Universidade do Estado do Amazonas
Centro de Estudos Superiores de Tefé
Licenciatura em Matemática

Equações Diferenciais Ordinárias: Um estudo dos modelos matemáticos que descrevem a Catenária e a Tractriz

Alex Oliveira Pinto

Tefé/Am - 2021

Digitalizado com CamScanner

Alex Oliveira Pinto

Trabalho de Conclusão de Curso

Equações Diferenciais Ordinárias: Um estudo dos modelos matemáticos que descrevem a Catenária e a Tractriz

Trabalho de Conclusão submetido ao Curso de Matemática do CEST/UEA, como requisito parcial para obtenção do grau em Matemática.

Orientadora:
Profa. Ma. Sabrina de Souza Rodrigues

Tefé/Am - 2021

Digitalizado com CamScanner

CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TEFÉ- CEST
CURSO: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
RESULTADO FINAL DO TCC

Dados de Identificação

Nome do (a) Aluno(a): Alex Oliveira Pinto

Título do trabalho: ***Equações Diferenciais Ordinárias: Um estudo sobre os modelos matemáticos que descrevem os modelos matemáticos da Catenária e da Tractriz***

Nome do (a) Professor(a) Orientador(a): MSc. Sabrina de Souza Rodrigues

Ano/Semestre: 2021_1 Turma: MATV_T01 Período: 8º

TCC (Resultado Final) 0,0 - 10,0
9,9

BANCA EXAMINADORA

Rodrigues

(Presidente e Orientador(a))

(Membro 01)

(Membro 02)

Alex Oliveira Pinto

Acadêmico (a)

Tefé/AM, 04 de dezembro de 2021.

Digitalizado com CamScanner

CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TEFÉ
COLEGIADO DE MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA PÚBLICA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 04 dias do mês de dezembro de 2021, às 15:33 h, em sessão pública via Google 5Meet, na presença da Banca Examinadora presidida pelo(a) Professor(a) MSc. Sabrina de Souza Rodrigues e composta pelos examinadores: 1. Professor(a) Esp. Cleiciele Gomes da Silva; 2. Professor(a) MSc. Simone Elizabeth Félix Frye, o(a) acadêmico(a) **Alex Oliveira Pinto** apresentou o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado: **"*Equações Diferenciais Ordinárias: Um estudo sobre os modelos matemáticos que descrevem a Catenária e a Tractriz*"**, como requisito curricular indispensável para a conclusão do Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do referido trabalho, divulgando o resultado formalmente ao(à) acadêmico(a) e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo(a) aluno(a).

Rodrigues.

Presidente da Banca Examinadora

Cleiciele Gomes da Silva

Examinador(a) 01

Examinador(a) 02

Alex Oliveira Pinto

Acadêmico (a)

Digitalizado com CamScanner

Sumário

Digitalizado com CamScanner

Capítulo 1

Contexto histórico

Quando se conhece bem problemas e/ou modelos clássicos na Matemática acabamos por nos familiarizar e ter mais facilidade de modelar situações novas. Nesta pesquisa estudamos especificamente dois modelos, o que descreve a catenária e o que descreve a tractriz.

As antigas civilizações tinham uma visão mítica sobre a realidade daquilo que não podiam explicar ou compreender, como por exemplo os fenômenos da natureza (raios, trovão, chuva e etc.), atribuindo suas origens aos deuses, o que acarretou na criação de mitologias.

O pensamento filosófico-científico, teve início entre os gregos com o advento da filosofia, que proporcionou o questionamento dos dogmas até então inabaláveis. Esse conhecimento advindo dos gregos procurava moldar as ciências da natureza, no que poderíamos chamar de um processo de matematização. Considera-se que a Matemática grega e o pensamento filosófico-científico tenham começado com Tales de Mileto e com Pitágoras, por volta do século VI a.C. (TALAVERA, 2008).

Com a fundação da Escola Pitagórica por volta de 530 a. C., imperou o princípio que os números governam todas as coisas, entretanto, não se sabe precisamente quando tomaram conhecimento de que nem tudo na natureza pode ser representado através de números naturais ($\mathbb{N}$) (TALAVERA, 2008). Especula-se que esse fato se deve ao problema sobre o cálculo da medida da diagonal de um quadrado, de medida unitária, para o qual na época não se tinha solução.

Com o declínio da Escola Pitagórica após a Idade Média, a Matemática grega voltou-se inteiramente para a geometria, fugindo da aritmética pitagórica. Os matemáticos gre-

Digitalizado com CamScanner

gos introduziram os estudos dos sólidos geométricos tradicionais e acreditavam que havia apenas duas maneiras de definir uma curva, através do movimento uniforme ou através da intersecção das superfícies geométricas já conhecidas como por exemplo planos, cones e cilindros (TALAVERA, 2008).

> "O momento culminante no desenvolvimento da geometria como ramo da matemática se produz quando Euclides escreve Os Elementos (séc. III a.C.) sintetizando o saber geométrico de sua época. A geometria euclidiana constitui de fato a primeira axiomatização na história da matemático"(PARRA e SAIZ, 2001, p. 237).

A Matemática grega possuía três problemas clássicos, a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo. Esses desafios não eram possíveis resolver com os conhecimentos geométricos da época, o que resultou no desenvolvimento de novas técnicas, como é o caso dos estudos das secções planas de um cone, as chamadas cônicas - parábola, hipérbole e elipse - descobertas pelo discípulo de Platão Menaecmus, no século IV a.C., e foram aprofundados por Apolônio de Perga (TALAVERA, 2008).

Destaca-se que a Matemática grega limitava-se, ao estudo das curvas pelo ponto de vista geométrico (TALAVERA, 2008), não englobavam portanto, um sistema de coordenadas pré-estabelecidas a fim de fazer uma representação ou análise gráfica de uma equação ou relação expressa (BOYER, 1999).

Aos estudiosos René Descartes (1596-1950) e Pierre de Fermat (1601- 1665) é atribuída a ideia central da geometria analítica que consiste em associar curvas a equações algébricas, a representação gráfica possibilitou um avanço no estudo tanto das curvas como das equações algébricas em geral (TALAVERA, 2008).

No século XIII, época do Renascimento, surge um processo de observação da natureza pelo ponto de vista da física. Nesse contexto vários problemas foram propostos envolvendo linhas ou superfícies flexíveis de acordo com observações feitas de processos mecânicos da natureza. Dentre eles, o problema do fio suspenso que se tornou um dos mais importantes e famosos da história do cálculo.

1.1 Contexto Histórico da Catenária

O estudo da catenária foi iniciado pelo matemático italiano, Galileu Galilei, (1564-1642), grande astrônomo, matemático e físico dos séculos XVI e XVII (MENDES, 2017). Entretanto:

Digitalizado com CamScanner

> “Galileu, erradamente supôs ter encontrado outra aplicação da parábola na curva de suspensão de uma corda ou corrente (catena) flexível, mas mais tarde, ainda no mesmo século, os matemáticos demonstraram que essa curva, a catenária, não só não é uma parábola como nem sequer é álgebra”(BOYER, 1999, pg. 232).

Este fato não foi um caso isolado ao longo da história, no Brasil em 1894, por exemplo, Olavo Freire em sua obra Noções de geometria prática, em sua décima quinta edição usou uma ponte pênsil como sendo um exemplo da representação de uma parábola.

O problema do fio suspenso foi lançado oficialmente a comunidade matemática em 1690, no *Acta eruditorum*, jornal fundado por Leibniz e anunciado por Jacob Bernoulli (1654-1705): “E agora vamos propor este problema: encontrar a curva formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos”(MAOR, 2004, p.183).

Johann Bernoulli (1667-1748) irmão de Jacob Bernoulli, chegou à solução do referido problema e além dele, Leibniz e Huygens. Johann Bernoulli redigiu uma carta para um amigo falando sobre seu feito e sua interação com seu irmão Jacob Bernoulli:

> “ [...] Os esforços de meu irmão foram inúteis. Quanto a min, fui mais feliz, pois encontrara a habilidade (e digo isto sem me gabar, por que deveria esconder a verdade?) para resolvê-lo inteiramente. [...] Na manhã seguinte, cheio de alegria, fui encontrar meu irmão, que ainda lutava miseravelmente com esse nó górdio, sem chegar à parte alguma, sempre achando, como Galileu, que a catenária era uma parábola. Pare! Pare!, Eu disse a ele, não se torture mais tentando provar a identidade da catenária com a parábola, porque ela é inteiramente falsa”(MAOR, 2004, pg. 184).

A família Bernoulli dedicou-se à investigação e ao ensino, essencialmente, de matemática. Cientificamente, contam com um extenso rol de contribuições associados ao estudo do cálculo (MARTINS, 2014). Jacob Bernoulli foi o primeiro da família a dedicar-se a Matemática, foi professor de Matemática na Basileia momento em que ensinou Matemática a Johann Bernoulli, os dois então começaram a se debruçar nos cálculos realizados por Leibniz, que até então eram vistos como confusos aos matemáticos da época. Vale ressaltar que embora a disputa entre estes intelectuais tenha sido exacerbada, é fato, que ambos deixaram profícuos conhecimentos que desencadearam no avanço do cálculo. (ALBRECHT e SCHEEREN, et. al. 2014).

