

# Uma Introdução à Teoria de Campos

(*An Introduction to Field Theory*)

Luis Felipe da Conceição Inácio<sup>1</sup>  
Orientador: Gabriel de Lima e Silva<sup>2</sup>

*Centro de Estudos Superiores de Tefé - CEST, Universidade do Estado do Amazonas - UEA, Tefé, AM, Brasil.*

**Resumo:** Neste estudo, apresenta-se uma breve introdução ao estudo das *teorias de campos na Física* como uma teoria sofisticada que refere-se a construção da dinâmica de um campo. Para isso utilizamos formulações propostas pela mecânica analítica como a dinâmica Lagrangiana e a dinâmica Hamiltoniana. Todas as teorias de campos podem ser expressas pelas formulações lagrangiana e Hamiltoniana, obtendo uma lagrangiana ou uma hamiltoniana do campo e tratando-o como a mecânica clássica ou a mecânica quântica de um sistemas com um número infinito de graus de liberdade obtemos as *Teorias Clássicas de Campos* e *Teorias Quânticas de Campos*. Na parte final deste trabalho, apresentamos a Mecânica Quântica Relativística, que é uma da Teoria Quântica de Campos para o elétron. Esse objetivo foi alcançado graças a Klein-Gordon e Dirac, pois encontraram uma forma de unificar a Mecânica Quântica com a Teoria da Relatividade.

**Palavras-chaves:** Teoria de campos, lagrangiana, Hamiltoniana, Mecânica Quântica e Teoria da Relatividade.

**Abstract:** Initially, a brief introduction to the study of field theories in physics is presented, as a sophisticated theory that refers to the construction of the dynamics of a field. For this, we use formulations proposed by analytical mechanics such as Lagrangian and Hamiltonian dynamics. All field theories can be expressed by these formulations, obtaining a Lagrangian or a Hamiltonian of the field and treating it as classical mechanics or quantum mechanics of a system with an infinite number of degrees of freedom we obtain the Classical Field Theories or Quantum Field Theories. As a final objective, we present a Quantum Field Mechanics, which is the Quantum Field Theory for the electron,

---

<sup>1</sup>Graduando em Licenciatura em Física, Centro de Estudos Superiores de Tefé, Universidade do Estado do Amazonas, lfcf.fis17@uea.edu.br.

<sup>2</sup>Mestre em Física, Centro de Estudos Superiores de Tefé, Universidade do Estado do Amazonas, galima@uea.edu.br

this objective was achieved thanks to Klein-Gordon and Dirac, as they found a way to unify Quantum Mechanics with the Theory of Relativity.

**Keywords:** Field theory, Lagrangian, Hamiltonian, Quantum Mechanics and Theory of Relativity.

## INTRODUÇÃO

O conceito de campo varia de acordo com o tipo de abordagem usada. Na matemática os campos podem ser tratados como uma grandeza que possui determinado valor associado em todo espaço (ARFKEN, 2017) e (BUTKOV, 1983). Na Física Clássica os campos podem ser interpretados como uma abstração da interação entre corpos, enquanto que na Mecânica Quântica todas as partículas do *modelo padrão*, férmions e bósons surgem da natureza ou de propriedades de simetria desses campos (BASSALO, 2006). A abordagem a ser adotada neste trabalho é fundamentado na base para o entendimento da física de partículas, utilizando os estudos sobre teorias clássicas e quânticas de campos, vale resaltar que as teorias de campos referem-se à construção da dinâmica de um campo, usando o formalismo *Lagrangiano* ou *Hamiltoniano*.

Uma partícula num sistema de referencial inercial é descrita pela equação de Newton, além disso quando uma partícula é forçada a se mover sobre uma superfície, algumas extras forças aparecem de forma explícita (forças de vínculo). Em algumas situações se torna complexa a forma de se trabalhar com esses sistemas. Neste caso a mecânica de Newton foi alvo de críticas e controversas. Surge então formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano fundamentados pela mecânica analítica para evitar algumas das dificuldades práticas que surgem na aplicação das equações de Newton. Além disso, as aplicações dos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano abrangem sistemas fora do escopo da mecânica clássica. Por efeito de simplificação não foi preciso reformular uma nova mecânica, a teoria de Newton é bastante correta e todos os seus resultados podem ser obtidos de uma formulação dentro da mecânica analítica. Neste sentido podemos desenvolver um método alternativo para lidar com problemas complexos que é o princípio da mínima ação de Hamilton, ou somente princípio da mínima ação, e as equações de movimento resultantes da aplicação destes princípios são chamadas de equações de Lagrange (LEMOS, 2005).

A dinâmica de partículas que são descritas pelas equações de Lagrange, então devem ser equivalentes as equações de Newton. Já o princípio de Hamilton pode ser aplicado para um amplo intervalo de fenômenos, particularmente aqueles que envolvem campos. O princípio de Hamilton é um dos mais elegantes e de maior abrangência dos princípios da Física, pois nos fornece uma unificação de muitas teorias físicas por um único postulado básico. Este é o objetivo da teoria física, não somente para precisão à formulação matemática para fenômenos observados, mas também reformular postulados fundamentais de uma maneira mais unificada possível.

Após termos estes formalismos fundamentados, será possível formular os estudos sobre as teorias clássica e quânticas de campos. A teoria clássica de

campos descreve o estudo de como os campos físicos interagem com a matéria, sendo classificada como não-relativista e relativista, pois a descrição de campos começou antes da teoria da relatividade. Na teoria quântica de campos, o campo quântico preenche todo o espaço, é um campo vetorial de partículas subatômicas sendo que a grandeza é quantificada e a relação é uma função de onda. Ele permite saber todas as informações do sistema e dá as partículas as propriedades de interferência de uma onda. Na mecânica quântica todas as partículas tem características ondulatória.

Passaremos pelo advento da mecânica quântica relativística que é uma das teorias quânticas de campos. O objetivo nesta teoria quântica é obter uma função de onda relativística para o elétron (BASSALO, 2006). O primeiro a tentar unificar a mecânica quântica com a teoria da relatividade foi Klein-Gordon. Ele formulou uma equação de onda relativista que é uma versão relativista da equação de Schroedinger. No entanto, tal equação implicava em uma densidade de probabilidade não positiva definida. Apesar de ter sido abandonada como a direção correta para o desenvolvimento da mecânica quântica relativista, a equação de Klein-Gordon descreve uma partícula pontual que se propaga nos dois sentidos temporais, ocasionando evidências da existência de antipartículas. Em seguida, Dirac formulou uma equação de onda relativista com base nos erros de Klein-Gordon, esta equação descreve as partículas elementares como o elétron. Além disso foi comprovado experimentalmente a existência do *pósitron* (antipartícula do elétron) a qual foi proposta teoricamente por Dirac. (SAKURAI, 2013).

Faremos uma breve introdução das Teorias Clássicas e Quânticas de Campos nos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano, e chegaremos as equações de ondas relativistas propostas por Klein-Gordon e Dirac.

