

# MODELAGEM MATEMÁTICA – UM MODELO MATEMÁTICO PARA O JOGO TORRE DE HANÓI COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO DA ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO ESPECÍFICA MAYARA REDMAN ABDEL AZIZ – NAAH/S

Francisco Ribeiro Alves Maia Filho<sup>1</sup>

Alcides de Castro Amorim Neto<sup>2</sup>

## Resumo

Neste trabalho, sugere-se a Modelagem Matemática como estratégia no processo ensino-aprendizagem. Para tanto, apresenta-se uma proposta de atividade de modelagem que viabiliza discutir os conceitos de Função, Progressão Aritmética e Progressão Geométrica. Dessa forma, toma-se o jogo Torre de Hanói e desenvolve-se um modelo matemático que permite calcular-se o número mínimo de jogadas para resolver o jogo, de acordo com o número de discos estabelecidos, relacionando Função e Progressão Geométrica.

O Principal objetivo é utilizar a Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem, no combate ao quadro de desinteresse pelo estudo da Matemática de grande parte dos alunos dos ensinos fundamental e médio.

As análises qualitativas e quantitativas realizadas neste estudo sinalizaram de forma positiva para o uso da Modelagem Matemática em sala de aula.

**Palavras-Chave:** Modelagem Matemática, Torre de Hanói, Função, Progressão Geométrica.

---

<sup>1</sup> Graduado em Licenciatura em Matemática na UFAM. cursando Especialização em Metodologia do Ensino da Matemática para o Ensino Médio na UEA .

<sup>2</sup> Graduado em Tecnologia Elétrica pela UTAM e em Matemática pela UFAM (2000), professor adjunto da Universidade do Estado do Amazonas - UEA

## INTRODUÇÃO

A modelagem matemática cada vez mais tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores no Brasil e no exterior. Diversas áreas como a Biologia, a Física, a Química, a Engenharia e a própria Matemática têm-se fundamentado nos pressupostos teóricos e metodológicos da Modelagem Matemática para testar hipóteses, provar teorias, formular leis e estabelecer relações.

Em linhas gerais, a Modelagem Matemática pode ser entendida como o estabelecimento de modelos matemáticos para resolução de problemas reais do cotidiano. Isto é, significa buscar representações matemáticas para uma situação real, procurando interpretá-la e entendê-la, na tentativa de resolver problemas relacionados à situação (ARAÚJO, 2009).

No âmbito educacional, o potencial da Modelagem Matemática como metodologia de ensino-aprendizagem vem sendo bastante discutido e testado nos diferentes níveis de ensino. Muitos professores e pesquisadores, ligados à Educação Matemática, defendem que essa metodologia propicia um ensino da matemática mais dinâmico, mais vivo e mais significativo (BURAK, 2005; BASSANEZI, 2006), despertando no aluno o interesse pela pesquisa e transformando-o em um investigador ao invés de um simples seguidor, “aquele em permanente busca do conhecimento, que interroga, discute, reflete e forma suas próprias convicções”, como observa Burak (2010, p.19).

Neste artigo, o trabalho de pesquisa foi realizado com alunos matriculados regularmente no Ensino Médio da Rede Estadual de Ensino do Estado do Amazonas, os quais, no contraturno, frequentam o Núcleo de Atividades de Altas Habilidades/Superdotação – NAAH/S – localizado na Escola Estadual de Educação Específica Mayara Redman Abdel Aziz. Esse Núcleo faz parte de um projeto do Ministério da Educação (MEC) que implantou um NAAH/S em todos os Estados da Federação, com a adesão das Secretarias Estaduais de Educação, objetivando o atendimento específico a alunos com habilidades acima da média no campo intelectual, artístico e psicomotor.

Segundo Biembengut e Hein (2000), para trabalhar com Modelagem Matemática na sala de aula é preciso que o professor reconheça o seu papel tanto no que concerne às estratégias utilizadas quanto à forma de avaliar os alunos, pois, quando inserido em tal ambiente não é concebível trabalhar os conteúdos de forma fragmentada e isolados de um contexto.

O uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino proporciona que se trabalhem modelos e conceitos matemáticos de forma integrada e gradativa, possibilitando aos alunos um maior envolvimento com as atividades propostas e o desenvolvimento dos conceitos existentes em cada modelo.

Trabalhos dessa natureza são importantes para o avanço nas discussões sobre Modelagem Matemática e para melhor compreensão das pesquisas na área, uma vez que, conforme indicam Bicudo e Kluber (2012, p. 03), a modelagem é uma área em consolidação que necessita de “compreensão das concepções assumidas e das práticas educacionais desenvolvidas”.

### **MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

A Modelagem Matemática é bastante utilizada como método de pesquisa, a qual analisa situações e fenômenos da vida real, tendo como um de seus objetivos chegar a um modelo que represente uma situação que se toma como objeto de estudo. Atualmente, vem ganhando espaço nas discussões sobre o processo ensino-aprendizagem, pois discute-se que o processo para chegar a um modelo matemático pode contribuir para um aprendizado diferenciado, no qual o aluno tem a oportunidade de construir conceitos.

Para se ensinar matemática, utilizando Modelagem Matemática como estratégia de ensino, segundo Bassanezi (2002), um dos meios é envolver os alunos no processo de obtenção do modelo e na sua validação, porém, essa etapa pode não ser uma etapa prioritária, mas também explica que o processo de construção do modelo é relevante, pois é nesse momento que é possível discutir os conceitos matemáticos envolvidos, modelando e analisando situações, criticando e verificando as soluções encontradas.

Alguns educadores matemáticos entendem a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem e abordam essa perspectiva nos eventos educacionais. Franchi (2003), por exemplo, defende que a Modelagem na sala de aula pode contribuir para que os alunos fiquem mais motivados, compreendam os conteúdos a partir das necessidades para o desenvolvimento dos modelos.

De acordo com Biembengut e Hein (2000), para trabalhar com Modelagem Matemática na sala de aula é preciso que o professor reconheça o seu papel, tanto no que concerne às estratégias utilizadas quanto à forma de avaliar os alunos, pois, quando inserido em tal ambiente, o professor não deve trabalhar os conteúdos de

maneira fragmentada e isolados de um contexto. É preciso que o professor também conheça a matemática num contexto social.

O uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino proporciona que se trabalhem modelos de forma integrada e gradativa, nos quais os alunos possam se envolver com as atividades propostas e desenvolver, assim, os conceitos existentes em cada modelo.

Almeida Dias (2004) sugere algumas etapas para se implantar a Modelagem Matemática como estratégia em sala de aula: é interessante iniciar as atividades utilizando modelos matemáticos a partir de situações problemas já estabelecidos e apresentados pelo professor. Nesse primeiro passo, a formação de hipóteses e a investigação do problema, que resultam na dedução do modelo, são realizadas em conjunto com todos os alunos juntamente com o professor; num segundo momento, após os alunos estarem habituados com tipos de situações propostas anteriormente, o professor pode sugerir uma situação problema já reconhecida, com as informações necessárias. Então, os alunos podem ser separados em grupos e trabalharem na elaboração das hipóteses simplificadoras e na dedução do modelo durante a investigação e, a seguir, validam o modelo encontrado; Posteriormente, os alunos, em grupos, escolhem uma situação para ser estudada, na qual o professor pode ajudar na escolha do tema e, após terem definido o problema em questão, desenvolvem uma atividade de modelagem, com auxílio ou não do professor.

Cada procedimento acima mencionado proporciona uma compreensão do processo de modelagem e dos conceitos envolvidos nos problemas propostos, incentivando os alunos a uma reflexão sobre as soluções encontradas e as relações entre os conceitos matemáticos e a realidade.

Com a modelagem no currículo escolar, a matemática pode se tornar mais dinâmica e interessante para os alunos, englobando diversas áreas de seus interesses, podendo, assim, tornar os conteúdos propostos mais significativos para eles.

Neste trabalho, propõe-se aos alunos o jogo Torre de Hanói, como situação problema.