O holandês Christiaan Huygens (1629-1695), que possivelmente recebeu o desafio do fio suspenso pelo matemático Marin Mersenne (1588-1648), demonstrou que uma corrente suspensa não poderia adquirir a forma de uma parábola, todavia não chegou a definir qual

Digitalizado com CamScanner

seria essa nova curva.

O alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) em 1961 publicou uma representação da catenária. Aliás, a palavra catenária vem do latim *catena* que significa cadeia ou corrente, a curva que representa a corrente suspensa foi batizada com este nome pelo próprio Leibniz.

Enquanto o método de Huygens era geométrico, o de Leibniz e Johann Bernoulli era analítico. A descoberta da equação da catenária pode ser considerada como uma importante solução dos problemas da história do cálculo (TALAVERA, 2008).

Definição 1. *Uma equação transcendente é uma equação que contém alguma função que não é redutível a uma fração entre polinômios, e cuja solução não pode ser expressa através de funções elementares.*

A catenária é uma curva de equação *transcendente*, podendo ser expressa, na notação moderna como:

$$y(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

Note que a é uma constante que depende dos parâmetros físicos da corrente massa por unidade de comprimento e a tensão com a qual ela é segura. Vale ressaltar que a equação da catenária não foi apresentada originalmente dessa forma, pois o número e ainda não tinha essa notação, pois a função exponencial não era considerada uma função independente, mas sim a função inversa da logarítmica (TALAVERA, 2008). Destarte a equação era subentendida a partir do modo como a curva foi construída por Leibniz (MAOR, 2004).

O cálculo desenvolvido por Newton e Leibniz permitiu um grande avanço para a Matemática, pois com essa ferramenta os engenheiros, físicos e astrônomos, que exploram o universo físico agora possuíam uma técnica para estudar as curvas não somente de forma geométrica, que era a forma tradicional, agora podiam estudar qualquer curva e função através de suas equações.

> "Portanto, o cálculo, a partir da solução do problema da corda suspensa, tornou-se menos geométrico e mais analítico, encontrando um amplo campo de aplicação no entendimento do universo físico e também no entendimento dos fenômenos físicos mensuráveis, como a gravitação, a luz, o calor, o som, a eletricidade, as ondas de rádio e o magnetismo"(TALAVERA, 2008, pg. 46).

Digitalizado com CamScanner

Essa curva mostrou inúmeras aplicações das quais citamos seu uso recorrente na engenheira e arquitetura, pois suas propriedades foram fundamentais para o aprimoramento das técnicas de construção de pontes pênseis. A resolução de problemas como o da corda suspensa possibilitou o desenvolvimento não apenas da teoria mecânica, mas também a análise (BOS, 1985).

Diante do exposto, a catenária foi um marco importante na história do cálculo diferencial e integral, proporcionou o aprimoramento, construção e desenvolvimento de conceitos em diversas áreas das ciências exatas, em especial na Matemática Aplicada.

1.2 Contexto Histórico da Tractriz

Outra curva que merece destaque na categoria de curvas que tiveram grande importância no desenvolvimento da matemática, é a tractriz . A tractriz, é um problema que trata de curvas de perseguição, chamando a atenção de matemáticos como Leibniz, Isaac Newton e Huyghens. O problema consistia determinar a trajetória descrita por um relógio de bolso enquanto a corrente do mesmo (de comprimento fixo) mantinha-se esticada e sua extremidade percorria uma linha reta (SECCO, 2019).

A curva foi denominada por Huyghens de tractriz, e é originada da palavra latina *trahere*, que significa puxar ou arrastar. O arquiteto francês Claude Perrault propôs o problema em 1670 a Leibniz que apesar de demonstrar interesse, não conseguiu solucioná-lo. O estudo dessa curva foi aprofundado por Isaac Newton seis anos mais tarde, que demonstrou ser constante o comprimento dos segmentos tangentes à curva. Foi resolvido por Huyghens em 1682 encontrando uma expressão analítica, além de generalizá-la (RAPOSO, 2013).

Os estudos da tractriz foram importantes por exemplo no desenvolvimento de veículos articulados, pois para estudar o deslocamento destes veículos, é necessário conhecer como se relaciona o percurso do centro do eixo dianteiro do mesmo com a respectiva posição, bem como saber que trajetória descreve o pneu dianteiro externo (pneu oposto ao volante), daí sua importância no nível rodoviário (RAPOSO, 2013). Além disso, a resolução do problema da tractriz propiciou uma ascensão no estudo das chamadas curvas de perseguição.

Uma característica da tractriz é que ela representa diversos percursos, desde o mo-

Digitalizado com CamScanner

vimento de um barco puxado por um operário por meio de uma corda de comprimento fixo ao longo da margem do cais, até o deslocamento de um cão em um passeio guiado por seu cuidador, em uma situação similar a anterior (BAVARESCO, VEIT, STROSCHEIN; 2020).

Tais constatações nos mostram a relevância de se estudar a catenária e a tractriz, bem como seus modelos matemáticos expressos por equações diferenciais ordinárias. Destaca-se que além de ser duas aplicações dentro da área das Equações Diferenciais, a Catenária e a Tractriz podem ser motivadora para o ensino do Cálculo, Geometria Diferencial, Cálculo Variacional e Análise Numérica.

Digitalizado com CamScanner

Capítulo 2

Equações Diferenciais

Uma equação diferencial (ED) é uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes. As equações diferenciais são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que envolve uma função $y = f(x)$, de uma variável independente e suas derivadas $\frac{d^n y}{dx^n}$. Quando a função incógnita depende de mais de uma variável temos uma equação diferencial parcial (EDP).

No presente trabalho são abordadas as equações diferenciais ordinárias, que podem ser expressas na forma padrão:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Ou em sua forma diferencial:

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$$

A ordem da Equação Diferencial Ordinária equivale a ordem da mais alta derivada, e o grau é a potência a que se acha elevada a derivada de ordem mais alta. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.0.1. *Determine a ordem e o grau das equações diferenciais.*

a) $y'' + 5y \cdot y' = e^{2x}$

Tem ordem 2 *e grau* 1.

b) $(y'')^4 - 3 \cdot (y')^7 + 2y = 0$

Tem ordem 2 *e grau* 4.

Digitalizado com CamScanner

c) $4 \cdot (y'')^7 - (y''')^5 + 8y = \cos(x)$

Tem ordem 3 e grau 5.

Observação 2.0.1. *No caso em que* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *e* $M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$ *temos ordem 1 e grau 1.*

Definição 2. *Uma equação diferencial é chamada* ***linear*** *quando pode ser escrita na forma:*

$$a_n(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_0(x) \cdot y = g(x)$$

A variável independente y *e todas as suas derivadas são de grau 1, e cada coeficiente depende apenas da variável independente* x.

Observação 2.0.2. *Uma equação que não é linear é chamada* ***não-linear***.

As Equações Diferenciais Ordinárias podem ser classificadas ainda como: homogêneas, exatas e separáveis.

Definição 3. ***(Homogêneas):*** *Uma Equação Diferencial Ordinária na forma padrão é dita homogênea de grau* n *se, para todo* $t \in R$, *é satisfeito:*

$$f(tx, ty) = t^k \cdot f(x, y)$$

E é dita homogênea de grau 0 se, para todo $t \in R$, *vale a relação:*

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

Definição 4. ***(Exata):*** *Dada uma Equação Diferencial Ordinária na forma diferencial, dizemos que é exata se vale a igualdade:*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Onde $M = M(x, y)$ *e* $N = N(x, y)$. *Essa igualdade é chamada Teste da Exatidão.*

No decorrer desse trabalho, é recorrente o uso do método de resolução das equações de variáveis separáveis logo será feito um estudo mais aprofundado para ajudar na compreensão do leitor.

Digitalizado com CamScanner

2.1 Equações Separáveis

Definição 5. *Seja a EDO na forma diferencial:*

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$$

Se $M(x, y) = A(x)$ e $N(x, y) = B(y)$, então dizemos que a EDO é de variáveis separáveis da forma:

$$A(x) \cdot dx + B(y) \cdot dy = 0 \tag{2.1}$$

Uma equação do tipo (2.1) pode ser resolvida como segue:

$$\int B(y) \cdot dy = -\int A(x) \cdot dx \tag{2.2}$$

No que segue apresentamos dois exemplos para melhor elucidar tais conceitos.

