$$

Através deste teorema se torna evidente mais uma enorme distinção entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica. Nessa, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º, enquanto nesta, o Teorema de Girard assegura que esta soma é maior que 180º.

1.7 A UTILIZAÇÃO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS NO ENSINO BÁSICO

Na atualidade, um dos papéis das universidades é capacitar professores que tenham aptidão para difundir a utilização de novas tecnologias, com o intuito de colaborar para soluções dos complexos desafios sociais, econômicos e culturais da sociedade. É extremamente importante que essa visão seja passada adequadamente na formação de professores, sobretudo em razão de sua função multiplicadora na sociedade.

No processo de ensino e aprendizagem da Matemática, o uso de ferramentas computacionais, pouco a pouco, tem adquirido lugar nas instituições de ensino com o intuito de beneficiar a evolução cognitiva, o raciocínio lógico matemático dos estudantes e visualização de situações geométricas. No entanto, os docentes se defrontam com várias situações dificultosas, tais como: entender como trabalhar com ferramentas computacionais e a falta de procedimentos de instrução referente ao uso desses meios em sua prática docente.

Segundo Belfort e Santos (2011, p. 9):

> (...) muitas vezes, as dificuldades transcendem as questões de forma: os próprios conteúdos estão em causa. Traçar novos caminhos exige muito mais do que domínio da tecnologia; buscá-los requer, antes de tudo, visão ampla e domínio da área de estudo a ser beneficiada pela utilização dos recursos tecnológicos

De acordo com Alves (2014), outro problema existente nessa metodologia se refere ao processo de ensino da Matemática no intuito de localizar uma maneira de tratar os conteúdos por meio de um meio dinâmico, que promove a educação ligada aos desafios contemporâneos e possibilite aos estudantes o intercâmbio de experiências eexerça interação ao longo do processo de ensino e aprendizagem na sala de aula.

É possível notar que a possibilidade de utilizar as ferramentas computacionais e a internet têm não apenas um vasto potencial educativo, como também, de certo modo, o potencial de diminuir a desigualdade social presente no Brasil. Dessa forma, faz-se necessário que se leve em consideração o fato do processo educacional entrar em conformidade com as mudanças ocorridas na sociedade, bem como no mercado de trabalho.

Concluindo, a utilização de novas tecnologias como metodologia no ensino básico deve ter como escopo central o favorecimento da elaboração do saber e valorizar a inovação e a descoberta como uma das fases essenciais do processo de ensino e aprendizagem. Portanto, compete ao docente tornar-se o mediador dessa prática no intuito de esquadrinhar novas possibilidades didáticas e metodológicas que proporcionem a quebra da formalidade do ensino da Matemática.

1.8 O MODELO DE VAN HIELE

Os professores holandeses de Matemática Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geoldof foram os responsáveis pela criação do modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele. O objetivo de modelo é favorecer o desenvolvimento da aprendizagem geométrica de alunos do ensino médio. A construção de modelos é fundamentada em duas vertentes: a descrição da estrutura de níveis cognitivos de aprendizado e de fases de uma metodologia de ensino para o desenvolvimento geométrico.

Segundo esse modelo, a aprendizagem geométrica dos alunos atravessa cinco níveis hierárquicos de aprendizagem. Assim, para conseguir atingir qualquer nível é preciso que primeiramente se atinja as metas do nível predecessor. Segundo os elaboradores do modelo, o desenvolvimento durante os níveis vai depender da aprendizagem do aluno, não sendo levado em consideração a idade ou série escolar dele.

O modelo foi publicado pela primeira vez em 1959 e nos anos 1960 passou a ser utilizado pela extinta União Soviética na formação de uma nova organização do ensino de Geometria. Todavia, o modelo de van Hiele começou a ser grandemente propagado apenas na década seguinte, depois da origem de várias pesquisas no mesmo campo e traduções das obras de van Hiele nos Estados Unidos da América.

Daí em diante, esse modelo passou a ser um dos métodos de avaliação mais importantes da competência geométrica e aprendizagem de estudantes. Para maior aprofundamento sobre o modelo de van Hiele, consultar estes trabalhos: Kaleff; Henriques; Monteiro; Figueiredo (1994) e Kaleff (2008).

1.8.1 Níveis do Pensamento Geométrico

Pode-se descrever o processo cognitivo dos estudantes partindo da compreensão de cinco níveis de pensamento geométrico chamados: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor.

Abaixo, mostra-se uma síntese narrativa de suas respectivas características.

Nível 0: Visualização ou Reconhecimento

Neste primeiro nível, os estudantes desenvolvem o raciocínio partindo da observação das características visuais dos objetos geométricos. Desse modo, orienta-se o pensamento geométrico através do todo, não se levando em consideração as propriedades específicas que podem ser mostradas pelos objetos geométricos. Isto é, identificam-se as figuras geométricas pela aparência geral, como por exemplo quadrados, triângulos dentre outros. Todavia, os estudantes não têm a capacidade de esclarecer as características que diferenciam as figuras.

Nível 1: Análise

Neste próximo nível, o estudante já possui a capacidade de aprender conceitos geométricos por meio da análise das suas propriedades e da experimentação. Dessa maneira, os sujeitos passam a distinguir as particularidades das figuras geométricas, gerando propriedades que são utilizadas para determinar classes e formas. Todavia, eles ainda não têm a capacidade de esclarecer as correspondências relacionadas às figuras ou propriedades.

Nível 2: Dedução Informal

Neste nível, os estudantes elaboram conceitos abstratos, sendo possível, portanto, determinar a correspondência da similaridade de figuras e entre figuras. Eles têm a capacidade de identificar a carência e a existência de um grupo de propriedades na geração de uma definição geométrica. Desse modo, reconhecem-se as categorias de figuras e a inclusão ou similaridade de classes são entendidas. Contudo, o estudante neste nível não possui o discernimento do significado de uma dedução ou da função dos axiomas. Torna-se possível ao aluno o acompanhamento do desenvolvimento de provas formais, porém não é capaz de gerar sem acompanhamento uma prova a partir de noções diferentes.

Nível 3: Dedução Formal

Neste nível, os estudantes desenvolvem uma série de afirmações no intuito de deduzir uma proposição a partir de uma ou mais afirmações. Nesse contexto, os estudantes raciocinam formalmente fazendo uso de axiomas, conceitos e teoremas. Um sujeito neste nível é capaz de criar provas e tem a percepção da possibilidade de mais de um tipo de desenvolvimento da mesma.

Nível 4: Rigor

Neste momento, os estudantes entendem a fundamentação de vários sistemas dedutivos com rigor elevado. Percebendo o contraste entre procedimentos fundamentados em axiomas distintos e estudam sobre as várias Geometrias, mesmo sem modelos concretos delas.

1.8.2 Fases de Aprendizagem

Caracteriza-se o modelo de van Hiele pelas cinco fases metodológicas de ensino que ajudam os docentes na elaboração da cognição do estudante. O alcance de um nível de pensamento, referente a um tema específico da geometria, é obtido com a ajuda dessas sucessivas etapas didáticas.

> É essencial que os professores saibam combinar aprendizagem com o nível de pensamento do estudante, bem como, segundo o próprio van Hiele observa, tomar consciência de que é necessário pesquisar a teoria subjacente ao estabelecimento dos níveis de pensamento, pois só através destes estudos poderão ajudar os alunos a pensar de um nível para outro. (KALEFF, 1994, p. 29)

Em seguida, as fases de aprendizagem serão brevemente caracterizadas.

Fase 1: Questionamento ou Informação

Nesta fase é estabelecida entre o docente e o discente um diálogo a respeito de um conteúdo específico. Desse modo, o docente tem a possibilidade de notar os conhecimentos prévios que o discente tem a respeito do conteúdo tratado e dimensionar a melhor maneira de continuar a abordagem.

Fase 2: Orientação Direta

Nesta fase, os estudantes são motivados a investigar a respeito do tema tratado, a partir da utilização de materiais selecionados pelo professor. Ao promover atividades, é preciso que o docente proporcione soluções particulares e diretas.

Fase 3: Explicitação

Nesta fase, com suporte de conhecimentos prévios, os estudantes complementam seu vocabulário e expressam oralmente suas conclusões. O papel do docente nessa etapa é ínfima e deve valorizar o raciocínio próprio dos estudantes a respeito do conteúdo geométrico a ser estudado.

Fase 4: Orientação Livre

Para essa fase, tornar-se importante o uso de atividades distintas que possibilitem, desse modo, ao estudante, a capacidade de realizá-las de vários modos. Além disso, também é muito importante que o estudante tenha a capacidade de obter experiência na busca de resoluções individuais para cada atividade proposta.

Fase 5: Integração ou Fechamento

Esta fase é caracterizada pelo seu teor de revisão e síntese do conteúdo abordado com o objetivo de interligação geral entre os materiais didáticos utilizados, o conteúdo e a capacidade do aluno de raciocinar a respeito dos mesmos. Desse modo, o papel do docente é resumir e formalizar o conteúdo já tratado até então.

CAPÍTULO 2

2 METODOLOGIA DA PESQUISA

Para o desenvolvimento desta pesquisa foram adotadas as seguintes etapas metodológicas.

2.1 A ABORDAGEM E AS ESTRATÉGIAS DE INVESTIGAÇÃO

Esta pesquisa buscou analisar uma proposta de ensino de Geometria Esférica no ensino médio por meio do software Geogebra. Sendo assim, compreende-se que se classifica como uma pesquisa qualitativa.

Flick (2009) destaca que

> A pesquisa qualitativa é a pesquisa não quantitativa ou não padronizada [...]. Usa o texto como material empírico (em vez de números), parte da noção da construção social das realidades em estudo, está interessada nas perspectivas dos participantes, em sua prática do dia a dia e em seu conhecimento cotidiano relativo à questão em estudo. Os métodos devem ser adequados àquela questão e devem ser abertos o suficiente para permitir um entendimento de um processo ou relação. (FLICK, 2009, p. 16)

Dessa forma, estabeleceu-se uma relação entre as informações e os dados que foram obtidos com o problema proposto. Ao tratar os procedimentos metodológicos buscou-se olhar a ideia principal, a procura de respostas para os questionamentos levantados. Assim, essa pesquisa se orientou por uma abordagem de natureza qualitativa, tendo em vista que o intuito não foi quantificar os dados obtidos a partir da pergunta norteadora da pesquisa, mas gerar compreensões acerca desses dados.