## 1. Mecânica Lagrangiana e Mecânica Hamiltoniana

A mecânica newtoniana se revela inconveniente quando se trabalha com sistemas numa escala de dimensões pequenas e também nos sistemas de alta velocidade (velocidades próximas à velocidade da luz). Como solução surgiram respectivamente duas áreas fundamentais no início do século XX, chamadas de Mecânica Quântica e Teoria da Relatividade. Nos sistemas mecânicos sujeitos a vínculos<sup>3</sup> de origem geométrica ou cinemática, a mecânica de Newton falha novamente, pois exige o uso variáveis redundantes e as forças de vínculos se fazem presentes. Neste caso, afim de superar essas delimitações da mecânica de Newton, surgiram duas mecânicas consistentes com a formulação newtoniana da dinâmica chamadas de mecânica lagrangeana e a mecânica hamiltoniana, são formulações mais abstratas em comparação com a mecânica clássica. A formulação lagrangiana tem o objetivo de escrever as equações de movimentos

---

<sup>3</sup> *Vínculos* são restrições impostas a sistemas físicos, neste contexto, são limitações das posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico.

a partir de uma única função escalar, a qual é expressa em termos de coordenadas generalizadas que não envolvem as forças de vínculos<sup>4</sup>. A formulação de Hamilton surge da necessidade de uma nova reformulação na mecânica newtoniana, em alguns sistemas mecânicos é mais conveniente resolvermos através do formalismo hamiltoniano, pois oferece um método elegante para investigações da estrutura da mecânica, além do mais, serve de fundamento para a mecânica quântica. Essas duas novas mecânicas excede o escopo da mecânica newtoniana, elas partem de proposições energéticas, que envolve a energia cinética e a energia potencial de sistemas clássicos, por onde podemos encontrar sua derivação de métodos variacionais, ou seja, elas permitem do ponto de vista teóricos uma compreensão mais profunda da mecânica de Newton, além do mais podemos fazer aplicações em sistemas dentro da mecânica quântica ou na teoria da relatividade.

Erwin Schroedinger se propôs pensar sobre uma analogia entre a mecânica e a óptica geométrica, e introduziu em seus pensamentos que a mecânica clássica fosse apenas uma forma aproximada de uma mecânica com características ondulatórias. Neste caso a falha no emprego da mecânica clássica nos sistemas microscópicos poderia ser levada em conta como análoga ao fracasso da óptica geométrica na explicação dos fenômenos ondulatórios de interferência e difração (LEMOS, 2005). Esse é um bom exemplo dos aspectos da física teórica. Introduzidas no domínio do muito grande (mecânica celeste), as variáveis de ação que serão vistas na formulação de Hamilton, revelam-se igualmente importantes no domínio do muito pequeno (física atômica). Neste caso a mecânica clássica se torna um caso fundamental do limite da mecânica quântica da mesma forma que a óptica geométrica é um caso limite da óptica física. Se Hamilton tivesse sido audacioso o suficiente, poderia ter proposto uma mecânica clássica como caso limite de uma mecânica com características ondulatórias, antecipando em quase um século a mecânica quântica. Pois a partir da formulação de Hamilton é possível encontrar a equação de Schroedinger<sup>5</sup>, que é fundamental para a mecânica quântica não-relativística.

## 1.1 Formulação Lagrangeana

Em 1788, Joseph-Louis Lagrange desenvolveu um formalismo que relaciona a conservação da energia com a conservação do momento linear de um sistema dinâmico. Com este formalismo é possível escrever as equações de movimento da maioria dos sistemas físicos a partir de uma função escalar que deve ser expressa em termos das coordenadas generalizadas (LEMOS, 2005). Essas coordenadas generalizadas é a menor quantidade de coordenadas de um sistema, elas fornecem a configuração de um sistema dinâmico, ou seja, as posições de cada partícula em um determinado intervalo de tempo. Este formalismo tem

---

<sup>4</sup>Há casos em que os sistemas têm vínculos não-holônomos, neste caso usamos os multiplicadores de lagrange, que passam a compor o espaço das coordenadas generalizadas, para que uma formulação lagrangiana seja possível.

<sup>5</sup>É uma equação diferencial parcial linear que descreve como o estado quântico de um sistema físico muda com o tempo.

a vantagem de não envolver as forças de vínculos. d'Alembert procurou desenvolver um formalismo em que escreve-se as equações de movimento em termos das forças aplicadas, no entanto aumentaria a complexidade na busca de uma equação de movimento do sistema mecânico, pois o princípio de d'Alembert exige trabalhar com mais coordenadas do que o necessário. Este é um passo intermediário para chegar no formalismo de Lagrange.

## 1.2 Coordenadas Generalizadas

É possível introduzir um número de  $n$  variáveis independentes em sistemas holônomo<sup>6</sup>, que denotamos genericamente por  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , chamadas de coordenadas generalizadas. A partir de um sistema mecânico com  $N$  partículas que está submetido a  $p$  vínculos holônomo, das  $3N$  coordenadas apenas  $n = 3N - p$  são independentes entre si, onde este sistema possui  $n$  graus de liberdade sendo possível introduzir  $n$  coordenadas generalizadas  $\xi_1, \dots, \xi_n$  (LEMOS, 2005). As coordenadas generalizadas nos fornecem a configuração do sistema, ou seja, a posição de todas as partículas um determinado instante de tempo. Em outras palavras, as coordenadas generalizadas são um conjunto de quaisquer parâmetros numéricos possível para determinar a configuração de um sistema mecânico com um número finito de graus de liberdade.

O *espaço de configuração* do sistema é o espaço cartesiano  $n$ -dimensional que tem as coordenadas generalizadas como eixos coordenados. É possível fazer uma representação simbólica do espaço de configuração. Um sistema dinâmico holônomo tem tantos graus de liberdade quanto sejam as coordenadas generalizadas necessárias e suficientes para determinar a sua configuração a cada instante (LEMOS, 2005).

## 1.3 Equações de Lagrange

No formalismo lagrangeano, as forças  $\mathbf{F}_i$  derivam de um potencial escalar  $V(\xi_1, \dots, \xi_n, t)$ . Ou seja, a força é igual ao gradiente negativo de um potencial escalar,  $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$ . A equação de Lagrange foi descoberta em meados do século XVIII nos estudos de Euler e Lagrange relacionado ao problema da curva tautocrônica. Esta equação também chamada de equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, e suas soluções são funções em que uma dada função é estacionária, isto vem do cálculo de variações. A evolução de um sistema físico é descrito pela solução da equação de Euler-Lagrange para uma determinada ação do sistema (LEMOS, 2005).

Definindo a *função de Lagrange*, também chamada de *Lagrangeana*  $L$  (LEMOS, 2005)

$$L = T - V \quad ,$$

---

<sup>6</sup>Sistemas em que os vínculos podem ser integráveis. Em outras palavras, sistemas em que as equações de vínculo permitem que sejam escritas relações entre as coordenadas generalizadas que permitam o cancelamento de uma delas.

Em que a função  $T$  corresponde a energia cinética do sistema e  $V$  é a energia potencial do sistema.

A Equação de Lagrange é definida da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_k} = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, n.$$

É possível determinar a configuração de um sistema físico a partir das coordenadas generalizadas em função do tempo, as equações de Lagrange nos fornecem um meio mais fácil para determinar as equações de movimento, uma das suas grandes características é que envolvem o número mínimo de coordenadas e eliminam qualquer relação com as forças de vínculos, ou seja, o potencial na lagrangiana refere-se apenas a forças aplicadas. No método lagrangeano as funções escalares  $T$  e  $V$  caracterizam um sistema mecânico, o que introduz enormes simplificações em problemas mecânicos. A equação de Euler-Lagrange é válida para uma escolha arbitrária de coordenadas generalizadas, e suas funções escalares devem ser expressas em termos relativamente a um mesmo referencial inercial. Isto se deve por que as equações de Euler-Lagrange foram deduzidas a partir da segunda lei de Newton  $\mathbf{F}_i = \frac{dp_i}{dt}$ , que é válida somente para referenciais inerciais<sup>7</sup>.

## 1.4 Aplicações

As aplicações das equações de Lagrange permite escrever as equações associadas a um dado sistema mecânico. Para isso é preciso determinar as coordenadas generalizadas do sistema, em seguida as energias potencial e cinética devem ser expressas em termos destas coordenadas, de modo que a lagrangiana fica expressa somente em função das coordenadas e velocidades generalizadas. Em seguida basta calcular as derivadas parciais de  $L$  e introduzi-las nas equações de Lagrange. Desta forma fica concluído o processo de construção das equações de movimento do sistema. Como exemplo, determinaremos a lagrangiana para uma partícula em um campo eletromagnético externo.