Exemplo 2.1.1. *Resolva a EDO:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{y^2}$$

Resolução 1. *Note que*

$$y^2 \cdot dy = -2x \cdot dx \tag{2.3}$$

Na equação (2.3) *o termo que acompanha* dy *depende apenas de* y, *e ainda o termo que acompanha* dx *depende apenas de* x, *logo trata-se de uma EDO de variáveis separáveis. Assim podemos resolver da forma* (2.2).

$$\begin{aligned} \int y^2 \cdot dy &= -\int 2x \cdot dx \\ \frac{y^3}{3} + c_1 &= -x^2 + c_2 \\ \frac{y^3}{3} + x^2 &= c_2 - c_1 \end{aligned}$$

Faça $c_2 - c_1 = c$, *de onde obtemos:*

$$\frac{y^3}{3} + x^2 = c$$

□

Exemplo 2.1.2. *Quando uma torta é retirada do forno, sua temperatura é de* 150°F, *dois minutos depois, sua temperatura passa para* 100°F. *Determine a função* $T(t)$ *que representa a temperatura da torta em cada instante* t, *se a temperatura do meio ambiente em que ela foi colocada é* 50°F*?*

Digitalizado com CamScanner

Resolução 2. *Dados:*

$$\begin{aligned} T_m &= 50°F \\ T(0) &= 150°F \\ T(2) &= 100°F \end{aligned}$$

A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de temperatura $T(t)$ *de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante* T_m *do meio ambiente, isto é,*

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_m) \tag{2.4}$$

Em que k *é a constante de proporcionalidade.*

Na equação (2.4) *substituímos* $T_m = 50°F$*, assim:*

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - 50) \tag{2.5}$$

Note que uma equação do tipo (2.5) *é de variáveis separáveis, isto é,*

$$\frac{dT}{T - 50} = k \cdot dt \tag{2.6}$$

Integrando ambos membros da equação (2.6) *segue:*

$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T - 50} &= \int k \cdot dt \\ \ln|T - 50| + c_1 &= kt + c_2 \end{aligned}$$

Fazendo $c_3 = c_2 - c_1$*. De onde:*

$$\begin{aligned} \ln|T - 50| &= kt + c_3 \\ T - 50 &= e^{kt + c_3} \end{aligned}$$

Chame $c_4 = e^{c_3}$ *e assim temos:*

$$\begin{aligned} T - 50 &= c_4 \cdot e^{kt} \\ T(t) &= c_4 \cdot e^{kt} + 50 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Considerando que $T(0) = 150°F$*, e substituindo na equação(2.7) resulta:*

$$\begin{aligned} T(0) &= c_4 \cdot e^{k.0} + 50 \\ 150 &= c_4 + 50 \\ c_4 &= 100 \end{aligned}$$

Digitalizado com CamScanner

Substituindo o valor de c_4 *encontrado na equação* (2.7), *segue que:*

$$\mathsf{T}(t) = 100 \cdot e^{kt} + 50 \tag{2.8}$$

Por outro lado, temos $\mathsf{T}(2) = 100°\mathsf{F}$, *e substituindo na equação* (2.8) *determinamos a constante de proporcionalidade:*

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}(2) &= 100 \cdot e^{2k} + 50 \\
100 &= 100 \cdot e^{2k} + 50 \\
100 \cdot e^{2k} &= 50 \\
e^{2k} &= \frac{1}{2} \\
k &= \frac{\ln|\frac{1}{2}|}{2} \\
k &\cong -0,3465736
\end{aligned}$$

Voltamos a equação (2.8) *para substituir o valor de* $k \cong -0,3465736$, *e portanto a função* $\mathsf{T}(t)$ *que representa a temperatura da torta em cada instante* t *é dada por:*

$$\mathsf{T}(t) = 100 \cdot e^{-3,3465736.t} + 50$$

□

2.2 Equação Diferencial Linear de 2ª ordem

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é da forma:

$$a_2(x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_0(x) \cdot y = g(x)$$

ou ainda:

$$a_2(x) \cdot y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = g(x)$$

Dependendo da notação que se adotar, se $g(x)$ é identicamente nula, a equação diferencial é chamada **homogênea**, caso contrário **não-homogênea**.

Para encontrar a equação que descreve a catenária iremos partir de uma equação diferencial linear de segunda ordem, como veremos mais adiante a função incógnita será *transcendente*. Na maioria dos casos, essas equações não possuem uma solução expressa através de funções conhecidas, sendo necessário recorrer ao cálculo numérico e seus métodos para se obter uma solução.

Digitalizado com CamScanner

Capítulo 3

Funções Hiperbólicas e suas propriedades

As funções hiperbólicas são definidas de forma similar as funções trigonométricas, isto é, usando a hipérbole equilátera, da mesma maneira que as trigonométricas com o círculo unitário.

São expressas por exponenciais, na forma:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Obs 1. *Vale relembrar que o* $\cosh(x)$ *é uma função par e* $\sinh(x)$ *é uma função ímpar, isto é,* $\cosh(x) = \cosh(-x)$ *e* $\sinh(x) = -\sinh(x)$*, para todo* $x \in D(f)$.

A partir dessas funções, deduzimos as demais:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\mathsf{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\mathsf{cossech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Ademais são válidas as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ 1 - \tanh^2(x) &= \mathsf{sech}^2(x) \\ \coth^2(x) - 1 &= \mathsf{cossech}^2(x) \end{aligned}$$

Digitalizado com CamScanner

Como visto as funções trigonométricas e as hiperbólicas possuem semelhanças, porém existem diferenças sutis como é o caso do $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$ não possuírem períodos, a função $\sinh(x)$ é ilimitada, o $\cosh(x)$ varia de 1 ate $+\infty$; já a $\tanh(x)$ é limitada variando de -1 a 1.

Se tomarmos $x_o = c \cdot x$ onde x_0, c são constantes reais com $x \neq 0$. Então por (3.1) temos:

$$\cosh(c \cdot x) = \frac{e^{cx} + e^{-cx}}{2} \tag{3.2}$$

Funções Hiperbólicas são fundamentais para resolver o problema da Catenária, tendo em vista que a solução da equação diferencial que descreve a curva é dada por funções hiperbólicas. Para um estudo mais detalhado das funções hiperbólicas o leitor pode consultar [3]. Ademais para ajudar na compreensão, apresentamos o exercício do livro Equações Diferenciais do autor Nagle(2012) encontrado na página 122.

Exemplo 3.0.1. *Um modo de definir funções hiperbólicas é por meio de equações diferenciais, assim, considere a equação* $y'' - y = 0$. *O cosseno hiperbólico,* $\cosh(x)$, *é definido como a solução dessa equação sujeita aos valores iniciais:* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 0$. *O seno hiperbólico,* $\sinh(x)$, *é definido como a solução dessa equação sujeita aos valores iniciais:* $y(0) = 0$ *e* $y'(0) = 1$.

a) Resolva estes problemas de valor inicial para derivar fórmulas explícitas para $\cosh(x)$ *e* $\sinh(x)$. *Mostre também que* $\frac{d}{dx}[\cosh(x)] = \sinh(x)$ *e* $\frac{d}{dx}[\sinh(x)] = \cosh(x)$.

Resolução 3. *Para o* $\cosh(x)$ *temos a Equação Diferencial:*

$$y'' - y = 0 \tag{3.3}$$

Com o problema de valor inicial:

$$y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = 0$$

A equação característica associada para (3.3) *é* $r^2 - 1 = 0$, *e que possui duas raízes reais distintas* $r = \pm 1$, *assim:*

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} \tag{3.4}$$

Derivando a equação (3.4) *com relação a* x *obtemos:*

$$y'(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} \tag{3.5}$$

Digitalizado com CamScanner

Substituindo os valores dados de condição inicial em (3.4) *e* (3.5) *temos o sistema:*

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima encontramos $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$.

Voltando a equação (3.4) *e substituindo os valores de* c_1 *e* c_2 *segue que:*

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$$

Para o $\sinh(x)$ *novamente considere* $y'' + y = 0$ *em que* $y(0) = 0$ *e* $y'(0) = 1$ *são as condições de valores iniciais dadas.*

A equação característica associada é $r^2 - 1 = 0$, *de onde* $r = \pm 1$, *assim:*

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} \tag{3.6}$$

Derivando a equação (3.6) *com relação a* x *obtemos:*

$$y'(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} \tag{3.7}$$

Substituindo os valores dados de condição inicial em (3.6) *e* (3.7) *tem-se:*

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

De onde segue que $c_1 = 1/2$ *e* $c_2 = -1/2$.

Substituindo os valores de c_1 *e* c_2 *na equação* (3.6) *concluímos que:*

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$$

Tomemos agora $y(x) = \cosh(x)$, *assim:*

$$\frac{d}{dx}[\cosh(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})\right] = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$$

Por outro lado fazendo $y(x) = \sinh(x)$, *segue que:*

$$\frac{d}{dx}[\sinh(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})\right] = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$$

$\square$

Digitalizado com CamScanner

b) Prove que uma solução geral da equação $y'' - y = 0$ *é dada por:* $y(x) = c_1 \cdot \cosh(x) + c_2 \cdot \sinh(x)$.