Torre de Hanói se caracteriza por ser um jogo que possui aplicações que podem ser basicamente usadas em escolas por professores que desejam melhorar e desenvolver o cognitivo de seus alunos, podendo ser aplicado em pequenos grupos ou individualmente, além de proporcionar possibilidades de implementação

de algoritmos matemáticos que se baseiam em suas regras. Por possuir regras simples, e de fácil assimilação, adapta-se a diferentes níveis de ensino, sendo possível a sua utilização tanto no nível fundamental quanto no médio, ou até mesmo no ensino superior, em programação, por exemplo. Mas, o que chama mais a atenção são as possibilidades didáticas e lúdicas de ideias matemáticas que, a princípio, não são percebidas.

A Torre de Hanói, criada pelo matemático francês Eduardo Lucas, em 1883 (TAHAN, 1974, p. 137), é formada por uma base com três hastes e discos de tamanhos diferentes. Em uma das hastes encontram-se colocados todos os discos, dispostos do maior para o menor. O objetivo é transferir todos os discos de uma haste para outra com o menor número possível de movimentos, de modo que só se possa mover um disco de cada vez, sem deixar um disco de diâmetro maior sobre um de diâmetro menor (Figura 1).

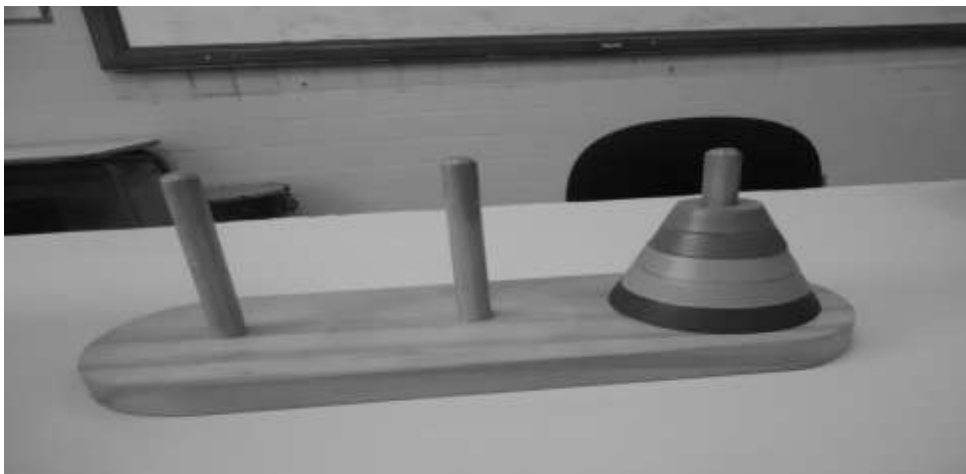


Figura 1: Torre de Hanói

O principal interesse aqui é expor uma possibilidade de trabalho com alunos do ensino médio; incorporar, de forma séria e objetiva, o espírito investigativo, importante no processo de desenvolvimento de ideias matemáticas, e promover a socialização, por meio da exploração dos conceitos matemáticos relativos à Funções e Progressões Geométricas, que estão intimamente ligados às regras do jogo.

Atividades como essa proporcionam perceber-se a matemática como uma ferramenta poderosa a ser aplicada na resolução de problemas reais, por meio da utilização de conceitos matemáticos.

## METODOLOGIA DA PESQUISA

Esta pesquisa é de natureza básica, pois, segundo Gil (2009), a pesquisa básica gera conhecimentos úteis para o avanço da ciência e envolve verdades e interesses universais. É exploratória, pois tem por finalidade possibilitar melhor familiarização sobre um assunto, provocar a construção de hipóteses e permitir a delimitação de uma temática e seus objetivos. É quantitativa, pois, como afirma Bicudo (2006, p. 106), é passível de mensuração, mas também tem caráter qualitativo, já que engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. Poder-se-ia assim dizer que a pesquisa é quali-quantitativa, pois representa a combinação das duas modalidades (qualitativa e quantitativa). O estudo é de caráter longitudinal e o método proposto será o hipotético-dedutivo, também conhecido como método de tentativas e eliminação de erros.