### 1.4.1 A Lagrangiana Para uma Partícula em um Campo Eletromagnético Externo.

Essa seção está baseada em LEMOS (2005). A força de Lorentz descreve o movimento de uma carga elétrica  $e$  na presença de um campo eletromagnético

$$\mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad ,$$

---

<sup>7</sup>Aqui não se pretende entrar numa discussão acerca da definição de um referencial inercial à partir do qual, justamente, é válida a segunda lei de Newton. Nesse texto, toma-se o referencial inercial como um dado previamente conhecido.

É possível exprimir o campo elétricos  $\mathbf{E}$  em termos de um potencial escalar  $\varphi(r, t)$  e o campo magnéticos  $\mathbf{B}$  em termos de um potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ .

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad ,$$

Onde, a força de Lorentz pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{F} = e \left[ -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad ,$$

Usando a identidade

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad ,$$

A força de Lorentz reduz a,

$$\mathbf{F} = e \left[ -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{1}{c}\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right] \quad ,$$

Levando em conta que as coordenadas e velocidades generalizadas são tratadas como quantidades independentes e com o uso do operador  $\nabla_v = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$  podemos expressar a força de Lorentz como

$$\mathbf{F} = e \left[ -\nabla \left( \varphi - \frac{1}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) \right] - \frac{e}{c}\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\nabla \left( e\varphi - \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) + \frac{d}{dt} \left[ \nabla_v \left( e\varphi - \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) \right] \quad ,$$

Pois  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$ , não dependem da velocidade. Neste caso a força pode ser expressa em termos de potencial generalizado  $U$

$$U = e\varphi - \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad ,$$

Assim, a lagrangiana fica

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad ,$$

Chamamos a função  $L$  de lagrangiana de uma partícula carregada na presença de um campo eletromagnético externo. Para determinar a equação de movimento desta partícula basta introduzir  $L$  na equação de Euler-Lagrange

## 2.1 Princípio variacional de Hamilton

O *princípio variacional de Hamilton* ou *princípio da mínima ação* é um método alternativo de lidar com problemas complicados de uma maneira geral. A **equação de Euler-Lagrange** pode ser derivada deste princípio variacional. Neste caso não é preciso reformular uma nova teoria para mecânica de Newton. A equação de Euler-Lagrange é constituída para descrever a dinâmica de partículas, então devem levar a resultados equivalentes das equações Newtonianas. O princípio de Hamilton pode ser aplicado para um amplo intervalo de fenômenos físicos que envolvem *campos* e que não tem nenhuma associação com equações Newtonianas. Este princípio não nos forneceu nenhuma teoria física nova, mas nos deixou uma unificação de uma única teoria individual por um único postulado básico, isso ocorre por que este tem a forma de um princípio varacional<sup>8</sup>. A Física como ciência, tem o objetivo de condensar todos os fenômenos naturais num único princípio (Santo Graau da Física). Dentre todas as formulações da dinâmica clássica, o *princípio da mínima ação* talvez seja o que mais se aproxima deste objetivo final. (ARFKEN, 2017) e (LEMOS, 2005).

O princípio variacional de Hamilton, estabelece que a ação  $S$  possui um valor extremo, seja ele estacionário, máximo ou mínimo para a trajetória física real. Este princípio é um pressuposto básico da mecânica clássica e da mecânica relativista que descreve a evolução ao longo do tempo tanto do movimento de uma partícula ou um sistema de partículas como de um campo físico (grandeza física que possui um valor associado em todo ponto do espaço) (BASSALO, 2011).

O princípio de Hamilton reduz as leis da mecânica a um enunciado que diz, se uma partícula se movimenta entre dois pontos, ela sempre escolherá a trajetória que produz uma menor ação (LEMOS, 2005), ou seja, a partícula sempre busca a trajetória que exige menos energia. Dentre todos os movimentos imagináveis, o movimento real é aquele a qual a ação produzida é mínima.

**Definição 2.1.1** Dado um sistema mecânico holônomo descrito pela lagrangiana  $L(\xi, \dot{\xi}, t)$ , seu movimento do instante  $t_1$  ao instante  $t_2$  é tal que ação  $S$  é mínima para trajetória real

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\xi, \dot{\xi}, t) dt \quad ,$$

---

<sup>8</sup>O princípio variacional é um problema matemático que consiste em buscar máximos e mínimos de funções contínuas definidas sobre algum espaço.



Os pontos inicial e final da trajetória no espaço de configuração devem ser mantidos fixos. (LEMOS, 2005).

É possível obter a equação de Euler-Lagrange a partir do princípio variacional  $\delta S = 0$  para sistemas holônomos, de forma que isto introduz uma descrição geométrica da dinâmica lagrangiana, ou seja a evolução dinâmica corresponde a uma trajetória traçada no espaço de configuração e a partir disso o princípio de Hamilton pode ser enunciado (BASSALO, 2011).

Uma das consequências importante do princípio de Hamilton é que as mesmas equações de movimento são geradas por duas lagrangianas  $\bar{L}(\xi, \dot{\xi}, t)$  e  $L(\xi, \dot{\xi}, t)$  que só se diferenciam pela derivada total em relação ao tempo de uma função arbitrária  $f(\xi, t)$  das coordenadas generalizadas (LEMOS, 2005). Estas lagrangianas são chamadas de equivalentes. Se tivermos,

$$\bar{L}(\xi, \dot{\xi}, t) = L(\xi, \dot{\xi}, t) + \frac{d}{dt} f(\xi, t) \quad ,$$

A ação  $\bar{S}$  associada a  $\bar{L}$  é dada por

$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{L}(\xi, \dot{\xi}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\xi, \dot{\xi}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt \quad ,$$

$$\bar{S} = S + f(\xi(t_2), t_2) - f(\xi(t_1), t_1) \quad ,$$

Se tomarmos a variação da ação nos extremos fixos, então  $\delta S = \delta \bar{S}$ . Portanto,  $\delta S = 0$  e  $\delta \bar{S} = 0$  são idênticas, sendo assim  $L$  e  $\bar{L}$  produzem as mesmas equações de movimento.

A primeira aplicação de um princípio geral da mínima ação na mecânica foi feita por Maupertuis, pois determinou que a dinâmica do movimento ocorre a mínima ação. Mais tarde Lagrange forneceu um fundamento matemático para este princípio (LEMOS, 2005).

## 2.2 Propriedade de Simetria e Leis de Conservação

As simetrias<sup>9</sup> e as leis de conservação têm uma relação fundamental descoberta ao longo do século XX. As simetrias e o princípio de conservação é uma forma de interpretar a maneira como as interações fundamentais atuam<sup>10</sup>. O teorema que garante esta relação entre as leis de conservação e a invariância dos sistemas físicos sobre operação de simetria foi criado por **Noether**, e diz

<sup>9</sup>É um tipo de invariância, ou seja, a propriedade de que algo não se altera sob um conjunto de transformações.

<sup>10</sup>Os bóson mediadores (fótons e glúons, por exemplo) surgem da imposição de simetria por transformações de calibre na lagrangiana geradora das suas respectivas teorias.

que a existência de simetria em um fenômeno indica a conservação de alguma grandeza física. O teorema de Noether é uma ferramenta muito poderosa e indispensável na descrição matemática das teorias que envolvem as partículas elementares, e também vai admitir uma generalização importante que reflete a propriedade das lagrangianas equivalentes. (LEMOS, 2005)

### 2.2.1 Constantes de Movimento

Na física, as constantes de movimento são grandezas conservadas, ou seja, são quantidades que não mudam seu valor durante a evolução dinâmica do sistema. Se  $f(\xi, \dot{\xi})$  é uma função das coordenadas e velocidades generalizadas

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad ,$$

Neste caso  $f$  é uma constante de movimento.