Resolução 4. *Para provar tomemos a função:*

$$y(x) = c_1 \cdot \cosh(x) + c_2 \cdot \sinh(x) \tag{3.8}$$

Derivando a equação (3.8) *duas vezes com relação a* x *obtemos:*

$$y''(x) = c_1 \cdot \cosh(x) + c_2 \cdot \sinh(x) \tag{3.9}$$

Substituindo (3.8) *e* (3.9) *na equação diferencial* $y'' - y = 0$, *obtemos:*

$$c_1 \cdot \cosh(x) + c_2 \cdot \sinh(x) - [c_1 \cdot \cosh(x) + c_2 \cdot \sinh(x)] = 0$$

De fato, a função (3.8) *satisfaz a equação diferencial dada. Note ainda que com as condições iniciais* $\cosh(0) = 1$ *e* $\sinh(0) = 0$, $\cosh(x)$ *e* $\sinh(x)$ *sã linearmente independentes em* $(-\infty, \infty)$.

□

c) Suponha que a, b *e* c *sejam constantes dadas para as quais* $a \cdot r^2 + b \cdot c + c = 0$ *tem duas raízes reais distintas. Se as duas raízes forem expressas na forma* $\alpha - \beta$ *e* $\alpha + \beta$, *mostre que a solução geral da equação* $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$ *é* $y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cosh(\beta x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sinh(\beta x)$.

Resolução 5. *Primeiramente, sejam* $r_1 = \alpha + \beta$ *e* $r_2 = \alpha - \beta$ *duas raízes reais e distintas da equação característica* $a \cdot r^2 + b \cdot c + c = 0$, *considerando esta hipótese, devemos ter que a solução geral para a equação diferencial* $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$ *deve ser da forma:*

$$y(x) = c_3 \cdot e^{r_1 x} + c_4 \cdot e^{r_2 x} \tag{3.10}$$

Substituindo r_1 *e* r_2 *em* (3.10) *obtemos:*

$$y(x) = c_3 \cdot e^{(\alpha+\beta)x} + c_4 \cdot e^{(\alpha-\beta)x}$$
$$y(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(c_3 \cdot e^{\beta x} + c_4 \cdot e^{-\beta x}\right) \tag{3.11}$$

Note que:

$$\cosh(\beta x) + \sinh(\beta x) = \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} + \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} = e^{\beta x} \tag{3.12}$$
$$\cosh(\beta x) - \sinh(\beta x) = \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} - \left[\frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2}\right] = e^{-\beta x} \tag{3.13}$$

Digitalizado com CamScanner

Substituindo (3.12) *e* (3.13) *em* (3.11) *obtemos:*

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\alpha x} \cdot \{c_3 \cdot [\cosh(\beta x) + \sinh(\beta x)] + c_4 \cdot [\cosh(\beta x) - \sinh(\beta x)]\} \\ &= e^{\alpha x} \cdot \{c_3 \cdot \cosh(\beta x) + c_4 \cdot \cosh(\beta x) + c_3 \cdot \sinh(\beta x) - c_4 \cdot \sinh(\beta x)\} \\ &= e^{\alpha x} \cdot \{[c_3 + c_4] \cdot \cosh(\beta x) + [c_3 - c_4] \cdot \sinh(\beta x)\} \end{aligned}$$

Fazendo $c_1 = c_3 + c_4$ *e* $c_2 = c_3 - c_4$ *temos:*

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cosh(\beta x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sinh(\beta x) \tag{3.14}$$

□

d) Use o resultado da parte (c) *para resolver o problema de valor inicial:* $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -17/2$.

Resolução 6. *Note que a equação* $y'' + y' - 6y = 0$, *é o caso da equação* $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$ *em que* $a = 1$, $b = 1$ *e* $c = -6$ *com* $r_1 = -1/2 + 5/2$ *e* $r_2 = -1/2 - 5/2$, *assim pelo item* c *equação* (3.14) *uma solução geral dessa equação é da forma:*

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cosh\left(\frac{5}{2}x\right) + c_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sinh\left(\frac{5}{2}x\right) \tag{3.15}$$

Derivando (3.15) *com relação a* x *encontramos:*

$$y'(x) = \left[-\frac{1}{2} \cdot c_1 + \frac{5}{2} \cdot c_2\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cosh\left(\frac{5}{2}x\right) + \left[-\frac{1}{2} \cdot c_2 + \frac{5}{2} \cdot c_1\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sinh\left(\frac{5}{2}x\right) \tag{3.16}$$

Aplicando as condições iniciais dadas

$$y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = -\frac{17}{2}$$

obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{5}{2}c_2 = 1 \end{cases}$$

Cuja solução é $c_1 = 2$ *e* $c_2 = -3$, *substituindo em* (3.15) *temos:*

$$y(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cosh\left(\frac{5}{2}x\right) - 3 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sinh\left(\frac{5}{2}x\right) \tag{3.17}$$

Essa é a solução que satisfaz a equação diferencial com os valores iniciais dados.

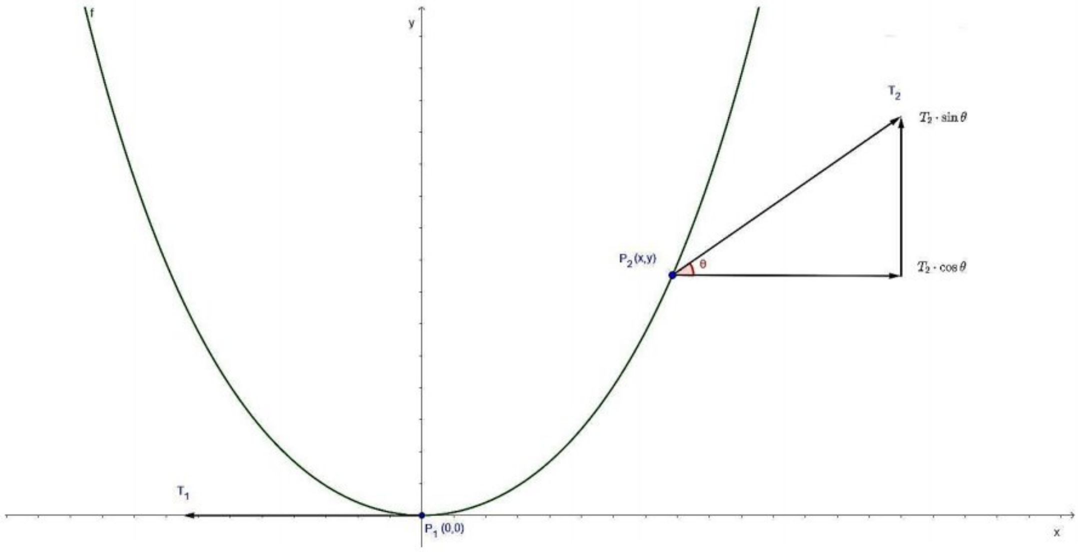
□

Digitalizado com CamScanner

Capítulo 4

Modelo Matemático da Catenária

Suponhamos uma corda flexível de densidade uniforme suspensa entre dois pontos sujeita apenas a ação da gravidade. Escolha um sistema de coordenadas cartesiano, de modo que o eixo dos y passe pelo ponto P_1, o mais baixo da corda, e seja ortogonal à curva nesse ponto. Note que a curva é simétrica em relação ao eixo dos y assim escolhido figura abaixo:



Fonte: Oliveira, 2021.

Tome um outro ponto P_2 qualquer da curva e denote por S o comprimento da curva, de $P_1 = (0,0)$ a $P_2 = (x, y)$. Seja w_0 a densidade linear (peso/unidade de comprimento) da corda.

A parte da corda entre os pontos P_1 e P_2 está em equilíbrio estático sob a ação de três forças: a tensão T_1 em P_1, a tensão T_2 em P_2 está atuando na direção da tangente devido a flexibilidade da corda e o peso da corda $w_0 \cdot S$.

Digitalizado com CamScanner

Seja θ o ângulo formado pela reta tangente à curva em P_2 e o eixo dos x. A tensão T_2 tem duas componentes, uma horizontal e outra vertical. Como a corda está em equilíbrio estático temos:

$$\begin{cases} T_2 \cdot \sin(\theta) = w_0 \cdot S \\ T_2 \cdot \cos(\theta) = T_1 \end{cases}$$

De onde resulta

$$\tan(\theta) = \frac{w_0 \cdot S}{T_1} \tag{4.1}$$

Onde w_0 e T_1 são constantes reais.

Em (4.1) temos $\tan(\theta) = \frac{dy}{dx}$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w_0 \cdot S}{T_1} \tag{4.2}$$

Note ainda que em (4.2), S é uma função de x. Por isso podemos reescrever:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{T_1} \cdot S(x) \tag{4.3}$$

Lembre-se que a função comprimento do arco entre os pontos P_1 e P_2 é dada por:

$$S(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{4.4}$$

Assim, substituindo (4.4) na equação (4.3) obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{T_1} \cdot \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{4.5}$$

Derivando ambos os membros da equação (4.5) com relação a x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_0}{T_1} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{4.6}$$

Na equação (4.6) obtivemos uma equação diferencial ordinária não-linear de segunda ordem cuja solução é a função que tem como gráfico a catenária.