Além disso, esta foi uma pesquisa exploratória, uma vez que buscou explorar um problema, de maneira que fosse possível fornecer dados para uma investigação mais precisa; procurando visar uma aproximação com o tema. Portanto, foram realizadas pesquisas bibliográficas e aplicação de atividades planejadas em sala de aula na forma de uma sequência didática, configurando-a como uma pesquisa experimental, na qual se busca, dentre outros objetivos, analisar a aprendizagem de Geometria Esférica dos alunos do ensino básico por meio de atividades desenvolvidas através do uso do *software* Geogebra, fundamentadas no modelo de van Hiele.

2.2 SUJEITOS DA PESQUISA

Os sujeitos da pesquisa foram 12 alunos, com média de 16 anos, de uma turma de 2º Ano do Ensino Médio do turno Matutino do Centro de Educação De

Tempo Integral Áurea Pinheiro Braga, escola pública localizada na zona oeste da cidade de Manaus-AM.

A escolha por trabalhar com esses alunos se justificou por serem alunos oriundos de escola pública, cujo investimento em insumos educacionais é baixo, acarretando condições desafiadoras para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Assim, esses alunos que tiveram pouco ou quase nenhum contato com ferramentas computacionais ao estudar os conteúdos propostos pela escola encontraram, nesta pesquisa, uma oportunidade de aprender de maneira diferenciada, já que o mundo tem se tornado cada vez mais informatizado, exigindo, portanto, uma adaptação por parte tanto de professores quanto de alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Os sujeitos escolhidos foram informados que participariam de uma pesquisa acadêmica, cujo objetivo seria analisar uma proposta de ensino de Geometria não-Euclidiana no ensino médio por meio do *software* Geogebra. Assim, foi entregue a cada aluno um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A), que deveria ser assinado pelos pais ou responsáveis, qualificando-os para a participação na pesquisa.

2.3 CONTEXTO DA PESQUISA

Como uma forma de incentivar a participação dos alunos na pesquisa, propôs-se que seria atribuída uma nota para cada um ao término da aplicação das atividades realizadas.

2.4 ETAPAS DA PESQUISA/INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Esta pesquisa foi dividida em duas etapas principais: a primeira, constituiu-se no levantamento bibliográfico e elaboração da sequência didática com as atividades a serem aplicadas em sala de aula; a segunda, na aplicação dessas, proporcionando, desse modo, num cenário ideal para a coleta de dados a serem analisados.

Os instrumentos utilizados nesta pesquisa foram a aplicação de questionários e o uso do *software* Geogebra, durante aplicação das atividades propostas neste trabalho. Portanto, os alunos foram remanejados para o laboratório de informática da escola, onde se deu o desenvolvimento dessas atividades.

Além disso, também foi utilizado o instrumento observação, cujos registros foram feitos através de fotos ao longo da aplicação das atividades, sendo observados a assiduidade dos alunos, bem como interesse, participação, cooperação entre os colegas, melhoria do nível de aprendizagem dos alunos.

Por fim, foram preservadas em todas as etapas a identidade dos sujeitos, interessando apenas as falas e gestos.

2.5 PROCEDIMENTOS PARA A ANÁLISE DE DADOS

Os dados coletados a partir das respostas obtidas nos questionários aplicados com os estudantes participantes da pesquisa foram analisados e refletidos através do modelo de van Hiele, ou seja, apresentando os erros e acertos dos alunos, mostrando suas estratégias e desafios encarados por eles no momento da resolução das questões colocadas nos questionários, comentando-se cada uma dessas questões.

Da mesma maneira, foram identificamos os níveis de compreensão geométrica de cada estudante, classificando-os segundo o modelo de desenvolvimento de pensamento geométrico dos Van Hiele.

Cabe ressaltar que se construiu os questionários de maneira que fosse possível que todas as respostas coletadas conduzissem a um melhor desfecho ao longo da análise dos dados, tornando mais fácil o tratamento enquanto se realizasse a identificação dos níveis de entendimento geométrico dos alunos pesquisados.

Construímos questões que tornasse possível a complementação da resposta de outras questões do questionário, possibilitando, desse modo, examinar se o estudante se encontrava em um determinado nível ou em outro nível, e simultaneamente, proporcionado analisar se o mesmo se encontrava em transição de um nível para o outro.

CAPÍTULO 3

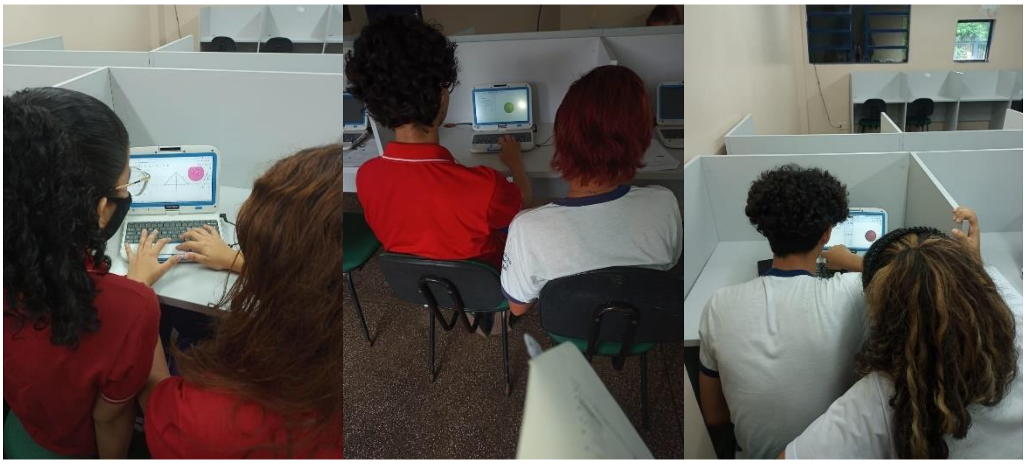
3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentadas as análises feitas do material coletado durante a aplicação da primeira atividade da sequência didática (Anexo 2) proposta nesta pesquisa, já que não foi possível a aplicação dessa em sua totalidade em razão, dentre outros fatores, do tempo disponível.

Esta pesquisa foi desenvolvida em uma turma do 2º Ano do Ensino Médio, com um total de 22 alunos, do turno Matutino do Centro de Educação De Tempo Integral Áurea Pinheiro Braga, escola pública localizada na zona oeste da cidade de Manaus-AM. Para organização da análise dos dados, serão denominados, doravante, como Duplas A, B, C, D, E, F.

No primeiro contato com a turma, foi informado aos alunos que a aula seria desenvolvida no laboratório de informática, onde eles desenvolveriam atividades em dupla em computadores, no *software* Geogebra (Figura 15).

Figura 1 - Duplas desenvolvendo as atividades



Fonte: arquivo da autora.

Após uma breve apresentação da interface do programa computacional, para a fase de questionamento, realizou-se um debate com os estudantes, no intuito de averiguar os conhecimentos prévios acerca de triângulos e suas propriedades. Registraram-se na lousa os dados apresentados e discutidos pelos alunos, permitindo, portanto, ao pesquisador, notar que eles possuíam entendimento do que é triângulo. Porém, ao ressaltar suas propriedades, mencionaram, de modo casual, algumas delas como sua classificação quanto aos ângulos e aos lados não conseguindo evidenciar nitidez os elementos essenciais para cada classificação.

Nessa fase, pôde-se notar que os estudantes mostraram conhecimentos prévios acerca da identificação da forma geométrica de triângulos, porém não apresentaram nitidez relacionada à classificação de triângulos quanto aos lados e aos ângulos. A próxima fase, foi da orientação direta, constituída no desenvolvimento de atividades no Geogebra com o intuito de introduzir a noção da existência de outra geometria além da Euclidiana, isto é, a geometria esférica.

Primeiramente, foi solicitado às duplas que criassem um triângulo cada no Geogebra e que, em seguida, o comparassem com os das duplas ao lado. Depois, que criassem uma esfera e, então, repetissem o mesmo exercício de comparação na busca por semelhanças e diferenças.

Após esses exercícios, os alunos foram orientados a criarem três pontos quaisquer na esfera e, depois, criassem um arco de círculo que passasse por cada par de pontos marcados anteriormente; repetindo esse processo até construir três arcos circulares. Ao serem perguntados se eles conseguiam ver que a figura criada era um triângulo, os alunos responderam que sim; além disso, disseram que era bem parecido com o triângulo construído no item 1 do questionário (Apêndice B).

Tabela 2 – Respostas das duplas sobre o exercício 6 da Primeira Atividade – Etapa I.

6. Compare agora as construções feitas nos itens 4 e 5, onde foram feitas construções com pontos sobre uma esfera. O que essas figuras possuem em comum e o que possuem de diferente?	
Dupla A	*“Ambas são um círculo. As cores”*
Dupla B	*“Ambas tem ponto pelo segmento. Diferente é que uma é esfera e a outra não, e a área é diferente.”*
Dupla C	*“Cores diferentes, formatos diferentes”*
Dupla D	*“Ambas têm segmentos e elas têm áreas diferentes a coloração das esferas.”*
Dupla E	*“Ambas são um triângulo e uma esfera, a cor da esfera é diferente. Surgiram a partir de ponto.”*

Como pode ser observado na tabela acima, as duplas B, C e E conseguiram identificar as formas geométricas pela aparência geral, isto é, triângulo e esfera, mostrando que estão no nível 0 (Visualização ou Reconhecimento) do modelo de van Hiele. Contudo, esperava-se que eles fossem capazes de notar que ao traçar segmentos de reta usando os pontos sobre a esfera no exercício 5 seria obtido um triângulo que não está sobre a esfera. Já no exercício 4, ao traçar arcos de círculos utilizando os mesmos pontos, seria criado uma figura que está contida na esfera. Chegando à conclusão de que eram figuras diferentes, pois foram construídas sobre superfícies diferentes; no intuito de fazer o estudante perceber que aquilo que ocorre sobre um plano pode não ocorrer sobre uma esfera.

Esse exercício de visualização ou reconhecimento de uma figura pela sua forma é de grande valor para a elaboração do saber geométrico:

> quando os educandos se mostram capazes de identificar semelhanças e diferenças entre os objetos geométricos, analisar os componentes da forma e reconhecê-la em diferentes representações, dizemos que no tocante à figura dada, os estudantes apresentam fortes indícios de que já estão iniciando um novo nível de desenvolvimento do raciocínio geométrico (VAN HIELE, 1957, p. 145).