A importância das constantes de movimento é que elas produzem equações diferenciais de primeira ordem que fornecem informações a respeito da evolução temporal do sistema.

**Definição 2.1.2.** Se  $L(\xi, \dot{\xi}, t)$  é a lagrangiana de um sistema com  $n$  graus de liberdade. Definimos uma quantidade  $p_k$  (LEMOS, 2005)

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} \quad ,$$

Chamada de **momento canônico conjugado** à coordenada  $\xi_k$ .

**Definição 2.1.2** Se a lagrangiana do sistema não depender de uma determinada coordenada  $\xi_k$ , então chama-se esta coordenada de **cíclica** ou **ignorável**. Neste caso o momento conjugado a uma coordenada cíclica é definido como uma constante de movimento. (LEMOS, 2005)

Se  $\xi_k$  é a coordenada cíclica de  $L$ , então a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_k} = 0 \quad ,$$

reduz-se a

$$\frac{dp_k}{dt} = 0 \quad ,$$

Portanto,  $p_k$  é uma constante.

Como a lagrangiana independe das variações de coordenadas cíclicas, podemos interpretar esta ausência como uma propriedade de simetria da lagrangiana. Se for feita qualquer alteração em  $\xi_k$ ,  $L$  não mudará seu valor, ou seja  $L$  é invariante sob o deslocamento de uma coordenada cíclica que corresponde à uma translação, do mesmo modo que o deslocamento de uma coordenada cíclica angular corresponde à uma rotação. Desta forma é possível verificar a íntima relação entre as propriedades de simetria da lagrangiana sobre translações e rotações e as leis de conservação do momento linear e do momento angular.

A conservação do momento linear garante que em qualquer lugar do espaço que for realizado uma determinada experiência deve-se obter mesmo resultado, que indica uma simetria de translação no espaço. A conservação do momento angular indica uma simetria de rotação no espaço, já que não importa a direção em que o fenômeno ocorre, os resultados permanecem os mesmos (LEMOS, 2005).

**Teorema 2.1.1** Se um sistema físico é descrito pela lagrangiana  $L = T - V$ , onde  $V$  é um potencial que independe das velocidades. Se a lagrangiana e os vínculos são invariantes sobre uma translação arbitrária, então o momento linear do sistema é conservado (LEMOS, 2005).

Se  $\mathbf{p}_i$  é o momento linear da  $i$ -ésima partícula, então

$$\frac{d}{dt}(\hat{n} \cdot \mathbf{P}) = 0 \quad ,$$

A componente do momento linear  $\mathbf{P}$  na direção  $\hat{n} = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ , se conserva. (LEMOS, 2005)

**Teorema 2.1.2** Se  $V$  é um potencial independente das velocidades, e a lagrangiana e os vínculos são invariantes sob uma rotação arbitrária, então o momento angular total do sistema é conservado.

$$\frac{d}{dt}(\hat{n} \cdot \mathbf{L}) = 0 \quad ,$$

Neste caso a componente do momento angular total  $\mathbf{L}$  ao longo da direção  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  é a constante de movimento. (LEMOS, 2005)

Estes resultados podem ser aplicados a sistemas de partículas isoladas e a sistemas de corpos rígidos. É possível mostrar com os dois últimos teoremas que

para um sistema isolado, invariante sobre translações e rotações, a força interna e os torques internos são nulos, isto porque o momento linear e o momento angular são constantes. A simetria sobre translações e rotações garante a conservação do momento angular e do momento linear (BASSALO, 2011).

Na dinâmica lagrangiana os sistemas são dotados de forças que derivam de um potencial dependente apenas das posições das partículas, neste caso um teorema de conservação de energia é incluído. Vamos mostrar um teorema de conservação que reduz à lei da conservação da energia num caso especial. Aqui será conveniente considerar sistemas descritos por coordenadas generalizadas  $(\xi_1, \dots, \xi_k, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_k)$  e pela lagrangiana  $L(\xi_1, \dots, \xi_k, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_k, t)$  (LEMOS, 2005).

**Teorema 2.1.3** Se um sistema com coordenadas generalizadas  $(\xi_1, \dots, \xi_k, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_k)$  e com lagrangiana  $L = T - V$ . Sendo que  $L$  não depende explicitamente do tempo, neste caso definimos uma quantidade  $h$

$$h = \sum_k \dot{\xi}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} - L \quad ,$$

é uma constante de movimento, também chamada de **integral de Jacobi**.

Após fazer uma derivada total em  $h$  em relação ao tempo, temos

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad ,$$

$L$  não depende explicitamente do tempo, de modo que  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , assim  $h$  é uma constante de movimento. Sendo assim, é possível analisar  $h$  como energia total do sistema.

Se  $L = T - V$ ,  $T$  é uma função quadrática da velocidade e  $V$  independe das velocidades, tem-se

$$h = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_k} \dot{\xi}_k - (T - V) \quad ,$$

A partir da energia cinética em termos das coordenadas e velocidades generalizadas, nos diz que  $T$  é uma função homogênea do segundo grau das velocidades generalizadas. Pelo teorema de Euler das funções homogêneas

$$h = 2T - (T - V) = T + V = E \quad ,$$

Neste caso,  $h$  é a energia total do sistema.

**Demonstração:** Se  $T$  é uma função homogênea de grau  $p$ , então existirá um número real  $p$  tal que (LEMOS, 2005)

$$T(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p T(x_1, \dots, x_n) \quad ,$$

$\lambda$  é um número real positivo e arbitrário. Neste caso, como a lagrangiana é uma função diferenciável e homogênea de grau  $p$ , definimos  $v_1 = \lambda x_1, \dots, v_m = \lambda x_m$ , desta forma

$$T(v_1, \dots, v_m) = \lambda^p T(x_1, \dots, x_m) \quad ,$$

Diferenciando esta última equação em relação a  $\lambda$ , temos

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial T}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial \lambda} = p \lambda^{p-1} T \implies \sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial T}{\partial v_k} = p \lambda^{p-1} T \quad ,$$

Fazendo  $\lambda = 1$ , esta equação se reduz a função diferenciável homogênea citada acima

$$\sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial T}{\partial v_k} = p \lambda^{p-1} T = p T \quad ,$$

Onde  $T$  é um função quadrática, então  $p = 2$ .

Vale destacar que as condições que asseguram a conservação de  $h$  são completamente independentes daquelas que garante a igualdade entre  $h$  e a energia total. Assim  $h$  pode ser conservada sem a necessidade de ser a energia total ou ser a energia total sem ser conservada. Desta forma o valor e a forma do funcional de  $h$  dependem do particular conjunto de coordenadas generalizadas que se tenha escolhido.

Com estes três últimos teoremas surgem uma nova ideia das origens das constantes de movimento fundamentais da mecânica, ao associarem as leis de conservação à propriedades geométricas do espaço-tempo. A homogeneidade e isotropia do espaço refletem-se na invariância da lagrangiana e dos vínculos sob translações e rotações, dando lugar à conservação do momento linear e do

momento angular. A homogeneidade temporal reflete-se na imutabilidade da lagrangiana e dos vínculos frente a uma mudança na origem do tempo, dando lugar a conservação da energia (LEMOS, 2005) (BASSALO, 2011).