## ESTUDO REALIZADO

O estudo foi feito no primeiro semestre letivo do ano de 2015, na Escola Estadual de Educação Específica Mayara Redman Abdel Aziz, mais precisamente no Núcleo de Atividades de Altas Habilidades/Superdotação – NAAH/S – que funciona nessa Escola, no contraturno dos alunos com altas habilidades (Figura 2).

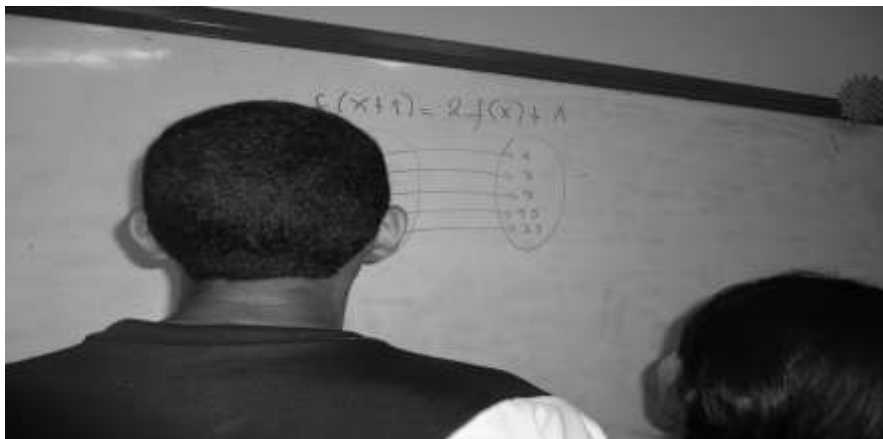


Figura 2: Alunos trabalhando com a metodologia Modelagem Matemática

Para a realização do trabalho, formaram-se duas turmas compostas de cinco alunos cada uma. Todos esses alunos estão matriculados regularmente em escolas da rede estadual de ensino. Alguns, cursando o 1º ano, outros, o 2º, e outros o 3º ano do ensino médio.

Estabeleceu-se, para as duas turmas, fazerem um estudo dos conteúdos Função, Progressão Aritmética e Progressão Geométrica. Porém, utilizaram-se estratégias diferentes para cada turma. Para a Turma 1, solicitou-se que pesquisasse sobre os três assuntos e fizesse uma exposição para a outra turma (Turma 2) e para o professor, daquilo que seus integrantes pesquisaram. A Turma 2 também foi instruída a pesquisar sobre os três assuntos, mas a orientação foi dada da seguinte maneira: paralelamente, esse grupo, com a ajuda do professor, fez um estudo sobre Modelagem Matemática.

Um dos pontos discutidos nesse estudo foi a necessidade do domínio maior possível dos conteúdos matemáticos a serem pesquisados. Esses conteúdos seriam as ferramentas utilizadas para o desenvolvimento de Modelos Matemáticos em situações diversas. Ao mesmo tempo, o grupo foi apresentado ao Jogo Torre de Hanói, sobre o qual falamos de sua origem, regras e lenda.

Enquanto a Turma 2 se familiarizava com o Jogo Torre de Hanói, recebeu instruções de que a teoria de Funções e Progressões Geométricas poderiam ser observadas nesse jogo. Os alunos ficaram muito empolgados ao receberem a tarefa de criar um modelo matemático para o jogo e que utilizariam para isso, os conteúdos que estavam pesquisando. Os alunos do 2º ano e do 3º ano, por já terem estudado no 1º ano os dois conteúdos, receberam a incumbência de ajudarem os alunos do 1º ano no entendimento das teorias.

A Turma 1 fez a exposição de tudo o que pesquisaram de forma satisfatória, com algumas pequenas falhas, mas com a participação de todos.

Passou-se, então, à Turma 2. Os alunos já haviam “brincado” muito com o jogo e começou-se a estabelecer alguns procedimentos.