Na segunda etapa da Primeira Atividade, foram colocadas aos alunos duas situações: a trajetória percorrida por um indivíduo saindo do ponto A e chegando no D, primeiramente em um plano e depois sobre uma esfera. A tabela 2 mostra as respostas das duplas.

Tabela 3 - Respostas das duplas sobre o exercício 3 da Primeira Atividade – Etapa II.

Questão 6. Baseado nas suas respostas dos itens 1 e 2, o que você pode concluir a respeito dessas duas trajetórias? Há semelhanças entre as trajetórias sobre o plano e sobre a esfera?	
Dupla A	*“As trajetórias não são iguais.”*
Dupla B	*“São diferentes. Na esfera a pessoa volta pro ponto de partida.”*
Dupla C	*“Elas não possuem semelhanças.”*
Dupla D	*“Uma trajetória forma um U e a outra um triângulo.”*
Dupla E	*“Não existe semelhanças.”*

Fonte: arquivo da autora.

A análise das respostas da tabela acima mostra que as Duplas A, B, C, D e E conseguiram identificar a diferença no percurso sobre uma esfera e sobre um plano, evidenciando uma melhoria significativa na elaboração do conhecimento geométrico. Desse modo, percebe-se que os estudantes começam a notar que aquilo que acontece sobre um plano pode não acontecer da mesma maneira sobre uma esfera.

Na Etapa III, da Primeira Atividade, foi solicitado aos alunos que criassem uma reta passando pelos pontos A e B no Geogebra. Em seguida, estabeleceu-se um debate sobre a possibilidade de construir uma trajetória sobre a reta da atividade anterior que retornasse ao ponto inicial sem mudar o sentido do percurso. A tabela 3 mostra as respostas dos alunos.

Tabela 4 - Respostas das duplas sobre o exercício 2 da Primeira Atividade – Etapa III.

2. Pode-se criar uma trajetória sobre a reta do exercício anterior que retorne ao ponto inicial sem alterar o sentido do percurso?	
Dupla A	*“Não. Porque é uma reta.”*
Dupla B	*“Não dá. Muda o sentido da reta.*
Dupla C	*“Não é possível.”*
Dupla D	*“Não. Porque mudaria o sentido.”*
Dupla E	*“Não. Porque deixaria de ser uma reta.*

Fonte: arquivo da autora.

Em seguida, foi solicitado que os alunos construíssem uma esfera de centro e raio qualquer. Depois, que selecionassem três pontos quaisquer da esfera para construir um círculo. Então, os alunos foram questionados se seria possível escolher um ponto de partida qualquer, e a partir deste criar uma trajetória que retornasse ao ponto inicial sem mudar o sentido do percurso. A respostas dadas pelos alunos são mostradas na tabela 4.

Tabela 5 - Respostas das duplas sobre o exercício 4 da Primeira Atividade – Etapa III

4. Na figura obtida na questão anterior, escolhendo um ponto de partida qualquer, pode-se criar uma trajetória que retorne ao ponto inicial sem alterar o sentido do percurso?	
Dupla A	*“Sim. Porque a reta é um círculo que nunca irá se tocar mas não mudará o sentido.”*
Dupla B	*“Sim. Porque ela volta para o mesmo sentido.”*
Dupla C	*“Sim.”*
Dupla D	*“Sim. Porque dá a volta na esfera e o sentido não muda”*
Dupla E	*“Sim. Pode ser criada”*

Fonte: Arquivo da autora.

Pode-se observar na análise das respostas das Duplas A, B, C, D e E nas tabelas 3 e 4 que eles conseguiram raciocinar a partir da observação das características visuais dos objetos geométricos. Desse modo, o pensamento geométrico foi orientado pelo todo e não levando em consideração as propriedades específicas que poderiam ser apresentadas pelos objetos geométricos. Situando-os no primeiro nível de van-Hiele (1957).

Nota-se que eles conseguiram perceber que ao se construir sobre uma esfera, alguns fatos ocorrem de modo diferentes do convencional. Essa é uma característica específica da esfera, o que possibilita aos alunos um contato com uma geometria diferente da estudada até então, isto é, a geometria euclidiana. Sendo que o ramo da Matemática a trabalhar com essa geometria mencionada é a Geometria Esférica.

Também fica evidente nas respostas dos estudantes que eles conseguiram compreender que ao escolherem uma trajetória determinada por três pontos quaisquer e sem alterar um sentido seria, então, possível retornar ao ponto de partida, o que não acontece na Geometria Euclidiana, pois trata-se de superfícies diferentes, ou seja, uma superfície plana e a outra curva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desenvolveu-se este estudo partindo do propósito de elaborar atividades que proporcionassem o ampliamento dos saberes, de estudantes do ensino básico, relacionados à existência de Geometrias não-Euclidianas. Desse modo, espera-se motivar o contato dos estudantes com essas geometrias no objetivo que esse saber ajude o desenvolvimento sobre uma nova perspectiva da Geometria como um todo e a notar que essa pode ser encontrada em todas as situações ao seu redor.

Julgou-se como ponto essencial o envolvimento do estudante na elaboração de seu saber. Desse modo, fazendo uso do modelo de na Hiele, foi possível basear as atividades deste estudo de maneira que o estudante atuasse de modo interativo. Com esta finalidade, optou-se pela utilização do software Geogebra para o ensino de uma geometria não-Euclidiana, isto é, a Geometria Esférica, uma vez que softwares de Matemática dinâmica podem ser aliados importantes no processo de ensino e aprendizagem, sendo caracterizado como formas alternativas e interativas de ensino. Em síntese, as atividades apresentadas neste estudo tinham por objetivo central que o estudante construísse os conceitos e compreendesse a existência da geometria esférica, que é um tipo mais simples de geometria elíptica, que por sua vez é uma geometria não-Euclidiana.

Assim sendo, pôde-se observar neste trabalho uma síntese da história especialmente a problemática do quinto postulado de Euclides, bem como da origem das Geometrias não-Euclidianas por meio das mais significativas tentativas de demonstração do quinto postulado. Além disso, também foi possível introduzir os conceitos essenciais da Geometria Esférica, demonstrando alguns de seus principais resultados. Outro ponto importante a ser destacado neste trabalho foi a maneira como se elaborou e aplicou as atividades fundamentadas no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, utilizando o *software* Geogebra, sendo, portanto, possível introduzir os conceitos essenciais da Geometria Esférica.

Observou-se que os alunos responderam bem ao conteúdo fundamentado na metodologia de van Hiele embora tenha sido aplicada somente a primeira de três atividades propostas. Contudo, o material recolhido e as observações feitas ao longo do desenvolvimento da pesquisa possibilitaram chegar à conclusão de que é possível trabalhar a Geometria Esférica no ensino básico, e que o modelo de van Hiele é fundamental para tanto, assim como o software Geogebra é um meio facilitador que pode ser de grande valia para o docente no desenvolvimento de seu trabalho.

Acredita-se que com o desenvolvimento das demais atividades os alunos podem chegar ao segundo nível do modelo de van Hiele, pois ao término da primeira atividade já se encontravam no primeiro nível.

Por fim, espera-se que este estudo sirva de fundamento e motivação aos docentes do ensino básico que buscam introduzir noções de Geometrias não-Euclidiana, particularmente da Geometria Esférica, no ensino básico. Proporcionando, desse modo, a criação de um elo entre a Matemática e outras ciências para que estudantes entendam melhor o mundo que os cerca.

REFERÊNCIAS

AMARAL, A. J. S., **Geometria Esférica e Cartografia: uma proposta de estudo e atividades para o ensino médio**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, UFF, Niterói/RJ, 2014.

ALVES, P. J.; **O uso de ferramentas computacionais no processo de ensino e aprendizagem da Matemática**, Trabalho de Conclusão de Curso, UFPB, 2014.

BARBOSA, L. S., **Investigando com o GeoGebra 3D: o método axiomático em atividades de geometria espacial e esférica**. Dissertação de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT, UFRGS, Rio Grande/RS, 2017.

BARRETO, M. B.; TAVARES S., **Do mito da Geometria Euclidiana ao ensino das Geometrias Não Euclidianas,** II Semana de Matemática (Anais), IFF, Campos dos Goytacazes/RJ, Essentia Editora, 2008.

BELFORT, E.; DOS SANTOS, A., **Uma reflexão sobre ações de formação de professores no Brasil**, UFRJ – Rio de Janeiro/ RJ, Artigo, Revista Ibero-americana de Educação, nº 55/1, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília**, MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, MEC, 1999.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E., **Aprendizagem de Conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio Sob a Perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa Usando Uma Sequência Didática**. FURB – SC, Artigo, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.7, n.1, p.127-156, 2014.

COUTINHO, L., **Convite às geometrias não-euclidianas**. Rio de Janeiro: Editora: Interciência, 2001.

EVES, H., **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

EVES, H., **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria**. Trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Editora Atual, 1994.

GREENBERG, M. J., **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: development and history**. 3a edição, New York: Freeman, 2001.

GOMES, M. P., **Geometria Esférica: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica**, Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, UFF, Niterói/RJ, 2014.

KALEFF, A. M.; HENRIQUES, A. S.; MONTEIRO, D.; FIGUEIREDO, L. G., **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico** – O Modelo de Van Hiele, Bolema, v. 10, p. 21-30, 1994.

KALEFF, A. M., **Novas tecnologias no Ensino de Matemática: Tópicos em ensino de geometria**, Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2008.

PAVANELLO, R. M., **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**, Revista Zetetiké, nº 1, 1993.

RIBEIRO, R. D. G. L. O **ensino das geometrias não euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica**. Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 2012.

RIBEIRO, R. S., **Geometrias Não-Euclidianas na Escola: Uma Proposta de Ensino Através da Geometria Dinâmica**, Produto Didático PROFMAT UFRGS, 2013.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B., **Tópicos de História de Matemática**. Coleção PROFMAT, SBM, 2012.

SILVA, L.; CANDIDO, C. C, **Modelo de aprendizagem de geometria do casal Van Hiele**, Artigo II SIMPÓSIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E PÓS-GRADUAÇÃO DO IME-USP, 2007.