Para facilitar os cálculos tome $c = \frac{w_0}{T_1}$, em que c é uma constante real. Na equação (4.6) reduzimos a ordem através da substituição $g(x) = \frac{dy}{dx}$, de onde obtemos:

$$\begin{aligned} g^{'}(x) &= c \cdot \sqrt{1 + [g(x)]^2} \\ \frac{g^{'}(x)}{\sqrt{1 + [g(x)]^2}} &= c \\ \frac{1}{\sqrt{1 + [g(x)]^2}} \cdot \frac{dg}{dx} &= c \\ \frac{dg}{\sqrt{1 + [g(x)]^2}} &= c \cdot dx \end{aligned} \tag{4.7}$$

Digitalizado com CamScanner

Observe que a equação (4.7) é uma EDO de variáveis separáveis, logo pode ser resolvida da forma (2.2), e assim:

$$\int \frac{dg}{\sqrt{1+[g(x)]^2}} = \int c \cdot dx \tag{4.8}$$

Na equação (4.8) a integral do lado direito da igualdade sai de forma direta. Já para o primeiro membro utilizaremos substituição trigonométrica.

Seja $g(x) = \tan(\theta)$, então $dg = \sec^2(\theta) \cdot d\theta$, consideremos também a identidade trigonométrica $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$, substituímos na equação (4.8) e temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sec^2(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} \cdot d\theta &= c \cdot \int dx \\
\int \frac{\sec^2(\theta)}{\sqrt{\sec^2(\theta)}} \cdot d\theta &= c \cdot (x + k_0) \\
\int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)} \cdot d\theta &= c \cdot x + c \cdot k_0 \\
\int \sec(\theta) d\theta &= c \cdot x + c \cdot k_0 \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Faça $k_1 = c \cdot k_0$ na equação (4.9) de onde:

$$\begin{aligned}
\int \sec(\theta) d\theta &= c \cdot x + k_1 \\
\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + k_2 &= c \cdot x + k_1 \\
\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| &= c \cdot x + k_1 - k_2 \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Lembre-se que $\tan(\theta) = g(x)$ e $\sec(\theta) = \sqrt{1+[g(x)]^2}$, então substituindo na equação (4.10) obtemos:

$$\ln|\sqrt{1+[g(x)]^2} + g(x)| = c \cdot x + k_1 - k_2 \tag{4.11}$$

Na equação (4.11) lembre que tomamos $g(x) = \frac{dy}{dx} = y'(x)$ logo $g(0) = y'(0) = 0$, então $k_1 = k_2$. Assim temos:

$$\begin{aligned}
\ln|\sqrt{1+[g(x)]^2} + g(x)| &= c \cdot x \\
\sqrt{1+[g(x)]^2} + g(x) &= e^{cx} \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Elevando os dois membros da equação (4.12) ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}
\left\{\sqrt{1+[g(x)]^2} + g(x)\right\}^2 &= e^{2cx} \\
[g(x)]^2 + 2 \cdot g(x) \cdot \sqrt{1+[g(x)]^2} + 1 + [g(x)]^2 &= e^{2cx} \\
1 + 2 \cdot [g(x)]^2 &= e^{2cx} - 2 \cdot g(x) \cdot \sqrt{1+[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

(4.13)

Digitalizado com CamScanner

De (4.12) vem que $\sqrt{1+[g(x)]^2} = e^{cx} - g(x)$, substituindo na equação (4.13) obtemos:

$$\begin{aligned}
1 + 2 \cdot [g(x)]^2 &= e^{2cx} - 2 \cdot g(x) \cdot [e^{cx} - g(x)] \\
1 + 2 \cdot [g(x)]^2 &= e^{2cx} - 2 \cdot g(x) \cdot e^{cx} + 2 \cdot [g(x)]^2 \\
1 &= e^{2cx} - 2 \cdot g(x) \cdot e^{cx} \\
2 \cdot g(x) \cdot e^{cx} &= e^{2cx} - 1 \\
2 \cdot g(x) &= \frac{e^{2cx} - 1}{e^{cx}} \\
2 \cdot g(x) &= e^{cx} - e^{-cx} \\
g(x) &= \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Lembre-se que $g(x) = \frac{dy}{dx}$, então substituindo na equação (4.14) vem:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} \\
\int dy &= \int \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} \cdot dx \\
y(x) + k_3 &= \frac{e^{cx} + e^{-cx}}{2c} + k_4 \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Fazendo $k_5 = k_4 - k_3$, na equação (4.15) obtemos:

$$y(x) = \frac{1}{c} \cdot \frac{e^{cx} + e^{-cx}}{2} + k_5 \qquad (4.16)$$

Na equação (4.16) por (3.2) segue que:

$$y(x) = \frac{1}{c} \cdot \cosh(c \cdot x) + k_5 \qquad (4.17)$$

Em (4.17) temos a equação da Catenária, observe que o valor da constante k_5 só depende da escolha feita na colocação do eixo x. No caso em que $y(0) = 0$, na equação (3.17) temos que $k_5 = -\frac{1}{c}$. Assim:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{c} \cdot \cosh(c \cdot x) - \frac{1}{c} \\
y(x) &= c^{-1} \cdot [\cosh(c \cdot x) - 1]
\end{aligned}$$

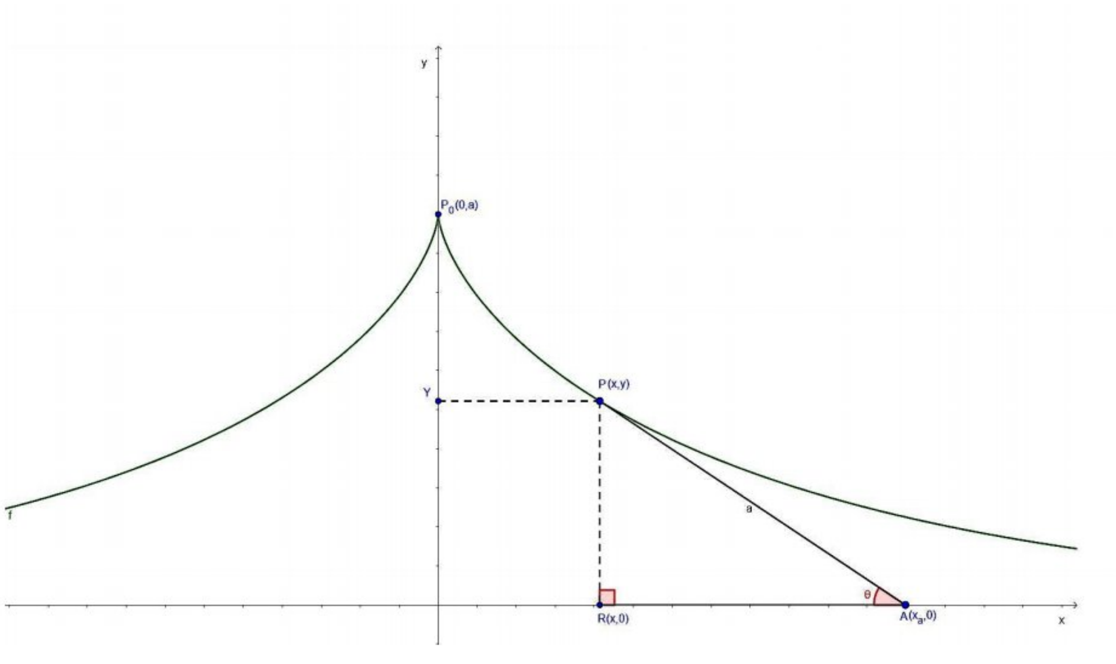
Assim, a catenária é a curva assumida por uma corda suspensa por duas extremidades sujeita sob a ação do seu próprio peso em que as tensões internas equilibram naturalmente o peso, e portanto é comum utilizá-la em diversas áreas tais como: engenharia, arquitetura, física e etc.

Digitalizado com CamScanner

Capítulo 5

Modelo Matemático da Tractriz

Suponhamos que uma partícula localizada num ponto $P = (x, y)$ é arrastada num plano horizontal Oxy, por meio de uma corda fixa $\overline{PA}$, com comprimento a, sendo $A = (x_a, 0)$ um ponto que se desloca no semieixo positivo das abcissas. A curva descrita pela partícula arrastada é uma tractriz, como ilustra a figura seguinte:



Fonte: Oliveira, 2021.