Solicitou-se que fossem criados dois conjuntos: um conjunto “A” cujo os elementos seriam a quantidade de discos depositados numa haste, e um conjunto “B”, em que os elementos seriam a quantidade mínima de jogadas para solucionar o jogo. De imediato e sem nenhuma dúvida, ficou claro para todos que precisariam apenas de uma jogada caso usassem apenas um disco. Pediu-se aos alunos que tentassem resolver o problema com dois discos. Rapidamente, também concluíram que precisariam apenas de 3 jogadas para resolver o jogo. Começou-se, então, a relacionar os elementos do conjunto “A” com os elementos do conjunto “B”, numa representação em diagrama de flechas (Figura 3). Seguidamente, resolveram o jogo trabalhando com 3 discos, concluindo que precisariam de, no mínimo, 7 jogadas.

Quando depositaram 4 discos numa haste, o resultado não foi imediato, e foi só a partir daí que os alunos começaram a discutir se poderiam usar o que foi pesquisado por eles sobre Função e Progressão Geométrica na resolução do problema.

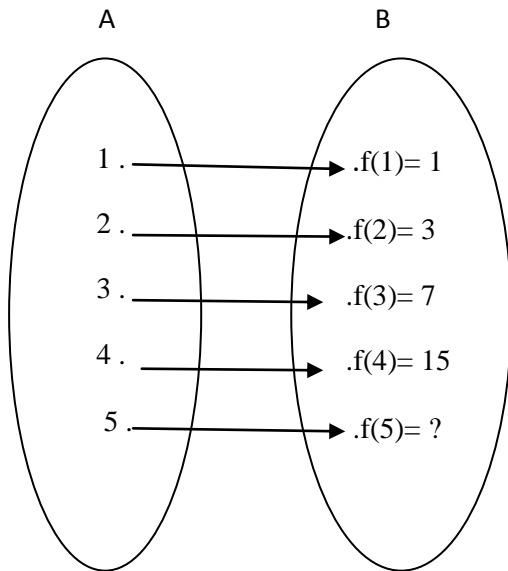


Figura 3: Diagrama de Flechas relacionando quantidade de discos e número mínimo de jogadas.

Depois de um tempo, um aluno observou que, quando tinham 3 discos, primeiro passaram os dois discos de cima para outra haste, o que precisou de 3 jogadas, como visto acima. Depois, passaram o disco de baixo para outra haste, e precisaram de mais 3 jogadas para colocar os dois primeiros discos mexidos em cima do outro. Assim, usaram o mesmo raciocínio para verificar o processo quando trabalharam com 4 discos. Primeiro passaram os 3 discos de cima para outra haste, o que precisou de 7 jogadas. Depois, colocaram o disco de baixo em outra haste. Em seguida precisaram de mais 7 jogadas para colocar os 3 primeiros discos em cima do disco mexido por último. Esse aluno chegou à conclusão de que conseguiria resolver o problema com 5 discos, efetuando 31 jogadas, pois precisaria de 15 jogadas para colocar os 4 discos de cima para uma outra haste, e depois usaria uma jogada para colocar o disco de baixo para a haste vazia e, finalmente, precisaria de mais 15 jogadas para colocar as 4 peças menores em cima da maior. Concordeu-se com o raciocínio desse aluno e pediu-se aos demais que usassem a linguagem matemática para descrever esse processo. Depois de trabalharem algum tempo, escreveram o seguinte:



$$f(2) = f(1) + 1 + f(1) = 2.f(1) + 1 = 2.1 + 1 = 3$$

$$f(3) = f(2) + 1 + f(2) = 2.f(2) + 1 = 2.3 + 1 = 7$$

$$f(4) = f(3) + 1 + f(3) = 2.f(3) + 1 = 2.7 + 1 = 15$$

Assim,  $f(5) = f(4) + 1 + f(4) = 2.f(4) + 1 = 2.15 + 1 = 31$ , e, genericamente,

$$f(x+1) = 2f(x) + 1$$

Realmente, com essa conclusão, poder-se-á saber quantas jogadas são necessárias para resolver o jogo mesmo antes de efetuar as jogadas. Porém, só se poderá achar a quantidade de jogadas  $f(x+1)$  caso já se tenha achado  $f(x)$ . Isto é,  $f(6)$  é calculado por já se conhecer  $f(5)$ . Já  $f(7)$  será calculado se  $f(6)$  já for conhecido, e assim por diante.