Apêndice A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS - UEA

ESCOLA NORMAL SUPERIOR – ESN

Av. Djalma Batista, 2470 - Chapada, Manaus - AM, 69050-010

Termo de consentimento livre e esclarecido (pais ou responsáveis)

Você está sendo consultado sobre a participação do(a) seu(sua) filho(a), como voluntário(a), em uma pesquisa educacional. Este estudo pretende investigar a aprendizagem de conceitos científicos em Matemática relacionados ao conteúdo de geometria não-Euclidiana. Pretendemos verificar se a nossa metodologia de trabalho experimental contribui de maneira significativa para uma evolução conceitual nos alunos a respeito desse tema. Isso permitirá resultados que vão ajudar a investigar a aprendizagem dos estudantes, bem como a evolução dessa. Durante um tempo de aproximadamente duas semanas, seu (sua) filho (a) participará de um curso durante as aulas de matemática do Centro de Educação de Tempo Integral Áurea Pinheiro Braga. Durante esse período seu (sua) filho (a) irá utilizar ferramentas computacionais no laboratório de informática da escola relacionados ao conteúdo de geometria não-Euclidiana e irão responder alguns questionários com questões objetivas e discursivas abordando o conteúdo de geometria não-Euclidiana.

Por se tratar de uma pesquisa, pretende-se que as atividades do curso sejam fotografadas.

Se você concordar com a participação do seu (sua) filho(a) na pesquisa, podemos lhe garantir que:

- a fotografia será feita apenas para registrar a realização das atividades e, portanto, em nenhum momento a imagem do seu (sua) filho(a) será divulgada.
- em nossas análises e ao divulgar os resultados em congressos adotaremos procedimentos para que ele(a) não seja identificado(a);
- seu professor ou professora não utilizará os resultados de nossa análise para avaliar o seu desempenho;
- o seu (sua) filho(a) terá inteira liberdade de se retirar da pesquisa a qualquer momento que desejar;
- serão solicitadas apenas informações quanto ao nome, idade, série e gênero do seu (sua) filho(a) para que seja possível analisar a sua evolução de aprendizagem ao longo do curso.
- os dados constantes da ficha de identificação serão absolutamente confidenciais, garantindo, assim, total anonimato;
- não existe qualquer risco pessoal na participação da pesquisa.

O seu (sua) filho(a) não terá nenhum benefício direto pela sua participação ao responder às questões que lhe serão apresentadas. Os benefícios serão úteis para a investigação da aprendizagem de Matemática no Ensino Médio. Caso não queira participar da pesquisa isso não acarretará nenhum tipo de punição. Em caso de dúvida sobre os procedimentos que estamos usando você pode entrar em contato com o pesquisador e com a orientadora da pesquisa.
Os conhecimentos resultantes desta pesquisa serão divulgados em revistas especializadas, em congressos e simpósios sobre pesquisas educacionais e na monografia da referida pesquisadora. Além disso, os dados coletados farão parte de um banco de dados que ficará sob a guarda da pesquisadora do projeto por pelo menos 10 anos, e poderão ser utilizados em futuras pesquisas. Depois desse prazo, os dados serão destruídos. Abaixo estão os dados relativos a este projeto.

Título do projeto: Proposta de ensino de geometria não-euclidiana no ensino básico em uma escola pública da cidade de Manaus-AM.

Pesquisador responsável: Alaiane Aragão Oliveira – Centro de Educação De Tempo Integral Áurea Pinheiro Braga - Telefone para contato: (92) 995186393.

Assinatura do Pesquisador Responsável:

____
Alaiane Aragão Oliveira

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO

Eu li e entendi os detalhes descritos neste documento. Entendo que eu sou livre para autorizar ou não a participação de meu (minha) filho(a) no projeto e que posso interromper a participação dele a qualquer momento. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Manaus, _____de ____________________ de ______.

Nome por extenso: ____
Nome do Filho: ____
Assinatura: ____

APENDICE B – Sequência Didática

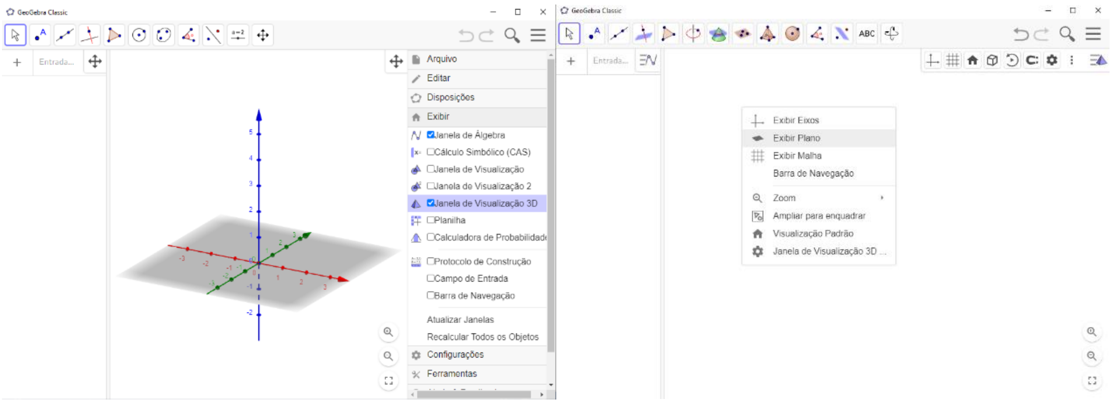
PRIMEIRA ATIVIDADE – Introdução à Geometria não Euclidianas

Objetivo: Introduzir a noção da existência de uma geometria não-Euclidiana com a ajuda do software Geogebra.

Exercício 1 – Etapa I

Primeiramente, abra o software Geogebra e em seguida selecione a opção “exibir” e clique em “Janela de Visualização 3D”. Para uma melhor visualização, feche a “Janela de Visualização” e, com o botão direito do mouse oculte o plano e os eixos presentes na “Janela de Visualização 3D”.

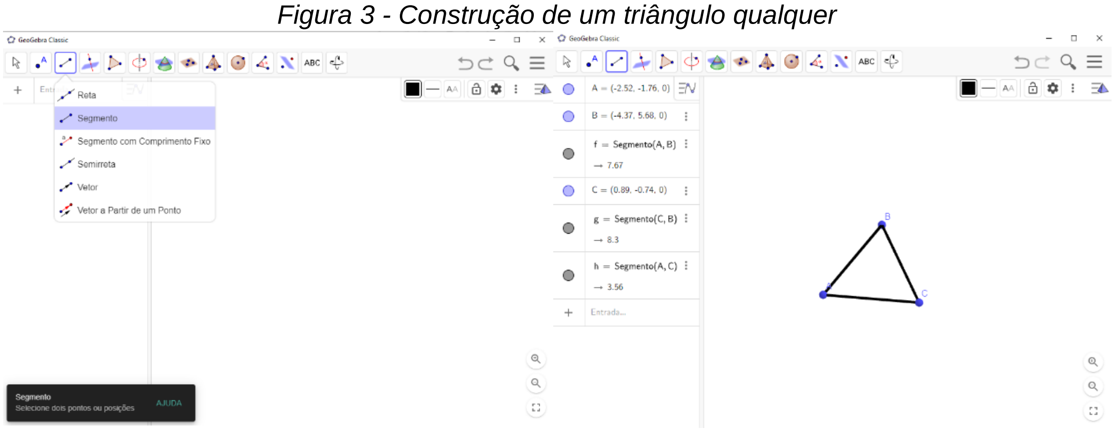
Figura 2 - Janela de Visualização 3D



Fonte: arquivo da autora.

1) Fazendo uso da ferramenta “segmento”, crie um triângulo qualquer. Não se esqueça de criar três segmentos que compartilham seus extremos para criar o triângulo. Depois, faça uma comparação com a do colega ao lado e debata suas semelhanças e diferenças.

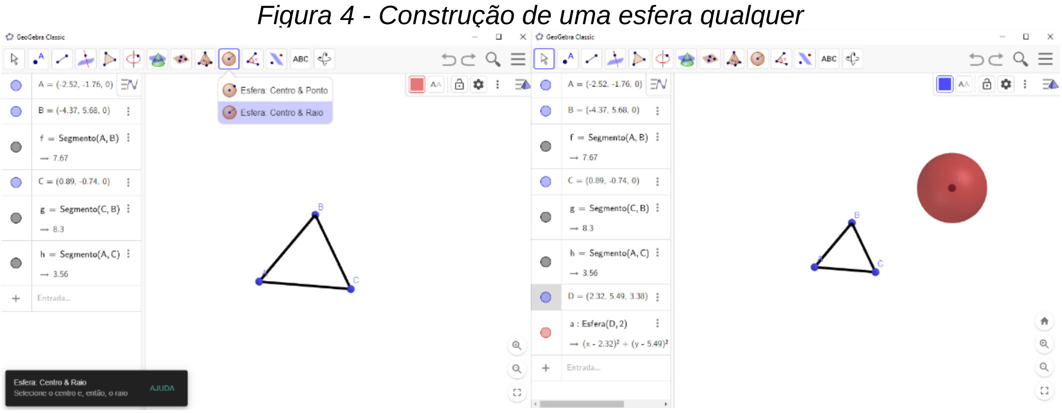
Figura 3 - Construção de um triângulo qualquer



Fonte: arquivo da autora.

2) Em seguida, selecione a opção “esfera dados centro e raio”, crie uma esfera. Escolha qualque qualquer ponto para ser centro da esfera e um número real positivo para ser seu raio.

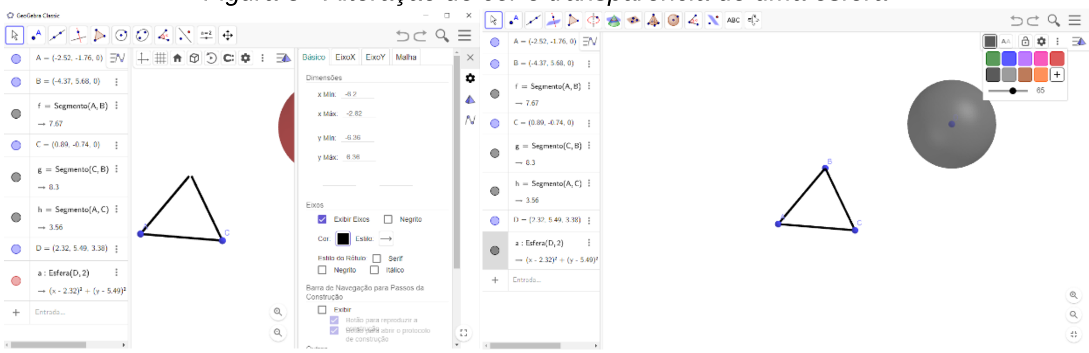
Figura 4 - Construção de uma esfera qualquer



Fonte: arquivo da autora.