### 3. Dinâmica Hamiltoniana

A dinâmica Hamiltoniana foi elaborada em 1833 por William Rowan Hamilton. É uma reformulação da mecânica clássica que tem aplicações na mecânica Newtoniana, mecânica quântica e a teoria da relatividade. A dinâmica Hamiltoniana tem uma importância fundamental, pois fornece um método flexível relacionados a estrutura da mecânica, ou seja, nos fornece uma maneira nova de olhar para a mecânica clássica e outras áreas. No entanto, ela não nos fornece uma maneira conveniente para resolver problemas em particular, sendo muita das vezes mais fácil trabalhar com a dinâmica lagrangiana. É possível obter o formalismo hamiltoniano através do formalismo lagrangiano por uma transformação de Legendre<sup>11</sup>. As equações de Lagrange constituem um conjunto de  $n$  equações diferenciais parciais de segunda ordem no tempo para as coordenadas generalizadas, e o movimento é representado por uma curva traçada no espaço de configuração<sup>12</sup>. Na formulação introduzida por Hamilton as equações de movimentos são  $2n$  equações diferenciais ordinária de primeira ordem no tempo para  $2n$  variáveis independentes, e o movimento é representado por uma curva traçada no espaço de fase<sup>13</sup>, um ponto no espaço de fase determina o estado do sistema, ou seja, as posições e as velocidades das partículas num dados instante (BASSALO, 2011) (LEMOS, 2005).

#### 3.1 Equações de Hamilton

Definimos uma grandeza  $p_i$  descrita na dinâmica por intermédio de  $2n$  quantidades como *momento canonicamente conjugado a  $\xi_i$* .

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n.$$

Esta equação pode ser resolvida para as velocidades generalizadas. Desta forma, na descrição hamiltoniana substitui-se as variáveis  $(\xi, \dot{\xi})$  por  $(\xi, p)$  e introduzimos uma função  $H(\xi, p, t)$  no lugar da lagrangiana  $L(\xi, \dot{\xi}, t)$  para gerar

<sup>11</sup>A *transformação de Legendre* quando aplicada à uma função diferenciável em relação as variáveis independentes  $\xi_i$ , fornece uma nova equação na qual as derivadas parciais associadas são tomadas como variáveis independentes.

<sup>12</sup>É uma descrição geométrica da dinâmica lagrangiana. Um ponto no espaço de configuração corresponde a um conjunto de valores determinados  $(\xi, \dots, \xi_n)$  que define a configuração do sistema mecânico. A medida que o tempo passa, o estado do sistema se modifica, e o ponto descreve uma curva no espaço de configuração, que representa o movimento do sistema. (LEMOS 2005)

<sup>13</sup>As quantidades  $(\xi, p)$  são chamadas de *variáveis canônicas* e o espaço cartesiano de  $2n$  dimensões cujos pontos são representados pelas  $2n$ -uplas  $(\xi, p) = (\xi, \dots, \xi_n, p, \dots, p_n)$  é chamado de espaço de fase. (LEMOS 2005)

a dinâmica. Esta mudança é realizada através de uma *transformação de Legendre* que substitui as velocidades generalizadas pelos momentos canônicos como variáveis básica na função hamiltoniana  $H(\xi, p, t)$  definida por (LEMOS, 2005)

$$H(\xi, p, t) = \sum_i \dot{\xi}_i p_i - L(\xi, \dot{\xi}, t) \quad ,$$

Tomando a diferencial desta transformação, obtemos

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{\xi}_i dp_i + p_i d\dot{\xi}_i) - \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} d\dot{\xi}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right\} \quad ,$$

Pela definição do momento canônico e das equações de Lagrange, esta equação fica

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{\xi}_i dp_i - \dot{p}_i d\xi_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad ,$$

Tomando a derivada da função  $H(\xi, p, t)$ , obtemos

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad ,$$

Comparando estas duas ultimas equações  $dH = dH$  obtemos

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}$$

Estas duas primeiras equações são chamadas de equações de Hamilton, que formam um conjunto de  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem equivalente as equações de Lagrange. As quantidades  $(\xi, p)$  são chamadas de variáveis canônicas e o espaço cartesiano é chamado de espaço de fase. A primeira equação exprime as velocidades generalizadas em termos das variáveis canônicas, ela é inversa das equações que definem os momentos canônicos.

A igualdade

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad ,$$

não se constitui uma nova equação de movimento, mas é uma importante relação entre a dependência temporal explícita da lagrangiana e da hamiltoniana.

### 3.2 Hamiltoniana e Energia Total

Utilizando a lagrangiana  $L = T - V$ . Se  $T$  é uma função quadrática das velocidades e  $V$  uma função independente das velocidades, então (LEMOS, 2005)

$$\sum_i \dot{\xi}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = \sum_i \dot{\xi}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} = 2T \quad ,$$

Neste caso,

$$H = T + V = E \quad ,$$

A Hamiltoniana é a energia total expressa em função das coordenadas e momentos.

As equações de Lagrange são invariantes sobre uma transformação geral de coordenadas, isto é, sua forma não será alterada independente da escolha das coordenadas. Na dinâmica Hamiltoniana as coordenadas e momentos são variáveis independentes, possibilitando a mudança de variáveis no espaço de fase que preservem a forma das equações de Hamilton. Isto possibilita escolher as variáveis que simplifiquem a hamiltoniana e facilitem a resolução das equações de movimento (LEMOS, 2005).

### 3.3 Aplicação da formulação Hamiltoniana

Neste momento vamos construir a hamiltoniana e as equações de Hamilton para uma partícula num campo eletromagnético externo. A lagrangiana de uma partícula num campo eletromagnético é (LEMOS, 2005)

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad ,$$

Substituindo esta função nas equações de Hamilton, obtemos

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x \quad , \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{e}{c} A_y \quad , \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \frac{e}{c} A_z \quad ,$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \quad ,$$



Substituindo estas equações na função hamiltoniana, temos

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi \quad ,$$

Por fim, substituindo essa função nas equações de Hamilton, encontramos

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \quad ,$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\nabla H = \frac{e}{mc} \left[ \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \nabla \mathbf{A} + \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \right) \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] - e \nabla \phi \quad ,$$

### 3.4 Simetrias e Leis de Conservação

Já que a formulação Hamiltoniana pode ser obtida a partir da formulação lagrangeana, é necessário que as propriedades de simetrias e leis de conservação apareçam nesta nova formulação. Em consequência da definição dos momentos canônicos da hamiltoniana, se  $H$  é invariante sobre  $\xi_j$ . Neste caso em decorrência das equações de Hamilton, temos (LEMOS, 2005)

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial \xi_j} = 0 \quad ,$$

Desse modo, o momento conjugado a  $\xi_j$  é a constante de movimento.

Como já foi visto se a lagrangiana não depende explicitamente do tempo, então  $h$  se conserva. Embora dependam de variáveis diferentes,  $H$  e  $h$  têm o mesmo valor. Desta forma, deve haver um teorema de conservação para  $H$ . Obtendo a diferenciação da função hamiltoniana

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad ,$$

Substituindo as equações de Hamilton na função hamiltoniana, temos

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad ,$$

Neste caso, obtemos

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad ,$$

Como  $H$  deriva de  $L$ ,  $H$  depende do tempo se e somente se  $L$  também depender. Como foi visto anteriormente  $L$  não depende explicitamente do tempo, então  $H$  coincide com a energia total do sistema, neste caso comprova o teorema da conservação da energia. Em algumas situações pode acontecer de  $H$  se conservar sem ser a energia total, ou  $H$  ser a energia total e não se conservar.