Considere também o ângulo θ formado entre o segmento $\overline{PA}$ e o eixo x. Note que:

$$\sin(\theta) = \frac{y}{a} \tag{5.1}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a} \tag{5.2}$$

Digitalizado com CamScanner

A reta r que passa pelos pontos $P = (x, y)$ e $A = (x_a, 0)$ é dada por:

$$y = m \cdot (x - x_a)$$

Lembre-se que $m = f'(x)$, assim:

$$y = f'(x) \cdot (x - x_a) \tag{5.3}$$

Denote por R o ponto de coordenadas $(x, 0)$. Considere o triângulo formado pelos pontos $P = (x, y)$, $A = (x_a, 0)$ e $R = (x, 0)$, reto em R, os lados desse triângulo são os segmentos $\overline{PR} = y$, $\overline{RA} = x - x_a$, $\overline{PA} = a$. Aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$\begin{aligned} y^2 + (x - x_a)^2 &= a^2 \\ (x - x_a)^2 &= a^2 - y^2 \\ x - x_a &= \pm\sqrt{a^2 - y^2} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Onde o sinal $(-)$ indica o sentido de percurso positivo do ponto P ao longo da curva, e o sinal $(+)$ indica o sentido de percurso oposto. Vamos considerar o caso do sinal $(+)$. Substituindo (5.4) em (5.3) temos:

$$\begin{aligned} y &= f'(x) \cdot \sqrt{a^2 - y^2} \\ f'(x) &= \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Em (5.5) lembre que $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \tag{5.6}$$

Definição 6. *Um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é dito singular de $f(x)$ quando não se pode calcular $f(x_0)$, ou seja, f não é analítica em x_0.*

Definição 7. *Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto singular de $f(x)$ então P_1 é uma cúspide de $f(x)$ se $f'(x_0) \neq 0$ e $f^{(3)}(x_0)$ não é paralela a $f''(x_0)$*

Considere a *cúspide* $P_0 = (0, a)$ como sendo um ponto da tractriz, logo temos o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \\ y(0) = a \end{cases}$$

Digitalizado com CamScanner

Note que a equação (5.6) é de variáveis separáveis, logo

$$dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \cdot dy \tag{5.7}$$

A equação (5.7) pode ser resolvida da forma (2.2), assim:

$$\begin{aligned} \int dx &= \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \cdot dy \\ x + k_1 &= \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \cdot dy \end{aligned} \tag{5.8}$$

Na equação (5.8) a integral do primeiro membro saiu de forma direta e para o segundo membro considere a substituição $y = a \cdot \sin(\theta)$ então $dy = a \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta$, de onde aplicando em (5.6) temos:

$$\begin{aligned} x + k_1 &= \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \cdot \sin^2(\theta)}}{a \cdot \sin(\theta)} \cdot a \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta \\ &= \int \frac{\sqrt{a^2 \cdot (1 - \sin^2(\theta))}}{\sin(\theta)} \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta \end{aligned} \tag{5.9}$$

Em (5.9) considere a identidade trigonométrica $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$ logo:

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2(\theta)}}{\sin(\theta)} \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta \\ &= \int \frac{a \cdot \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta \\ &= a \cdot \int \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot d\theta \\ &= a \cdot \int \frac{1 - \sin^2(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot d\theta \\ &= a \cdot \left[\int \frac{1}{\sin(\theta)} \cdot d\theta - \int \sin(\theta) \cdot d\theta \right] \\ &= a \cdot \left[\int \csc(\theta) d\theta - \int \sin(\theta) \cdot d\theta \right] \\ &= a \cdot \left[\int \csc(\theta) \cdot \frac{\csc(\theta) - \cot(\theta)}{\csc(\theta) - \cot(\theta)} d\theta - \int \sin(\theta) \cdot d\theta \right] \\ &= a \cdot \left[\int \frac{\csc^2(\theta) - \cot(\theta) \cdot \csc(\theta)}{\csc(\theta) - \cot(\theta)} d\theta - \int \sin(\theta) \cdot d\theta \right] \end{aligned} \tag{5.10}$$

Em (5.10) considere a substituição:

$$u = \csc(\theta) - \cot(\theta)$$

então derivando u com relação a θ tem-se:

$$du = \left[\csc^2(\theta) - \cot(\theta) \cdot \csc(\theta)\right] \cdot d\theta$$

Digitalizado com CamScanner

De onde segue,

$$
\begin{aligned}
&= a \cdot \left[\int \frac{du}{u} - \int \sin(\theta) \cdot d\theta\right] \\
&= a \cdot [\ln|u| - \cos(\theta)] + k_2 \\
&= a \cdot [\ln|\csc(\theta) - \cot(\theta)| - \cos(\theta)] + k_2 \\
&= a \cdot \left[\ln\left|\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right| - \cos(\theta)\right] + k_2
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Por (5.1) e (5.2) temos em (5.11) que:

$$
\begin{aligned}
&= a \cdot \left[\ln\left|\frac{1-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}}{\frac{y}{a}}\right| - \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right] + k_2 \\
&= a \cdot \left[\ln\left|\left(1-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right)\cdot\frac{a}{y}\right| - \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right] + k_2 \\
&= a \cdot \left[\ln\left|\left(\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right)\cdot\frac{a}{y}\right| - \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right] + k_2 \\
&= a \cdot \left[\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right| - \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right] + k_2 \\
&= a \cdot \ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right| - \sqrt{a^2-y^2} + k_2 \\
x + k_1 &= a \cdot \ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right| - \sqrt{a^2-y^2} + k_2 \\
x &= a \cdot \ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right| - \sqrt{a^2-y^2} + k_2 - k_1
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Em (5.12) seja $k_3 = k_2 - k_1$, logo:

$$
x = a \cdot \ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right| - \sqrt{a^2-y^2} + k_3 \tag{5.13}
$$

Em (5.13) considere o problema de valor inicial $y(0) = a$, assim:

$$
\begin{aligned}
0 &= a \cdot \ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-a^2}}{a}\right| - \sqrt{a^2-a^2} + k_3 \\
0 &= a \cdot \ln\left|\frac{a}{a}\right| + k_3 \\
0 &= a \cdot \ln|1| + k_3 \\
k_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Substituimos o valor de $k_3 = 0$ em (5.13) e obtemos:

$$
x = a \cdot \ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right| - \sqrt{a^2-y^2} \tag{5.15}
$$

Digitalizado com CamScanner

A equação (5.15) expressa a equação da tractriz.

Encontramos também a presença da tractriz no livro de Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies (2012) do autor Manfredo Perdigão do Carmo, primeiro capítulo, subtópico Curvas Regulares e Comprimento de Arco, especificamente no exercício proposto 4 (p. 9) que propõe:

Exercício 5.0.1. *Seja* $\alpha : (0, \pi) \to \mathbf{R}^2$ *dada por:*

$$\alpha(t) = \left(\operatorname{sen} t, \cos t + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \tag{5.16}$$

onde t é o ângulo que o vetor $\alpha'(t)$ *faz com o eixo Oy. O traço de* α *é chamado de* ***tractriz***.

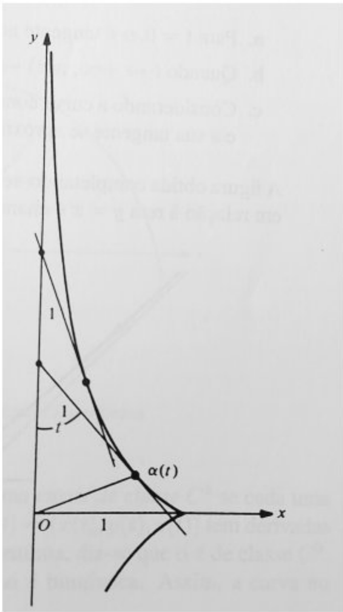


Imagem: Retirado de Perdigão (2012,p.9)

Mostre que:

a. α *é uma curva diferenciável parametrizada, regular exceto em* $t = \frac{\pi}{2}$.

b. O comprimento do segmento da tangente da tractriz entre o ponto de tangência e o eixo Oy é constante e igual a 1.

Antes de iniciar a solução do problema (5.0.1) precisamos caracterizar o que é uma curva diferenciável parametrizada regular, assim faremos uso das definições dadas pelo supracitado autor [6].

Digitalizado com CamScanner

Definição 8. *Dizemos que uma função de uma variável real é suave ou diferenciável quando ela possui em todos os pontos derivadas de todas as ordens (automaticamente contínuas),*

Definição 9. *Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *de um intervalo aberto* $I = (a, b)$ *da reta real em* $\mathbb{R}^3$.

Definição 10. *Uma curva diferenciável* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *é denominada regular quando* $\alpha'(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$.

Agora voltamos ao nosso problema para explicitar a sua solução do item a:

Resolução 7. *Temos que a curva* α *é dada por:*

$$\alpha(t) = \left(\text{sen}t, \cos t + \log \text{tg}\frac{t}{2}\right) \tag{5.17}$$

Considerando a definição 10, *devemos mostrar que para* $t = \frac{\pi}{2}$ *temos* $\alpha'(t) = 0$, *isto é, neste ponto a curva não é regular. Assim derivamos* (5.17) *com relação a t:*

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left(\cos t, -\text{sen}t + \frac{1}{\text{tg}\frac{t}{2} \cdot \log 10} \cdot \sec^2 \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\cos t, -\text{sen}t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\text{tg}\frac{t}{2}} \cdot \sec^2 \frac{t}{2}\right) \\
&= \left(\cos t, -\text{sen}t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\frac{t}{2}}{\text{sen}\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\right) \\
&= \left(\cos t, -\text{sen}t + \frac{1}{2 \cdot \text{sen}\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2}}\right) \\
&= \left(\cos t, -\text{sen}t + \frac{1}{\text{sen}t}\right) \\
&= (\cos t, -\text{sen}t + \csc t)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Como queremos mostrar que a curva $\alpha(t)$ *não é regular em* $t = \frac{\pi}{2}$, *basta fazermos* $\alpha'(t) = 0$ *e assim* $\cos(t) = 0$ *e* $-\text{sen}t + \csc t = 0$ *logo* $t = \frac{\pi}{2}$.