Faça a comparação de sua criação com a do seu colega e debata suas semelhanças e diferenças. De maneira que melhore a visualização de sua esfera, com o cursor do mouse sobre a esfera, clique no botão direito e escolha a opção “propriedades” para mudar a cor e a transparência da esfera.

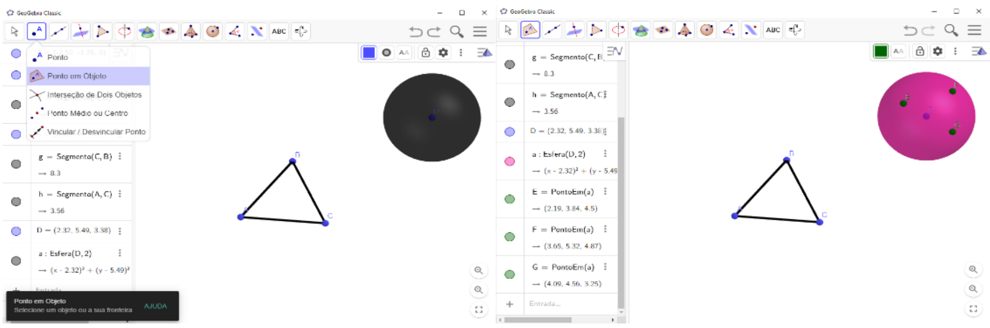
Figura 5 - Alteração de cor e transparência de uma esfera



Fonte: arquivo da autora.

3) Selecione a ferramenta “ponto em objeto”, marque três pontos quaisquer na esfera construída por vocês no exercício anterior.

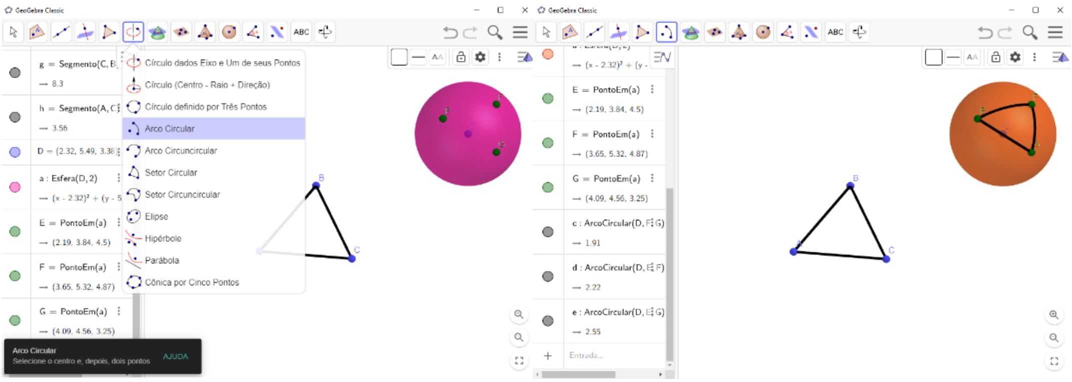
Figura 6 - Marcação de três pontos sobre uma esfera.



Fonte: arquivo da autora.

4) Em seguida, selecione a ferramenta “arco circular”, crie um arco de círculo que passa por cada par de pontos marcados anteriormente. Para tanto, clique no centro da esfera e em dois dos pontos marcados anteriormente. Repita esse processo até criar três arcos circulares.

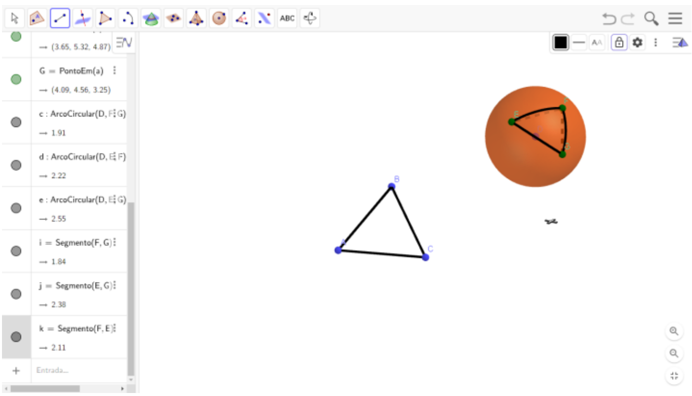
Figura 7 - Arcos circulares sobre a superfície da esfera.



Fonte: arquivo da autora.

5) Utilize a ferramenta "segmento" para conectar os três pontos, dois a dois, que estão sobre a esfera. É possível notar que a figura construída é um triângulo? Ela é semelhante ao triângulo criado no item 1, ou não? Debata com seu colega as suas ideias sobre sua criação.

Figura 8 - Triângulo esférico e segmentos EF, FG, e EG



Fonte: arquivo da autora.

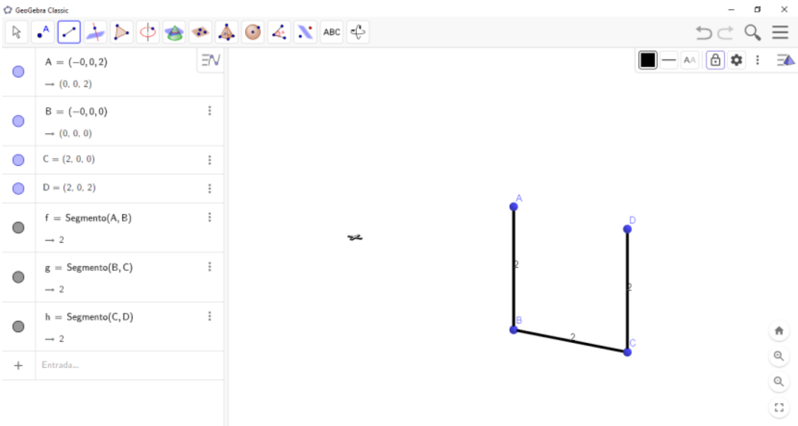
6) Faça uma comparação das criações realizadas nas questões 4 e 5, nas quais foram feitas criações com pontos sobre uma esfera. Quais são as semelhanças e as diferenças que essas figuras possuem?

Primeira Atividade – Etapa II

Sabe-se que um indivíduo pode caminhar em várias direções, de acordo com sua necessidade. Imagine que um indivíduo saia de um ponto A e caminhe dois metros para o sul, estacionando num ponto B; em seguida, dois metros para o leste, estacionando num ponto C, e, finalmente, dois metros para o norte, parando num ponto D. De posse dos saberes obtidos sobre o software Geogebra, faça o que é pedido?

1) Crie um desenho no Geogebra com a trajetória percorrida pelo indivíduo para sair de A e chegar em D. Para tanto, construa primeiramente um plano e depois desenhe a trajetória pedida. Faça a comparação da sua sua resposta com a do colega ao lado. A resposta obtida foi a mesma?

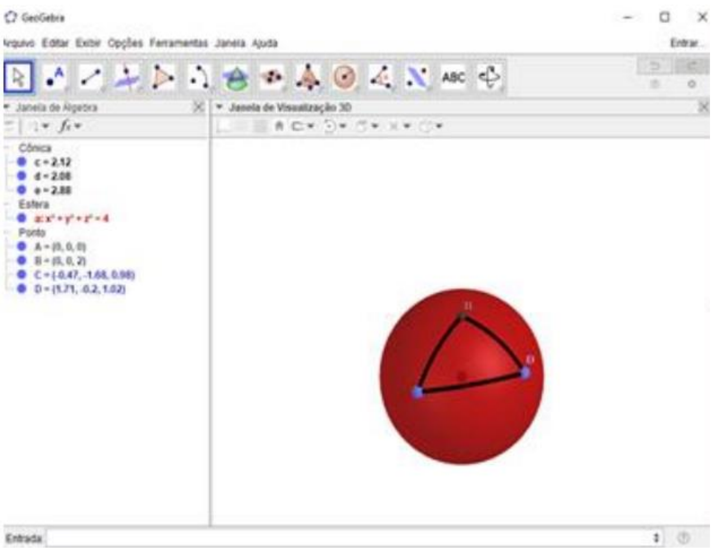
Figura 9 - Trajetória no plano



Fonte: Arquivo da autora.

2) Agora, desenhe no Geogebra a mesma trajetória descrita, anteriormente, mas imaginando que o indivíduo caminhando sobre a esfera. Para tanto, construa primeiramente uma esfera e depois desenhe a trajetória pedida. Faça a comparação da sua resposta com a do colega ao lado. A resposta obtida foi a mesma?

Figura 10 - Trajetória sobre uma esfera



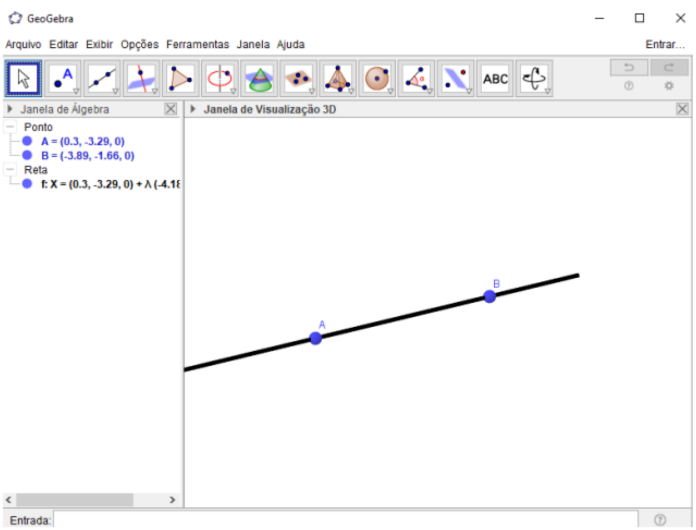
Fonte: arquivo da atuora.