#### 4. Teorias Clássicas de Campos

O objetivo geral da *Teoria Clássica de Campos* é utilizar uma lagrangiana para escrever em função dos campos e de seus potenciais. A mecânica Newtoniana tem como característica a "ação à distância", igualmente expressa na lei da gravitação universal. A terceira lei de Newton "ação e reação" tem como consequência a conservação do momento linear total. Se tomarmos a ação e reação ocorrendo em pontos distantes, a terceira lei de Newton gera ambiguidade na relatividade especial. Se a terceira lei ocorrer em objetos que estejam em contatos nenhum problema é gerado em relação a teoria da relatividade especial. Neste caso a ação a distância é incompatível com a relatividade, pois envolve a propagação instantânea, ou seja, as partículas interagem com velocidades infinitas. Na relatividade estipulamos uma velocidade limite que é a velocidade da luz, nada que possa transportar energia e momento consegue ultrapassar esta velocidade. Para solucionar este problema foi concebido a "ação a distância retardada". Desta forma qualquer alteração no estado de uma partícula somente seria sentido por outra partícula após determinado tempo igual ao necessário para a luz percorrer a distância entre elas. Neste caso estimamos o surgimento de um momento linear em trânsito de uma partícula para as outras a fim de assegurar a conservação do momento linear total. Isto indica que as interações entre as partículas elementares devem ser mediadas por entidades chamadas "campos", sendo portador de propriedades mecânicas como energia e momento linear (BASSALO, 2006) e (LEMOS, 2005).

A ideia de "campo" surgiu através da construção matemática na descrição da "gravitação newtoniana", este formalismo foi estendido por físicos como Ampère, Ohm e Faraday tanto para fenômenos elétricos quanto magnéticos. Devido a Maxwell, o conceito de campo passa a ter mais importância.

Todos os sistemas contínuos são descritos por campos, neste caso a mecânica analítica tem importância fundamental, pois todas as teorias de campos podem ser descritas pelos formalismos de Lagrange e Hamilton gerando uma teoria clássica de campos (LEMOS, 2005). Em seguida pode-se fazer uma transição canônica através dos "parênteses de Poisson"<sup>14</sup> para uma (*TQC*) "Teoria Quântica de Campos". As interações das partículas elementares são expressas por meio das *TQC*. Temos como objetivo analisar a teoria clássica de campos nas

<sup>14</sup>Os parênteses de Poisson são de enorme importância devido ao papel fundamental que desempenha na transição da teoria clássica para a teoria quântica. (LEMOS, 2005)

linguagens lagrangiana e hamiltoniana para as interações fundamentais da natureza.

#### 4.1 Teoria de Campos na Forma Lagrangiana

Definiremos um sistema mecânico com um número finito de graus de liberdade pelas coordenadas generalizadas  $\xi_k(t)$ . Um sistema contínuo é descrito pela coordenada  $\eta_x(t)$ , ou seja trocamos o índice discreto  $k$  pelo índice contínuo  $x$ . Neste contexto iremos utilizar a notação  $\eta(x, t)$ . Em um sistema discreto a lagrangiana envolve a soma de todos dos graus de liberdade, já a lagrangiana de um sistema contínuo pode ser expressa em termos da integral espacial de uma função chamada *densidade lagrangiana*  $\mathcal{L}$ , de modo que esta densidade lagrangiana deva depender de um termo cinético, no entanto depende de  $\dot{\eta}(x, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ . Vamos supor que um campo  $\eta$  num ponto  $x$  interage consigo mesmo apenas em uma vizinhança infinitesimal desse ponto. Desta forma  $\mathcal{L}$  irá depender de  $\eta(x, t)$  e  $\eta(x + dx, t + dt)$ . Neste caso é mais conveniente usar  $\eta'(x, t) = \frac{\partial \eta}{\partial x}$ . É possível verificar uma dependência em  $x$  e  $t$ . Para uma teoria de campos unidimensionais a ação mais geral é da forma (LEMOS, 2005)

$$S = \int_{t_2}^{t_1} L dt = \int_{t_2}^{t_1} dt \int_{x_2}^{x_1} \mathcal{L} \left( \eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, x, t \right) dx$$

Esta é a ação para um um campos unidimensional, a equação de Lagrange para o campo  $\eta$  decorre do princípio de Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{t_2}^{t_1} dt \int_{x_2}^{x_1} \mathcal{L} dx = 0$$

##### 4.1.2 Equações de Lagrange

Aplicando o princípio variacional de Hamilton, sendo que a variação dos campos se anula nos extremos temporais e espaciais, podemos encontrar a equação de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \eta}{\partial t})} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \eta}{\partial x})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0 \quad ,$$

Para campos em três dimensões espaciais representados por  $\eta(\eta_1, \dots, \eta_N)$ , as equações de Lagrange derivam do princípio de Hamilton em três dimensões

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L} \left( \eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \nabla \eta, x, t \right) = 0 \quad ,$$

Assim, a equação de Lagrange para teoria de campo fica

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} \right)} \right) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \eta_\alpha)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\alpha} = 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Esta equação de Lagrange permanece a mesma sob uma mudança de coordenada, fazendo  $x^0 = ct$ , encontramos a equação de Lagrange na forma relativística

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \eta_\alpha)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\alpha} = 0$$

Se  $\eta_\alpha$  e  $\mathcal{L}$  forem escalares, esta equação será invariante sob transformações de Lorentz.

Algumas teorias demandam o emprego dos campos complexos, que são formados por dois campos reais independentes, logo consideramos o proprio campo  $\psi$  e seu complexo conjugado  $\psi^*$  como campos independentes entre sí. Para cada campo complexo teremos um par de equações de Lagrange. Tomando  $\eta_\alpha = \psi$  e  $\eta_\alpha = \psi^*$ .

Um exemplo é tomarmos  $\psi$  um campo complexo, afim de obter uma densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  de uma partícula sujeita a um potencial  $V(x, t)$

$$\mathcal{L} = i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - V(x, t) \psi^* \psi \quad ,$$

Substituindo esta densidade lagrangeana nas equações de Lagrange para teoria de campos clássicos, obtemos

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x, t) \psi \quad ,$$

Dessa forma a equação de Lagrange corresponde a equação de Schroedinger.

## 4.2 Teoria de Campos na Forma Hamiltoniana

Vamos definir o momento canonicamente conjugado a  $\eta_\alpha(x)$  como  $\pi^\alpha(x)$ , igualmente como foi feito na dinâmica de partículas (LEMOS, 2005):

$$\pi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\alpha(x)} \quad ,$$

Neste caso podemos interpretar a densidade hamiltoniana  $\mathfrak{H}$ , como densidade de energia e sendo definida como

$$\mathfrak{H} = \sum_\alpha \pi^\alpha \dot{\eta}_\alpha - \mathcal{L} \quad ,$$

Se expressarmos a densidade hamiltoniana em termos de  $\pi^\alpha$ ,  $\eta_\alpha$ ,  $\nabla \pi^\alpha(x)$  e  $\nabla \eta_\alpha(x)$ . Encontramos a hamiltoniana

$$H[\eta_\alpha, \pi^\alpha] = \int d^3x \mathfrak{H}(\eta_\alpha(x), \nabla \eta_\alpha(x), \pi^\alpha(x), \nabla \pi^\alpha(x)) \quad ,$$

Que será um funcional dos campos e de seus momentos conjugados.