Como resolver o problema de se encontrar o menor número de jogadas necessárias para resolver o jogo se forem colocados, por exemplo, 20 discos numa haste? Resolve-se o problema contando-se as jogadas, ou calculando-se pelo processo descoberto  $f(2), f(3), f(4), f(5), \dots, f(19)$  para depois calcular-se  $f(20)$ ? Esse foi o desafio lançado para todos os alunos da Turma 2: determinar uma lei que para qualquer  $x$  do conjunto "A" possa-se encontrar a sua imagem  $f(x)$  correspondente imediatamente, sem precisar conhecer  $f(x-1)$ .

Depois de longas discussões no grupo, o professor sugeriu que tentassem relacionar os dados obtidos com a teoria das Progressões Geométricas. Mais discussões e depois de algum tempo, um dos alunos teve a seguinte idéia: tomou uma Progressão Geométrica de primeiro termo  $a_1 = 1$  e razão  $q = 2$  (1,2,4,8,16,...). Depois, observou que sendo  $S_n$  a soma de  $n$  termos dessa Progressão Geométrica  $S_1 = f(1) = 1$ ,  $S_2 = f(2) = 3$ ,  $S_3 = f(3) = 7$ ,  $S_4 = f(4) = 15$ ,  $S_5 = f(5) = 31$  e assim por diante. Assim, viu-se que o problema ficou reduzido a achar a soma dos  $n$  termos dessa Progressão Geométrica.

A fórmula matemática da soma dos  $n$  termos de uma Progressão Geométrica finita é dada por

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} . \text{ Na Progressão Geométrica referida, o primeiro termo } a_1 = 1 \text{ e a razão } q = 2.$$

Substituindo-se, temos  $S_n = 2^n - 1$ . Mas, pelo visto,  $S_n = f(x)$  com  $n = x$ . Portanto, chegou-se à conclusão final:  $f(x) = 2^x - 1$ , para todo "x" pertencente ao conjunto "A".

Agora sim, o desafio foi cumprido. Poder-se-á achar a quantidade mínima de jogadas para quaisquer número de peças. Para as 20 peças do exemplo, já se pode determinar a quantidade mínima de jogadas para resolver o problema:

$$f(20) = 2^{20} - 1 = 1.048.576 - 1 = 1.048.575 \text{ jogadas.}$$

Após os estudos realizados com as Turmas 1 e 2, sucedeu-se a parte final do trabalho, que consistiu na aplicação de um mesmo exercício de verificação da aprendizagem para as duas turmas, obtendo-se o resultado representado nas tabelas e no Gráfico a seguir.