3) Baseado nas suas respostas das questões 1 e 2, o que se pode concluir a respeito dessas duas trajetórias? Há semelhanças entre as trajetórias sobre o plano e sobre a esfera?

Primeira Atividade – Etapa III

1) No software Geogebra, fazendo uso da ferramenta "Janela de Visualização 3D", esconda o plano e os eixos, marque dois pontos A e B, e crie uma reta qualquer passando por esse ponto.

Figura 11 - Reta passando por A e B

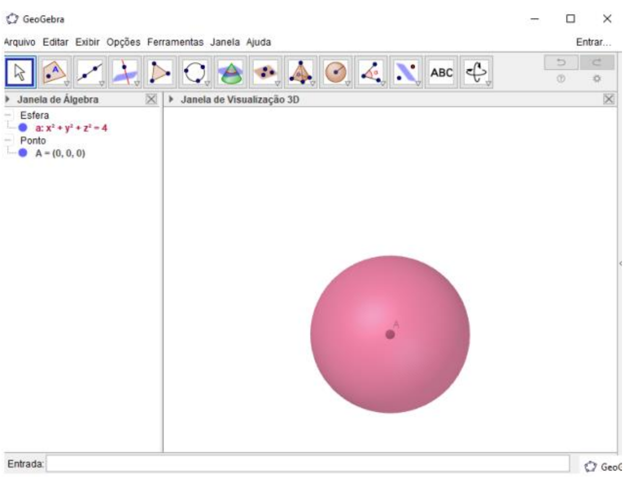


Fonte: arquivo da autora.

2) Pode-se criar uma trajetória sobre a reta do exercício anterior que retorne ao ponto inicial sem alterar o sentido do percurso? Debata com o colega ao lado.

3) Agora, crie uma esfera de centro e raio qualquer.

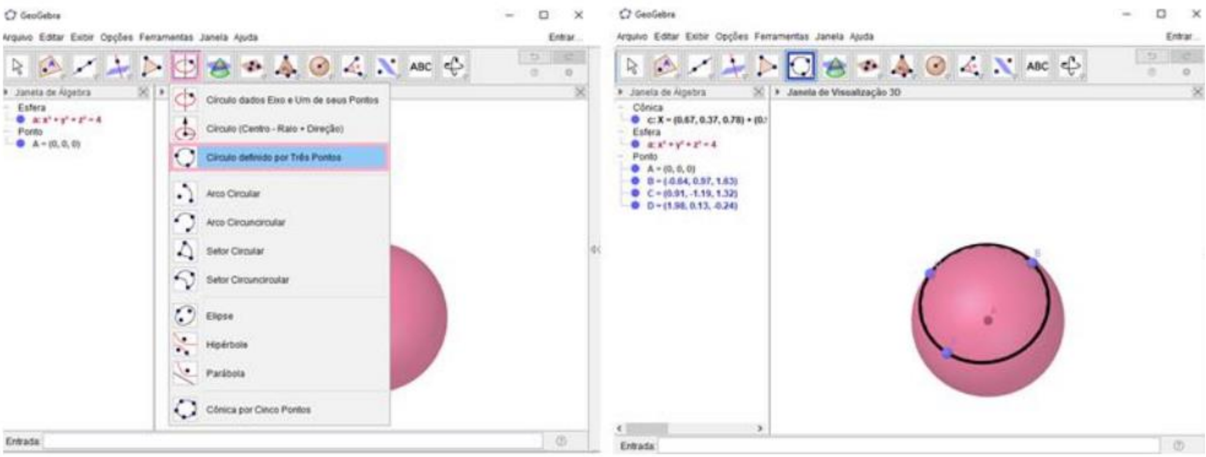
Figura 12 - Esfera qualquer



Fonte: arquivo da autora.

Selecione a ferramenta “círculo definido por três pontos”, em seguida selecione três pontos quaisquer da esfera para criar um círculo.

Figura 13 - Círculo passando por três pontos da esfera



Fonte: arquivo da autora.

Faça uma comparação da sua figura com a do seu colega. Elas são semelhantes?

4) Na figura obtida na questão anterior, escolhendo um ponto de partida qualquer, pode-se criar uma trajetória que retorne ao ponto inicial sem alterar o sentido do percurso? Debata com o colega ao seu lado.

5) Compare agora o que aconteceu no item 2 e no item 4 e discuta com o colega ao lado. No item 2, você deve ter observado que não é possível voltar ao ponto inicial sem mudar o sentido do percurso. Em contrapartida, é possível dar uma volta completa sobre o círculo e assim retornar ao ponto inicial, o que não altera o sentido do percurso percorrido.

6) Durante a Atividade I tentamos mostrar a você que ao fazer construções sobre uma esfera, alguns fatos acontecem de maneira diferente da convencional. Isso é uma especificidade da esfera e existe um ramo da Matemática que estuda o comportamento dos objetos sobre uma esfera. Esse ramo é chamado de Geometria Esférica e será explorado em mais duas atividades. A Geometria Esférica é um pouco diferente da Geometria comumente estudada por você, que chamamos de Geometria Euclidiana.

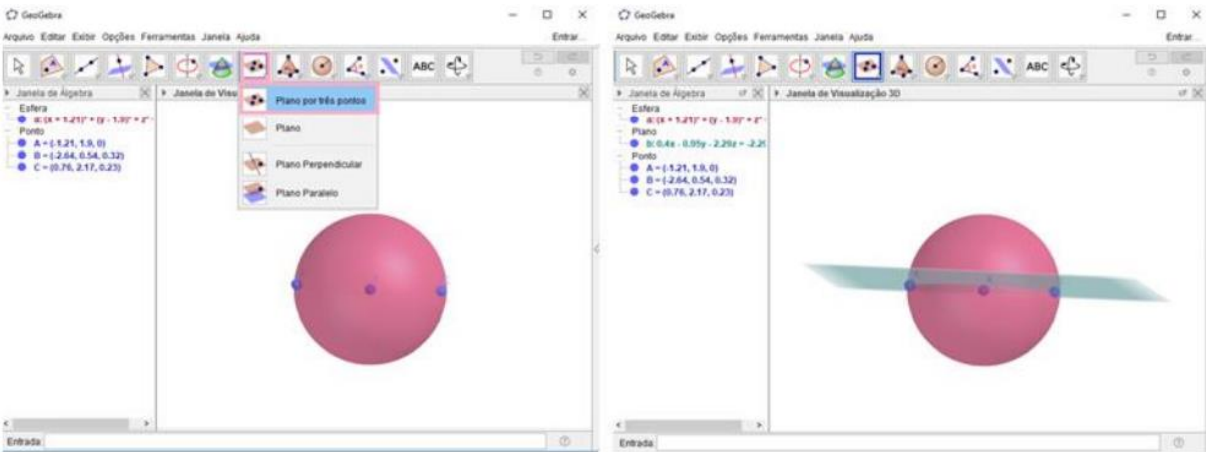
SEGUNDA ATIVIDADE – Introdução aos principais elementos da Geometria Esférica

Objetivo: Apresentar aos estudantes, por meio de construções no software Geogebra, os conceitos de círculo máximo e mínimo, pontos antípodas e arco de círculo máximo. Nesta atividade você irá conhecer alguns elementos fundamentais da Geometria Esférica. Para isso é necessário que você os construa com auxílio do Geogebra.

Segunda Atividade – Etapa I

1) No programa Geogebra, deixe somente a "janela de visualização 3D" aberta com o plano e os eixos ocultos. Em seguida, construa uma esfera qualquer e denomine seu centro de O. Se desejar, altere a cor e a transparência da esfera.
2) Utilizando a ferramenta "ponto em objeto", selecione dois pontos quaisquer sobre a esfera e, em seguida, selecione a ferramenta "plano por três pontos" para construir um plano passando pelo centro da esfera e pelos pontos escolhidos anteriormente.

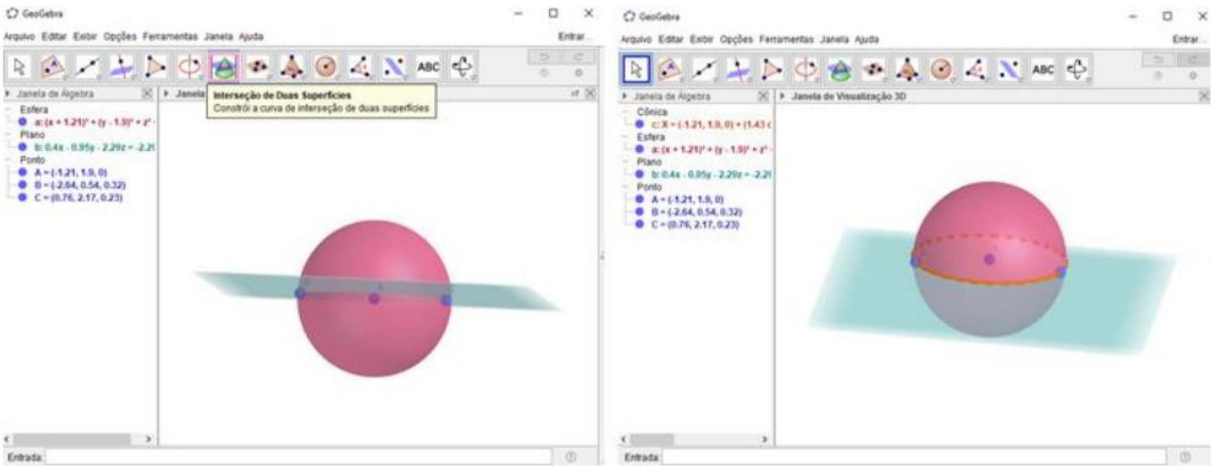
Figura 14 - Construção de um plano que passa pelo centro e dois pontos da esfera



Fonte: arquivo da atuora.

Debata com acerca do que pode ser a interseção do plano com a esfera.
3) Selecionando a ferramenta "interseção de duas superfícies", clique no plano e na esfera construídos no item anterior. Se necessário, para uma melhor visualização, altere o ângulo de visão da esfera pressionando o botão esquerdo do mouse, sobre uma área livre da janela de visualização, e arrastando o cursor.