□

Para o item b *temos:*

Resolução 8. *Seja* $P = (x_0, y_0)$ *o ponto de tangência da reta tangente e* $Q = (0, y_1)$ *o ponto de intersecção da reta tangente co o eixo* y.

Digitalizado com CamScanner

De acordo com a parametrização (5.14) *temos* $\frac{dx}{dt} = \cos t$ *e* $\frac{dy}{dt} = \csc t - \text{sen} t$ *de onde obtemos:*

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\csc t - \text{sen} t}{\cos t}\\ &= \frac{\frac{1}{\text{sen} t} - \text{sen} t}{\cos t}\\ &= \frac{1 - \text{sen}^2 t}{\text{sen} t} \cdot \frac{1}{\cos t}\\ &= \frac{\cos^2 t}{\text{sen} t} \cdot \frac{1}{\cos t}\\ &= \frac{\cos t}{\text{sen} t} \qquad (5.19)\end{aligned}$$

Considere agora a identidade fundamental da trigonometria $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$ *de onde:*

$$\begin{aligned}\cos^2 t + \text{sen}^2 t &= 1\\ \cos^2 t &= 1 - \text{sen}^2 t\\ \cos t &= \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \qquad (5.20)\end{aligned}$$

De (5.17) *lembre que* $x = \text{sen} t$, *assim substituindo* (5.20) *em* (5.19) *temos:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{\text{sen} t} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \qquad (5.21)$$

A equação da reta tangente a curva em um ponto $P = (x_0, y_0)$ *é dada pela forma:*

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad (5.22)$$

Mas em (5.22) *note que* $f'(x_0)$ *é o valor da expressão* (5.21) *para* $x = x_0$, *assim:*

$$y - y_0 = \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{x_0} \cdot (x - x_0) \qquad (5.23)$$

Lembre-se agora que tomamos o ponto $Q = (0, y_1)$, *substituindo em* (5.23) *temos:*

$$\begin{aligned}y_1 - y_0 &= \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{x_0} \cdot (0 - x_0)\\ &= -\sqrt{1 - x_0^2} \qquad (5.24)\end{aligned}$$

Calculamos agora a distância entre os pontos P *e* Q*:*

$$d_{(P,Q)} = \sqrt{(0 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \qquad (5.25)$$

Digitalizado com CamScanner

Elevando os dois membros da equação (5.25) *ao quadrado temos:*

$$\left[d_{(P,Q)}\right]^2 = x_0^2 + (y_1 - y_0)^2 \tag{5.26}$$

Substituindo (5.24) *em* (5.26)*:*

$$\begin{aligned} &= x_0^2 + \left(-\sqrt{1 - x_0^2}\right)^2 \\ &= x_0^2 + 1 - x_0^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\square$

Digitalizado com CamScanner

Capítulo 6

Referências Bibliográficas

[1] ALBRECHT, G. M. L. SCHEEREN, V. et. al. **RESGASTE HISTÓRICO ACERCA DA CONTRIBUIÇÂO DA FAMÍLIA BERNOULLI PARA A MATEMÀTICA**.Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA). Bagé/RS, 2014.

[2] BAVARESCO, D.; VEIT, L. C.; STROSCHEIN, S. D. **Tractriz: uma abordagem na perspectiva da Geometria dos Rastros**. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves: RS, v. 6, n. 1, p. 01-16, abr. 2020. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/download/3712/2571. Acesso em: 12 de agosto de 2021.

[3] BIRD, J. **Higher Enginiering Mathematics**. 8ª ed. Portsmouth: Taylor Francis Ltd, 2017.

[4 BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Tradução Maria José Matoso Miranda Mendes. Brasília: UnB, 1985.

[5] BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

[6] CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superficies**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[7] MARTINS, M. C. **Matemática em família: os Bernoulli**. www.core.ac.uk. 2014. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/61444588.pdf. 10 de agosto de 2021.

[8] MAOR, E. E: a história de um número. São Paulo: Record, 2004.

[9] MENDES, M. F. **A CURVA CATENÀRIA APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL**. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em En-

Digitalizado com CamScanner

sino de Ciências Exatas e Tecnologia). Universidade Federal de São Carlos. Sorocaba, 2017.

[10] NAGLE, R. K. **Equações Diferenciais**. 8 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

[11] PARRA, C. SAIZ, I. **Didática da matemática - reflexões pedagógicas**. Tradução Juan Acumã Llorens. São Paulo: Artmed, 2001.

[12] RAPOSO, C. S. C. M. Curvas Famosas e não só: teoria, história e atividades. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Matemática para Professores da Universidade de Lisboa). Lisboa: s.n., 2013.

[13] SECCO, L. A. V. **Tansformações r-normal associadas**. Dissertação (Bacharelado em Matemática). Universidade Federal de Uberlândia. Ituiutaba-MG, 2019.

[14] SODRÉ, U. **Equações Diferenciais Ordinárias**. www.uel.br. 2003. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/edo.pdf. 20 de setembro de 2021.

[15] SODRÉ, U. **Equações Diferenciais Ordinárias**. www.uel.br. 2003. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/edo.pdf. 20 de setembro de 2021.

[16] TALAVERA, L. M. B. **Parábola e Catenária: história e aplicações**. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Educação. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2008.

[17] ZILL, D. G. CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. Tradução Antônio Zumpano, revisão técnica Antônio Pertence Jr. São Paulo: Makron Books, 2001.

Digitalizado com CamScanner

Capítulo 7

Apêndices

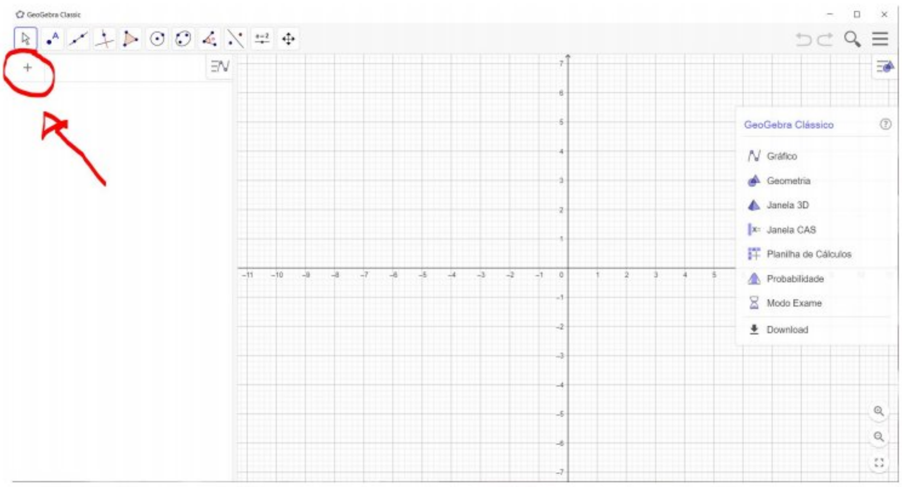
O software GeoGebra é um programa de computador que possui versão para celulares Android voltado para a Matemática, em particular para construções geométricas diversas, como por exemplo gráficos de retas, planos, funções, sólidos e curvas parametrizadas.

O GeoGebra é gratuito e foi utilizado para construção de dois exemplos de gráficos presentes neste trabalho a catenária e a tractriz. Quem tiver interesse pode fazer o download por meio do link https://geogebra.br.uptodown.com/windows.