Tabela 1: Notas dos alunos da Turma 1

Alunos	Notas
A	7,0
B	7,5
C	7,5
D	8,5
E	6,5
Média	7,4

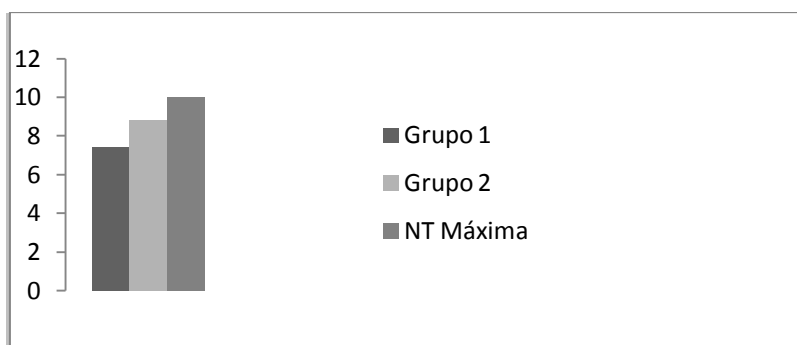
Fonte: Exercício avaliativo

Tabela 2: Notas dos alunos da Turma 2

Alunos	Notas
F	8,5
G	9,0
H	9,0
I	9,5
J	8,0
Média	8,8

Fonte: Exercício avaliativo

Gráfico 1: Representação do rendimento médio das Turmas 1 e 2



Fonte: Exercício avaliativo

- Análise Quantitativa – A Turma 2, que trabalhou com a Modelagem Matemática no Jogo Torre de Hanói, teve um melhor rendimento no exercício avaliativo que a Turma 1, como mostra as tabelas 1 e 2 e o gráfico 1, acima.
- Análise Qualitativa – A Turma 2 se mostrou mais motivada que a Turma 1, durante todo o trabalho. Acredita-se que os alunos dessa Turma 2 passaram

a ver os conteúdos matemáticos não de forma fragmentada, mas, ao contrário, através da exploração na situação problema dos conteúdos Função e Progressão Geométrica perceberam que podem relacionar mais de um conteúdo ao mesmo tempo na resolução de um problema. Cumpriu-se, assim, os objetivos da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

As análises qualitativa e quantitativa deste estudo sinalizam de forma positiva para o uso da Modelagem Matemática em sala de aula. Observou-se, com este estudo, um melhor rendimento dos alunos que participaram desta pesquisa aos quais foi aplicada essa estratégia de ensino, e que esses alunos se mantiveram bem mais motivados, do início ao fim do processo, que os outros participantes em que não se utilizou o Método. Observou-se, também, que esses alunos passaram a se comportar mais ativamente durante o processo ensino-aprendizagem.

Outros estudos podem ser realizados, utilizando-se a Modelagem Matemática em sala de aula, inclusive estudos relacionados a algum fenômeno social, o que poderia despertar no aluno a consciência da importância da cidadania.

A preocupação com o conteúdo programático poderá desencorajar o professor a utilizar a Modelagem Matemática como metodologia de ensino- aprendizagem, em razão dessa metodologia demandar maior quantidade de aulas, dificultando o cumprimento do plano de curso, já que nos vestibulares e concursos em geral o aluno é cobrado de acordo com os conteúdos estabelecidos em cada série. Essa preocupação é pertinente e cabe ao professor dosar com vários tipos de estratégias as suas aulas, a fim de equilibrar qualidade e quantidade.

Nas escolas de tempo integral, acredita-se que se possa elaborar um projeto onde se trabalhe usando Modelagem Matemática em um dos turnos, de preferência, em um laboratório de matemática, tendo em vista que essas escolas não possuem a limitação temporal das outras.

A experiência vivenciada com este trabalho foi muito importante e gratificante para o pesquisador, pois, proporcionou a ele vislumbrar a possibilidade de tornar os conteúdos matemáticos mais significativos para os alunos sob sua responsabilidade, resultando numa prática docente mais prazerosa e eficiente.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M.R. **Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem.** Bolema, nº 22, ano 17, 2004.
2. ARAÚJO, J. L. **Pesquisa sobre modelagem em eventos científicos recentes da educação matemática no Brasil.** In: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília, 2009.
3. BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática.** 3 Ed. Editora Contexto: São Paulo, 2006, p. 389.
4. BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica** In: BORBA, M.C.: ARAÚJO, J.L. Pesquisa qualitativa em educação matemática. 2 Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. (Coleção tendências em Educação Matemática), p. 101-114.
5. BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** Editora Contexto: São Paulo, 2000. p. 127.
6. BURAK, D. **As diretrizes curriculares para o ensino de matemática e a modelagem matemática.** v. 29, n. 107. Perspectiva: Erechim – RS, 2005. p. 153-161.
7. FRANCHI, R. H. O. L. **Reflexões sobre modelagem na perspectiva da educação matemática.** In: COONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3. Piracicaba – São Paulo. **Anais... Piracicaba:** UNIMEP, 2003. ICD.
8. GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4 ed. São Paulo: Atlas, 2009.
9. TAHAN, M. **O Homem que calculava.** 60 Ed. Editora Record: São Paulo, 1974, p. 137.