Figura 15 - Interseção de um plano com uma esfera



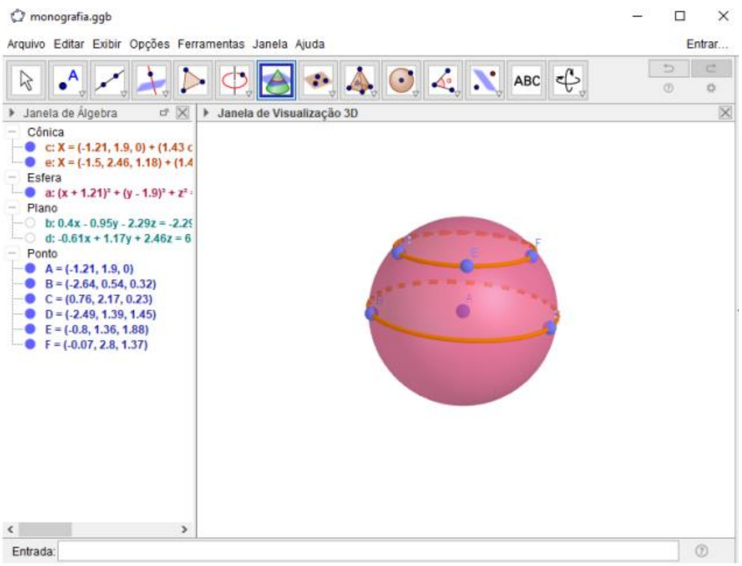
Fonte: arquivo da autora.

4) Você deve ter observado que a interseção encontrada no item anterior é um círculo. Compare o círculo obtido por você com o do colega ao lado. O que eles possuem em comum? Justifique sua resposta.

5) Utilizando a ferramenta “ponto em objeto” selecione três pontos sobre a esfera que não estejam contidos no plano construído anteriormente. Agora, construa um plano passando por esses pontos e, novamente, sua interseção com a esfera.

Em seguida, oculte os planos construídos para uma melhor visualização da sua construção.

Figura 16 - Interseções de dois planos diferentes com a esfera



Fonte: arquivo da autora.

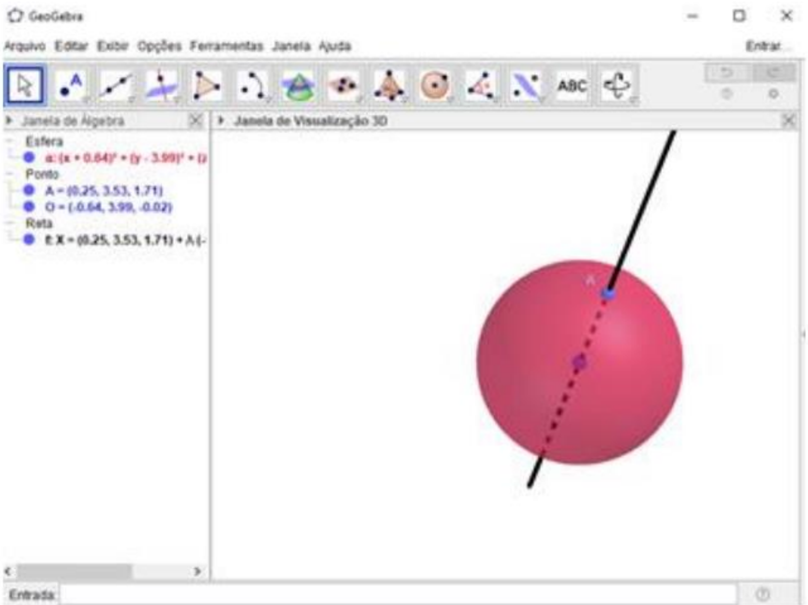
5) Mais uma vez, a interseção do seu plano com a esfera foi um círculo. Compare agora os dois círculos obtidos por você, sendo um neste item e o outro no item anterior. Eles são diferentes. Tente explicar o porquê de isso acontecer ao colega do seu lado.

6) Na Geometria Esférica, um círculo como o construído por você no item 4 é chamado círculo máximo. Um círculo máximo sobre uma esfera possui o centro coincidente com o centro da esfera e o mesmo raio da esfera. Já o círculo construído no item 5 é chamado círculo mínimo.

Segunda Atividade – Etapa II

1) Construa novamente uma esfera e denomine o seu centro por O. Agora, marque um ponto sobre a esfera nomeando-o de A e trace uma reta que passa por esse ponto e pelo centro O da esfera.

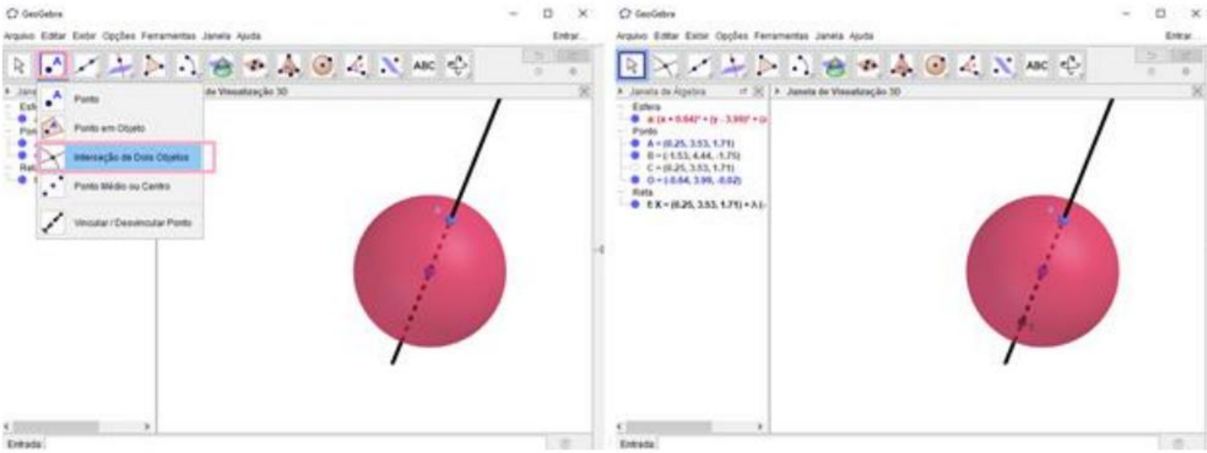
Figura 17 - Reta que passa por um ponto A e centro O da esfera



Fonte: arquivo da autora.

2) Utilizando a ferramenta “interseção de dois objetos” encontre os pontos de interseção da esfera com a reta criada anteriormente. Observe que um dos pontos de interseção é o próprio ponto escolhido sobre a esfera e denomine o outro ponto de B.

Figura 18 - Pontos A e B da interseção de uma reta secante a esfera



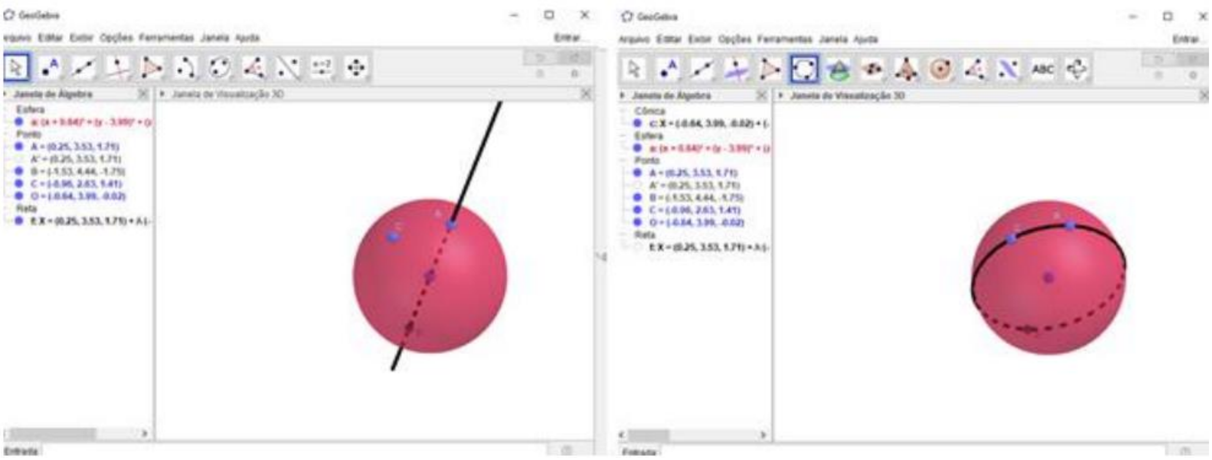
Fonte: arquivo da autora.

O que aconteceu com os dois pontos da reta que ficaram sobre a esfera? Eles possuem alguma característica especial? Compare a sua construção com seu colega e veja se ele encontrou a mesma coisa.

3) Os pontos A e B que você encontrou na atividade anterior são diametralmente opostos, ou seja, formam o diâmetro da esfera construída. Estes pontos serão chamados de pontos antípodas. Quaisquer outros dois pontos que não são diametralmente opostos serão chamados não antípodas.

4) Oculte a reta construída anteriormente, marque mais um ponto sobre a esfera e o nomeie de C. Trace agora um círculo máximo que passe por A e C (para isso não se esquece de construir um plano passando por A, C e O).

Figura 19 - Círculo máximo determinado por A e C



Fonte: arquivo da autora.

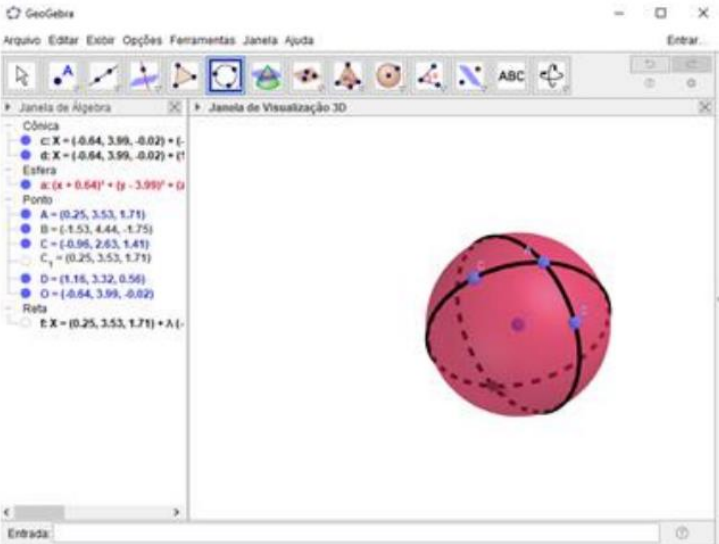
5) Você deve ter percebido que o círculo máximo está dividido pelos pontos A e C em duas partes, ou seja, em dois arcos. Essas partes serão denominadas na Geometria Esférica de arcos de círculo máximo.