### 4.2.1 Equações de Hamilton

Para encontrar as equações de Hamilton para campos clássicos, será necessário exprimir a ação na forma hamiltoniana (LEMOS, 2005)

$$S = \int_\Omega d^4x \{ \sum_\alpha \pi^\alpha \dot{\eta}_\alpha - \mathfrak{H}(\eta_\alpha, \nabla \eta_\alpha, \pi^\alpha, \nabla \pi^\alpha) \} \quad ,$$

Se usarmos o princípio varacional  $\delta S = 0$ , obtemos as equações de Hamilton variando independentemente os campos e seus momentos canonicamente conjugados.

$$\dot{\eta}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi^\alpha} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial (\nabla \pi^\alpha)} \quad ,$$

$$\dot{\pi}^\alpha = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \eta_\alpha} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial (\nabla \eta_\alpha)} \quad .$$

Estas são as equações de campos na forma Hamiltoniana. É possível escrever essas equações na forma condensada como mostramos a baixo

$$\dot{\eta}_\alpha(x) = \frac{\delta H}{\delta \pi^\alpha(x)} \quad , \quad \dot{\pi}^\alpha(x) = -\frac{\delta H}{\delta \eta_\alpha(x)}$$

E dessa forma fica definido a teoria de campos na forma Hamiltoniana. Como análise podemos trabalhar com vários campos como o "*campo de Klein-Gordon*" ou o "*campo eletromagnético*". A teoria clássica de campos podem sofrer uma quantização canônica para uma teoria quântica de campos através dos "*Parênteses de Poisson*", ou seja aplica-se uma propriedade de comutação. Os parênteses de Poisson para uma variável dinâmica na formulação hamiltoniana fica igual à (LEMOS, 2005)

$$\{\eta_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi^\beta(\mathbf{y}, t)\} = \delta_\alpha^\beta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

## 5. Mecânica Quântica Relativística

No início do século XX os físicos se propuseram encerrar o escopo da física. Suas ideias, seus métodos, leis, teorias, fundamentos estavam todos respectivamente calculados, analisados e quantificados. Apenas dois experimentos faltavam ser explicados, o experimento do *efeito fotoelétrico* e o experimento da *radiação do corpo negro*. Dois físicos da época Albert Einstein e Max Planck deram soluções a estes problemas, gerando uma grande revolução na Física no início do século XX, uma vez que eles causaram o surgimento de duas das áreas fundamentais para a Física que é a *Mecânica Quântica* e a *Teoria da Relatividade*. A mecânica quântica surgiu da incapacidade da termodinâmica e do eletromagnetismo em trabalhar em escala microscópica, ou seja, escala atômica e subatômica, das partículas que compõe o átomo, trabalha com sistemas quantizados, sistemas atômicos de alta energias. Já a teoria da relatividade trabalha em uma escala macroscópica, com massas grandes, velocidades altas (velocidades consideravelmente próximas à velocidade da luz) e altas energias. Se tivermos um sistema onde uma partícula se propaga com velocidade próxima a velocidade da luz, neste caso é necessário unificar essas duas áreas fundamentais (mecânica quântica e relatividade) que foi um dos grandes objetivos da Física em meados do século XX. Fazendo esta unificação obte-se uma *mecânica quântica relativística*, que é também uma *Teoria Quântica de Campos*. A teoria quântica de campos se torna um conjunto de ideias e técnicas matemáticas com o objetivo de descrever quânticamente os sistemas físicos associados a um número infinito de graus de liberdade. A TQC nos proporciona uma estrutura teórica usada em diversas áreas da física, além do mas utilizamos o método de quantização, que por sua vez utiliza as propriedades de comutação para os operadores, quantizar algo é basicamente encontrar seus respectivos operadores.

Podemos citar a *Eletrodinâmica Quântica* que é uma TQC para o eletromagnetismo, ela descreve as interações entre as partículas eletricamente carregadas através da emissão e absorção de fótons. Além do mais, o paradigma das quatro interações fundamentais da natureza (Interação Eletromagnética, Interação Nuclear Forte, Interação Nuclear Fraca e Interação Gravitacional) são descritas por teorias quânticas de campos que compõem o chamado *Modelo Padrão* e serve para descrever as partículas elementares (SAKURAI, 2013), (BASSALO, 2006) e (BASSALO, 2007).

### 5.1 Equação de Klein-Gordon

Klein-Gordon construiu uma equação, em que a função de onda de uma partícula deveria ser consistente com a relatividade especial, ou seja, a primeira tentativa de obter uma relação entre a mecânica quântica e a teoria da relatividade se deu graças a equação de Klein-Gordon, sendo que esta ideia está sujeita a erros por conta do desenvolvimento da mecânica quântica ser baseado na conservação de probabilidade, sendo que na teoria da relatividade é possível criar partículas a partir da energia. Neste caso devemos construir uma teoria de campos de muitos corpos que seja consistente com a teoria da relatividade. A equação de Klein-Gordon é uma equação de onda-relativística para uma partícula livre, além do mais, ela é uma versão relativista da equação de Schroedinger. É possível obter os mesmos resultados utilizando o teorema de Noether sobre a perspectiva da TQC, a maioria dos problemas físicos de alta energia são solucionado graças a TQC.

Existe uma certa complexidade na maioria das equações, para facilitar este caso é comum fazer uma aproximação dos valores das equações para serem representadas em unidades de energias. Se fizermos  $c = 1 = \hbar$ , estaremos associando unidades de comprimento, massa, momento e ação em unidades de energia ( $GeV$ ).

Se tomarmos a equação de Schroedinger (LEMOS, 2005) e (SAKURAI, 2013)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \quad ,$$

pelos unidades naturais citadas acima, temos que  $\hbar = 1$ , então a equação acima fica

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \quad ,$$

Através desta equação, verificamos que há um certo problema ao unificar a mecânica quântica com a relatividade, pois a derivada temporal é de primeira ordem, enquanto que a derivada espacial é de segunda ordem. Então não temos uma simetria de Lorentz neste contexto. Klein-Gordon fez a primeira tentativa para se obter uma equação de onda relativística.

Na mecânica quântica definimos as quantidades físicas (energia e momento) como operadores

$$\hat{E} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \hat{p} \rightarrow i\hbar \nabla$$

Partindo da *relação de dispersão* (relação entre as frequências  $f$  e o comprimento de onda  $\lambda$  de natureza ondulatória e se propagando em um dado meio material ou no vácuo) a equação de Schroedinger fica

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad ,$$

Escrevendo a equação de Schroedinger em função da hamiltoniana  $H = T + V$ , encontra-se

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi \quad ,$$

O termo entre parênteses é chamado de hamiltoniana.

Por fim, temos a relação entre momento e energia

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad ,$$

Aplicando uma função de onda  $\varphi(x, t)$  nesta relação, temos

$$E^2 \varphi = p^2 \varphi + m^2 \varphi \quad ,$$

substituindo os operadores  $\hat{E}$  e  $\hat{p}$  na equação acima

$$\left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \varphi = (-i\hbar \nabla)^2 \varphi + m^2 \varphi \quad ,$$

sendo que,  $(-i)^2 = -1$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi + m^2 \varphi = 0 \quad ,$$



Definimos o d'Alambertiano (generalização do laplaciano na métrica de Minkowski<sup>15</sup>) como  $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ , neste caso, a equação fica

$$\begin{aligned}\square\varphi + m^2\varphi &= 0 \quad , \\ (\square + m^2)\varphi &= 0 \quad ,\end{aligned}$$

Ou também, pode ser escrita como

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi = 0 \quad ,$$

Esta equação é conhecida como *equação de Klein-Gordon*.

### 5.1.1 Campo de Klein-Gordon

Agora encontraremos a equação de Klein-Gordon pela dinâmica lagrangiana. O campo de Klein-Gordon é um exemplo da teoria de campos relativística, tomando a lagrangiana  $\mathcal{L}$  de um méson escalar (LEMOS, 2005)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 \quad ,$$

$\varphi$  é um campo escalar e  $m$  é a massa da partícula (em unidades CGS), como o campo é escalar, a lagrangiana é invariante sob transformações de Lorentz. Substituindo esta lagrangiana nas equações de Lagrange relativística para teorias de campos, introduzindo a notação  $\varphi_\mu = \partial_\mu\varphi$ , encontramos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \frac{\partial}{\partial\varphi_\mu} \left( \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}\varphi_\nu\varphi_\lambda \right) \quad ,$$

Sendo que  $g^{\nu\lambda}$  é uma componente no tensor métrico que define uma métrica no espaço de Minkowisk.