7.0.1 Construção da catenária no GeoGebra

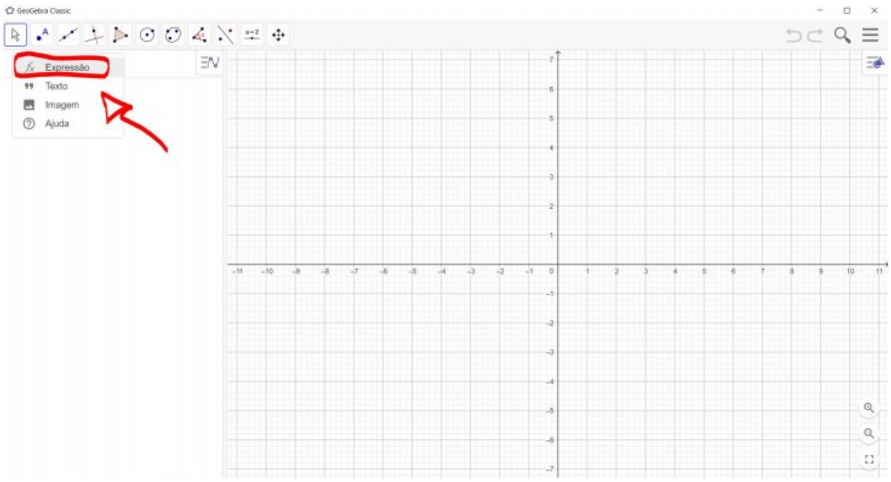
Para construção do gráfico da catenária usado como exemplo neste trabalho siga os passos a seguir (Fonte: Oliveira, 2021):

1. Faça o download do software (caso não tenha ainda);
2. Abra o software, e clique no botão que fica no canto superior esquerdo da tela:

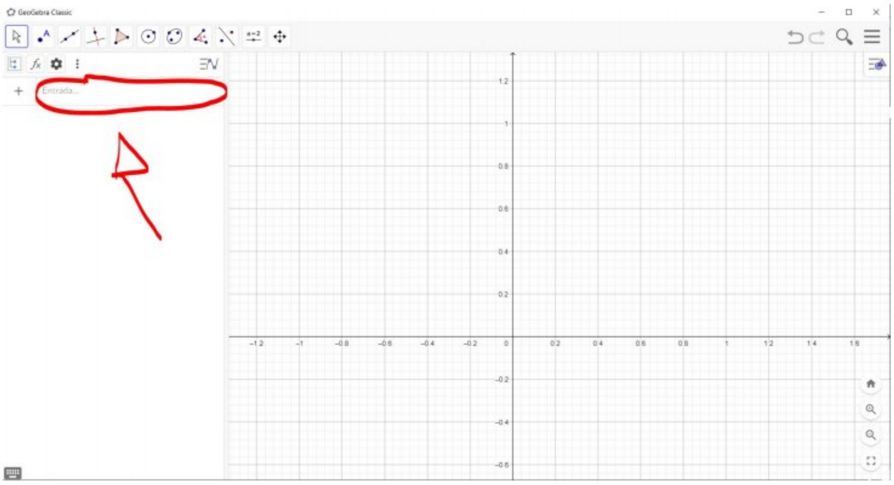


3. Selecione a opção Expressão:

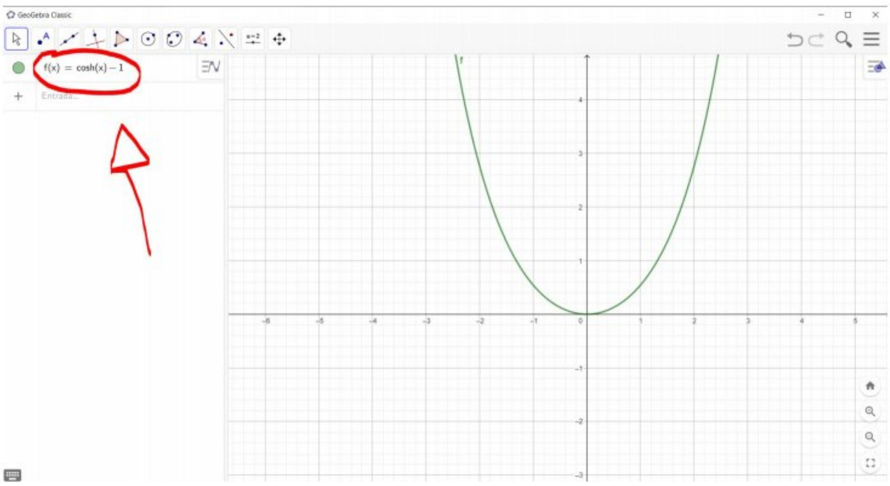
Digitalizado com CamScanner



4. Clique no campo Entrada:



5. Neste campo, digite a expressão da catenária $f(x) = \cosh(x) - 1$:



O gráfico já aparece automaticamente à direita na tela.

Digitalizado com CamScanner

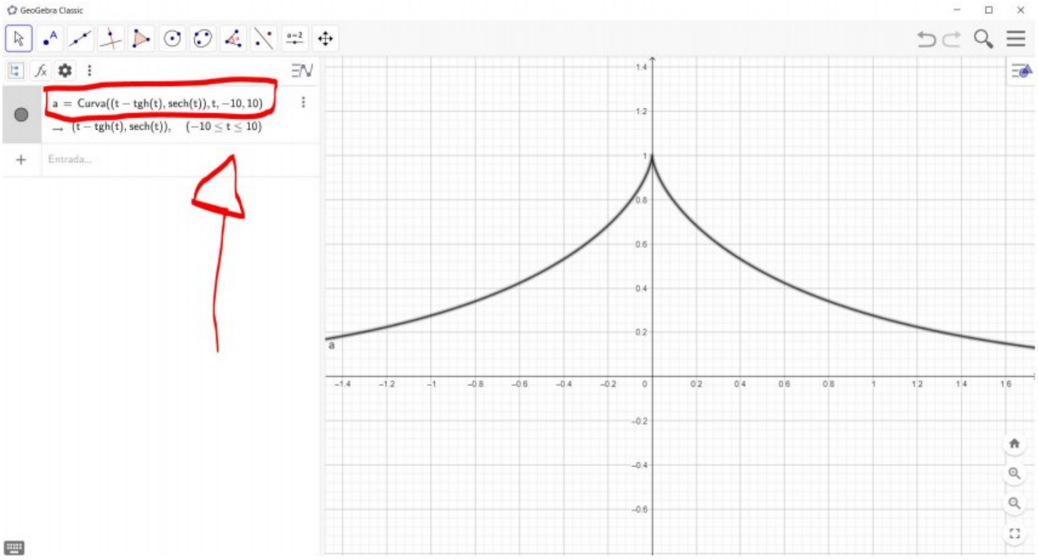
7.0.2 Construção da tractriz no GeoGebra

Para a tractriz utilizaremos o recurso do GeoGebra de construção de curvas parametrizadas (Definição 9). Utilizaremos a parametrização padrão da tractriz, como t variando em um intervalo reduzido para fins de demonstração:

$$a = (t - \tanh(t), \mathrm{sech}(t)) \;; -10 \leqslant t \leqslant 10 \tag{7.1}$$

Siga os passos do tópico 6.0.1 até a parte 4;

5. No campo Entrada, digite a expressão (6.1).



O gráfico da tractriz aparece automaticamente à direita na tela.

Digitalizado com CamScanner

GOVERNO DO ESTADO DO AMAZONAS

UEA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

CEST Centro de Estudos Superiores de Tefé

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FORMULÁRIO DE ACOMPANHAMENTO DAS ORIENTAÇÕES PARA A ELABORAÇÃO DO TCC

Acadêmico (a): Alex Oliveira Pinto **Matrícula:** 1726030004

Turma: MATV-T01 **Período:** 8º **Turno:** Vespertino

DATA	CARGA HORÁRIA	DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE REALIZADA	ASSINATURA ORIENTADOR (A)
24/09/2021	2 horas	Discursão das datas de entrega do artigo final e da defesa do mesmo.	Rodrigues.
30/09/2021	2 horas	Orientações com relação aos tópicos do desenvolvimento do projeto e sobre o Latex.	Rodrigues.
01/10/2021	2 horas	Orientações sobre o início da escrita do artigo final por meio do Latex.	Rodrigues.
14/10/2021	2 horas	Implementação do modelo que deve nortear a escrita do projeto	Rodrigues.
21/10/2021	2 horas	Orientações de acordo com o que havia sido produzido até o momento	Rodrigues.
26/10/2021	2 horas	Orientação com relação a correções de tópicos no corpo do projeto.	Rodrigues.
27/10/2021	2 horas	Orientações com relação a correções e acréscimo de tópicos no corpo do projeto com relação a correções de tópicos no corpo do projeto.	Rodrigues.

Obs.: Este documento deve obrigatoriamente ser preenchido, assinado e anexado junto ao TCC a ser entregue à Profa. Denise Medim da Mota, responsável pela disciplina de Trabalho de Conclusão II.

Digitalizado com CamScanner

GOVERNO DO ESTADO DO AMAZONAS

UEA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

CEST Centro de Estudos Superiores de Tefé

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FORMULÁRIO DE ACOMPANHAMENTO DAS ORIENTAÇÕES PARA A ELABORAÇÃO DO TCC

29/10/2021	2 horas	Orientação com relação a escrita do artigo cientifico no TeXstudio.	
04/11/2021	2 horas	Reunião pra discutir o que havia sido produzido até então com relação ao artigo científico.	
11/11/2021	2 horas	Orientação com relação a tópicos para acrescentar e outros para retirar.	
18/11/2021	2 horas	Correções gerais no artigo cientifico.	
22/11/2021	2 horas	Correções gerais no artigo cientifico.	
23/11/2021	2 horas	Ultimas correções gerais no artigo cientifico.	

Obs.: Este documento deve obrigatoriamente ser preenchido, assinado e anexado junto ao TCC a ser entregue à Profa. Denise Medim da Mota, responsável pela disciplina de Trabalho de Conclusão II.

Digitalizado com CamScanner