6) Note que os arcos de círculo máximo que você criou no item anterior servem para ligar os pontos A e C utilizando percursos diferentes. Diremos que a distância entre A e C é o comprimento do menor dos dois arcos de círculo máximo que ligam A e C.

7) O menor arco de círculo máximo na Geometria Esférica é equivalente ao segmento de reta da Geometria Euclidiana. Você consegue relacioná-los? Discuta com seu colega ao lado.

8) Trace agora um círculo máximo qualquer passando por B. Você pode usar os pontos A e C, ou criar um novo ponto sobre a esfera.

Figura 20 - Interseção de dois círculos máximo



Fonte: arquivo da autora.

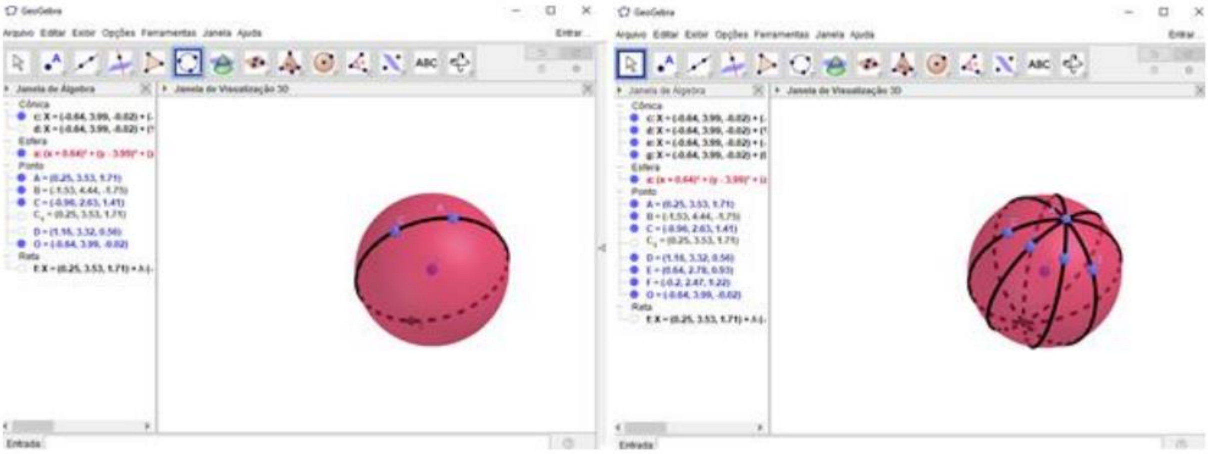
9) O círculo construído no item anterior intersecta o círculo construído em 4? Compare sua resposta com a de seus colegas.

10) É possível traçar um círculo máximo passando por B que não intersecta o círculo obtido em 4? Discuta com os outros alunos.

11) Você deve ter observado que, na Geometria Esférica, dois círculos máximo sempre se intersectam. Como os círculos máximo da Geometria Esférica equivalem às retas da Geometria Euclidiana, vemos que na Geometria Esférica retas paralelas se encontram! Discuta essa descoberta com seu colega. Isso te causa estranheza?

12) Para finalizar, descubra quantos círculos máximos existem passando por A e C e quantos existem passam por A e B.

Figura 21 - Círculo máximo determinado por A e C e círculos máximos determinados pelos pontos antípodas A e B



Fonte: arquivo da autora.

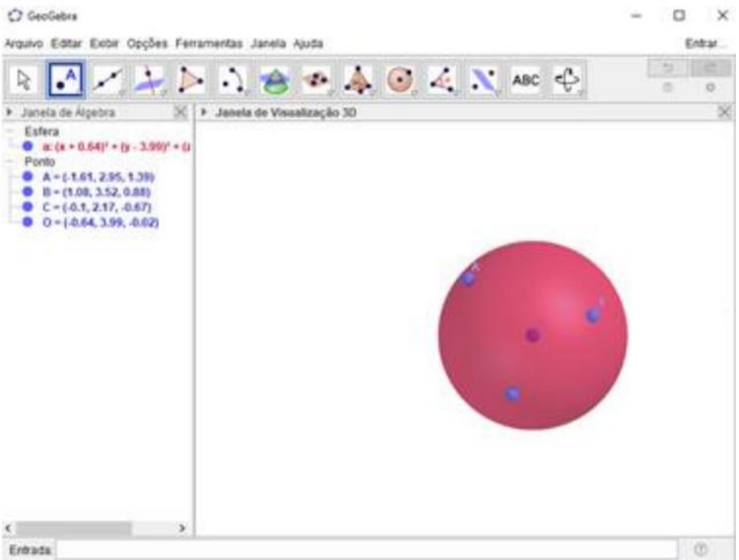
TERCEIRA ATIVIDADE – Triângulo Esférico

Objetivo: Apresentar o conceito de triângulo esférico, a partir de sua construção no Geogebra, e induzir o aluno a deduzir que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180º.

1) No Geogebra, oculte os eixos e o plano, e em seguida, construa uma esfera qualquer de centro O (se desejar, altere sua cor e transparência).

2) Marque três pontos sobre a esfera e denominando-os de A, B e C.

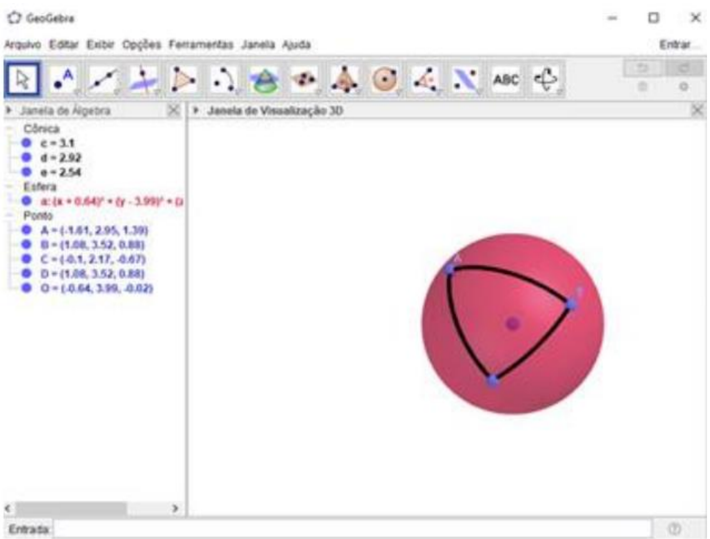
Figura 22 - Três pontos quaisquer de uma esfera



Fonte: arquivo da autora.

3) Com a ferramenta “arco circular”, construa os arcos de círculo máximo utilizando os pontos marcados anteriormente, dois a dois.

Figura 23 - Triângulo esférico



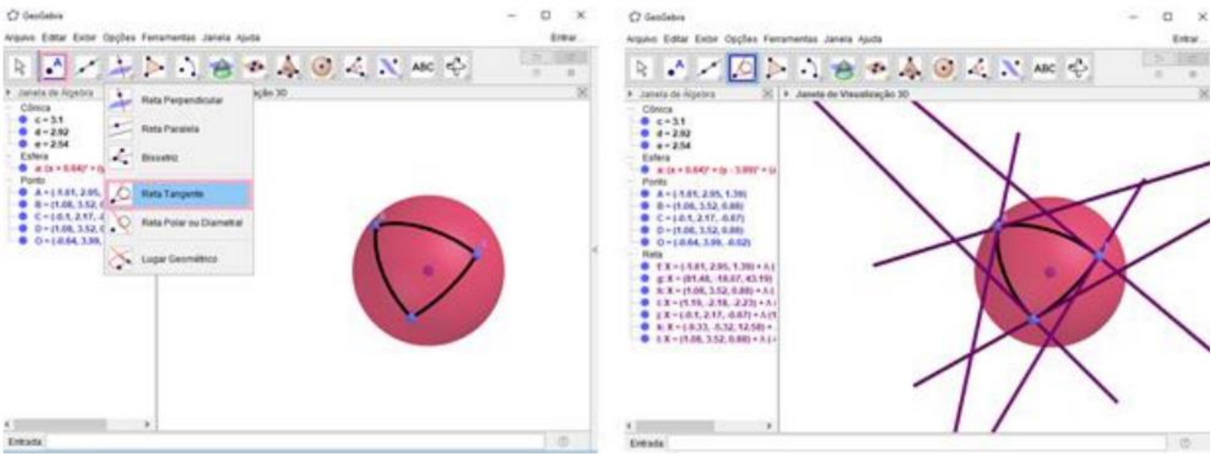
Fonte: arquivo da autora.

4) A figura obtida é semelhante à de seus colegas? Qual nome você daria para essa figura? Discuta com seus colegas.

5) A figura obtida no item 3 é chamada triângulo esférico ABC. Os pontos A, B e C são os vértices desse triângulo e os arcos construídos em 3 são os lados do triângulo esférico. Os ângulos internos desse triângulo, que chamaremos de ângulos esféricos, são definidos como o ângulo entre as retas tangentes aos círculos máximos nos vértices.

6) Com a ferramenta “reta tangente” selecione um vértice do triângulo esférico ABC e, em seguida, um dos círculos máximos determinado por ele. Repita a operação para o outro círculo máximo determinado por esse ponto para construir assim as duas retas tangentes ao círculo passando pelo vértice. Posteriormente repita a operação para os outros vértices.

Figura 24 - Retas tangentes aos lados do triângulo esférico ABC



Fonte: arquivo da autora.

7) Para medir o ângulo entre duas retas, selecione a ferramenta “ângulo” e selecione as retas tangentes a um dos vértices. Repita essa operação com as outras retas tangentes. Caso seja necessário, para melhorar a visualização diminua a transparência da esfera.

8) Você deve ter notado que o programa indica a medida dos ângulos esféricos do triângulo ABC. Agora some as medidas dos ângulos do triângulo esférico construído. Compare o valor obtido com o dos outros alunos, a resposta foi a mesma?

9) Sabendo o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer da Geometria Euclidiana, que relação você pode formar com a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico da Geometria Esférica?