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_\mu} \left( \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}\varphi_\nu\varphi_\lambda \right) = \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}\delta_\nu^\mu\varphi_\lambda + \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}\varphi_\nu\delta_\lambda^\mu = \frac{1}{2} [g^{\mu\lambda}\varphi_\lambda + g^{\nu\mu}\varphi_\nu] = \varphi^\mu \quad ,$$

---

<sup>15</sup>Aqui é requerida uma definição nova de espaço 4-dimensional com uma métrica própria. Nesse espaço algumas operações funcionam de forma distinta do usual no espaço cartesiano. Para mais informações, veja as referências Lemos (2005) e (BASSALO, 2007). Entretanto, esse tema não será abordado neste trabalho, o que, entretanto, não induz perda de generalidade.

Tomando a derivada do segundo membro da equação, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\frac{m^2}{2} \varphi^2 \right) = -m^2 \varphi \quad ,$$

Substituindo estes resultados na equação de Lagrange na forma relativística, encontramos

$$\partial_\mu \varphi^\mu + m^2 \varphi = 0 \quad ,$$

Como  $\varphi_\mu = \partial_\mu \varphi$ , então  $\varphi^\mu = \partial^\mu \varphi$ . Substituindo na equação, obtemos

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \quad ,$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0 \quad ,$$

Encontramos a equação de Klein-Gordon. Em teoria quântica de campos, esta equação descreve os mésons escalares, que são partículas de massa  $m$  sem *spin*<sup>16</sup>.

Pode-se notar uma semelhança com a equação de onda clássica. Sendo que ela tem todas as qualidades necessárias para uma equação de onda relativística. Ela é relativisticamente covariante, é de segunda ordem na derivada temporal diferentemente da equação de Schroedinger e possui soluções que são, de fato aquilo que se esperava para uma partícula relativística livre de massa  $m$ . Também descreve partículas que se propagam nos dois sentidos temporais, sendo que sua interpretação é fundamentada na "*teoria de antipartículas*". No entanto, muitas das dificuldades da interpretação da equação de Klein-Gordon é que ela é de segunda ordem no tempo, isto inclui uma densidade de probabilidade que não é positiva-definida, gerando falta de graus de liberdade adicionais associado ao spin, ambos podem ser identificados como partículas e anti-partículas de carga de sinal oposto, e também surgem soluções de energias negativas. Isto condenou a equação de Klein-Gordon à margem do desenvolvimento da mecânica quântica relativística. Embora não tenha tido sucesso para descrever partículas como elétrons em condições relativísticas, ela é útil para descrever o comportamento das partículas com spin nulo, como os mésons ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$  e  $\pi^0$ ), ela também aborda certos campos bosônicos. Além do seu emprego no contexto da teoria quântica de campos, a equação de Klein-Gordon tem hoje interessantes aplicações em óptica geométrica, física da matéria condensada e fenômenos de onda

<sup>16</sup> *Spin* é uma propriedade quântica presente nas partículas, podemos tratar como sendo o momento angular intrínseco da partícula. Essa propriedade, em última análise, tem origem na geometria do espaço tempo.

dispersiva. Por mais que seja uma equação compatível com a relatividade especial e a mecânica quântica, mas não gera a Física que se deseja por conta desta derivada segunda no tempo. (LEMONS, 2005) e (SAKURAI, 2013).

## 5.2 Equação de Dirac

Quem solucionou este problema foi Dirac, pois ele propôs determinar uma equação de onda relativística de primeira ordem no tempo, que descrevesse muito bem as partículas elementares de *spin*  $\frac{1}{2}$  (elétron) e introduziu teoricamente o conceito de antipartículas, que em 1932 foi confirmado experimentalmente a descoberta do *pósitron*. Na mecânica quântica não-relativística as partículas são descritas pela equação de Schroedinger, enquanto que na mecânica quântica relativística as partículas de *spin*  $\frac{1}{2}$  são descritas pela equação de Dirac que tem a forma (LEMONS, 2005), (SAKURAI, 2013) e (BASSALO, 2006)

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x, t) \quad .$$

Esta é a equação proposta por Dirac, foi tomada como a direção correta para o desenvolvimento da mecânica quântica relativística. No geral, Dirac derivou a equação de Klein-Gordon para obter uma equação de primeira ordem no tempo. As matrizes  $\gamma^\mu$  são chamadas matrizes de Dirac e não serão tratadas explicitamente neste texto.

## Conclusão

Neste trabalho, fizemos uma cobertura sobre os estudos das *teorias de campos* e a *mecânica quântica relativista* em nível introdutório, o alicerce aqui desenvolvido continua sendo a base fundamental para compreensão do mundo da física de partículas. Por mais que a mecânica de Newton falha em dimensões pequenas e no domínio das altas energias, podemos contar com as teorias desenvolvidas no início do século XX (mecânica quântica e teoria da relatividade). O aparato matemático aqui desenvolvido (formulação lagrangiana e hamiltoniana) é fundamental para a compreensão das teorias clássicas e quânticas de campos. O objetivo principal foi obter uma equação de onda que seja consistente com a teoria da relatividade, a primeira tentativa da unificação dessas duas teorias se deu graças a Klein-Gordon, com evidência da existência das antipartículas, logo em seguida surgiu Dirac proporcionando uma equação correta para o desenvolvimento da mecânica quântica relativista. A teoria quântica de campos é o arcabouço correto para tratar a mecânica quântica relativística e a mecânica quântica de muitas partículas em geral. A equação de Schroedinger serve para descrever quânticamente os sistemas que estão no regime não-relativístico, ou seja, sistema que estejam com velocidade muito menor que a velocidade da luz, e também estejam com energias bem mas baixas daquelas associadas a sua massa de repouso. Na mecânica quântica relativística, trabalhamos com as

funções de onda relativística, a equação de Klein-Gordon e a equação de Dirac. São essas as equações que descrevem os sistemas quânticos fora do regime de baixas velocidades, seria este um regime em que os efeitos da relatividade especial começa a surgir, em tais efeitos estão, velocidades próxima a velocidade da luz, as energias são altas o suficiente para poder ter correções relativísticas, ou seja, as energias são altas o suficiente para que elas possam ser convertidas em massa pela relação  $E = mc^2$ , neste sentido trabalhamos com a *teoria quântica de campos*.

### **Referências Bibliográficas**

ARFKEN, George. Física Matemática: Métodos Matemáticos Para Engenharia e Física – Tradução da 7<sup>a</sup> Edição. 7.ed. GEN LTC. NY, 2017.

BASSALO, J. M. Filardo; CATTANI, M. S. Dorsa. Elementos de Física Matemática – Vol. 2. 1.ed. Livraria da Física. SP, 2011.

BASSALO, J.M. Filardo. Eletrodinâmica Clássica. 1.ed. Livraria da Física. São Paulo, 2007.

BASSALO, J.M. Filardo. Eletrodinâmica Quântica. 1.ed. Livraria da Física. São Paulo, 2006.

BUTKOV, Eugene. Física Matemática. 1<sup>a</sup> Ed. Guanabara Dois. RJ, 1983.

SAKURAI, J. J; NAPOLITANO, Jim. Mecânica Quântica Moderna: Tradução de Silvio Renato Dahmen. 2.ed. Bookman. Porto Alegre, 2013.

NIVALDO A. LEMOS. Mecânica Analítica. 1.ed. Livraria da Física. São Paulo, 2005.