UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TEFÉ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DOUGLAS CABRAL DA SILVA

Construindo o triângulo de Sierpinski e a curva de Koch no Geogebra: possibilidades de inserção da Geometria Fractal no 9º Ano do Ensino Fundamental.

Tefé/AM
2020/1

DOUGLAS CABRAL DA SILVA

Construindo o triângulo de Sierpinski e a curva de Koch no Geogebra: possibilidades de inserção da Geometria Fractal no 9º Ano do Ensino Fundamental.

TCC (Projeto e Roteiro de Aplicação das Atividades da Pesquisa) apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática, do Centro de Estudos Superiores de Tefé - CEST, da Universidade do Estado do Amazonas – UEA, como requisito da Disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II ministrada pela Profa. Msc. Denise Medim da Mota.

ORIENTADORA: Msc. Sabrina de Souza Rodrigues.

Tefé/AM
2020/1

ATA DA REUNIÃO EXTRAORDINÁRIA DO COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS - CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TEFÉ CEST-UEA

No sétimo dia do mês de junho do ano de dois mil e vinte às sete horas e zero minuto, o Colegiado do Curso de Matemática, atendendo a convocação para reunião com pauta especifica reuniu-se remotamente através do Google Meet. Estiveram presentes os pares membros: **Severino Coelho da Cruz Junior, coordenador do curso, Carlos José Ferreira Soares, Cláudio Oliveira Santos, Denise Medim da Mota, Josimauro Borges de Carvalho, Luiz Augusto Reis Caxeixa, Robert Luís Lara Ribeiro, Sabrina de Souza Rodrigues e Simone Elizabeth Félix.** Em ato contínuo, o coordenador deu por iniciada a sessão para **discutir e deliberar** o item de pauta: **1) Alterações sobre as orientações e normas que regem o Trabalho de Conclusão do Curso de Matemática devidamente regulamentadas na página 79 (setenta e nove) do Projeto Pedagógico do Curso (PPC), excepcionalmente no que compreende o período de pandemia do Novocoronavirus.** A professora Sabrina de Souza Rodrigues iniciou dizendo que em diálogos realizados com a professora Denise Medim da Mota chegaram a uma sugestão para atender as atividades relacionadas à entrega do Trabalho de Conclusão do Curso de Matemática durante o período em que se estender a pandemia da Covid-19, tendo em vista que as escolas públicas estão com as aulas suspensas, as atividades na Universidade do Estado do Amazonas só poderão ser presenciais a partir do dia 05 de outubro, e de se tratar da segurança no que tange à saúde de todos os envolvidos: deverá ser entregue um **roteiro de atividades para a aplicação da pesquisa** na escola campo de acordo com o projeto de pesquisa aprovado na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso I, na qual o mesmo deverá conter a sequência didática elaborada com auxílio do(a) professor(a) orientador(a) bem como a descrição da tendência em educação matemática e sua utilização, todos os modelos de teste, questionário e/ou entrevistas que seriam aplicados e demais documentos necessários à realização da pesquisa. Disse ainda que ao final o acadêmico apresentará o trabalho que poderá ser feito através de videoconferência para uma banca examinadora que avaliará e decidirá pela aprovação ou não do referido. Continuou sua fala argumentando que será disponibilizado pela professora da disciplina Denise Medim da Mota um modelo da estrutura de roteiro de atividades de aplicação da pesquisa para que haja um padrão a ser seguido pelos alunos pois os trabalhos de conclusão de curso ficarão arquivados na coordenação do curso de Matemática; que na defesa os alunos apresentarão rapidamente o escopo do projeto defendido na disciplina TCC I e em seguida o roteiro de atividades de aplicação da Pesquisa no tempo mínimo de 15 (quinze) minutos e no máximo de 20(vinte) minutos. No que segue, iniciaram as discussões, o membro Professor Carlos José Ferreira Soares sugeriu que além da possibilidade de videoconferência a defesa poderia dar-se-á no período que compreende 05 a 23 de outubro quando há espaço para atividades acadêmicas presenciais na UEA, visto que a conexão de internet é instável no município de Tefé. Após discussão a pauta foi colocada para votação no que as respostas foram positivas e unânimes. Nada mais tendo a declarar eu, Sabrina de Souza Rodrigues, lavrei a presente Ata, que após leitura será assinada por mim e por todos que estavam presentes na reunião.

Carlos José Ferreira Soares

Sabrina de Souza Rodrigues

[illegible]

Wenderson Medim da Mota

CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TEFÉ
COLEGIADO DE MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA PÚBLICA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 05 dias do mês de novembro de 2020, às 09:37 h, em sessão pública via Google Meet, na presença da Banca Examinadora presidida pela Professora MSc. Sabrina de Souza Rodrigues e composta pelos examinadores: 1. Professor Dr. Robert Luis Lara Ribeiro; 2. Professora Esp. Cleiciele Gomes da Silva, o acadêmico **Douglas Cabral da Silva** apresentou o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado: ***"Construindo o triângulo de Sierpinski e a curva de Koch no Geogebra: possibilidades de inserção da Geometria Fractal no 9º Ano do Ensino Fundamental"***, como requisito curricular indispensável para a conclusão do Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do referido trabalho, divulgando o resultado formalmente ao(à) acadêmico(a) e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo(a) aluno(a).

Srodrigues

Presidente da Banca Examinadora

Examinador(a) 01

Cleiciele Gomes da Silva

Examinador(a) 02

Douglas Cabral da Silva

Acadêmico (a)

UEA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TEFÉ- CEST
CURSO: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
RESULTADO FINAL DO TCC

Dados de Identificação

Nome do (a) Aluno(a): **Douglas Cabral da Silva**

Título do trabalho: ***Construindo o triângulo de Sierpinski e a curva de Koch no Geogebra: possibilidades de inserção da Geometria Fractal no 9º Ano do Ensino Fundamental***

Nome do (a) Professor(a) Orientador(a): MSc. Sabrina de Souza Rodrigues

Ano/Semestre: 2020_1 Turma: MM16_T01 Período: 8º

TCC (Resultado Final) 0,0 - 10,0
9,5

BANCA EXAMINADORA

Rodrigues.

(Presidente e Orientador(a))

(Membro 01)

Bruecle Gomes da Silva

(Membro 02)

Douglas Cabral da Silva

Acadêmico (a)

Tefé, 05 de novembro de 2020.

GOVERNO DO ESTADO DO AMAZONAS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Centro de Estudos Superiores de Tefé

CEST

FORMULÁRIO DE ACOMPANHAMENTO DAS ORIENTAÇÕES PARA O TCC

Acadêmico(a): Douglas Cabral da Silva **Matrícula:** 1626030017

Turma: **Período:** 8° **Turno**: Matutino

DATA	CARGA HORÁRIA	DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE REALIZADA	ASSINATURA ORIENTADOR (A)
12/08	1h e 30min	Reunião via Google Meet para devolução e explicação do plano de aula ao orientando para que o mesmo faça as devidas correções. E ainda a disponibilização de novo material por parte da orientadora para realização de fichamentos a serem entregues na próxima orientação.	Rodrigues.
25/09	1h e 30min	Reunião via Google Meet para devolução da I e II parte do TCC para o orientando, onde a professora orientadora explicou as suas devidas correções que fez no trabalho para que o orientado as faça para lhe reenviar.	Rodrigues.
05/10	1h e 30min	Orientação via Google Meet para tratarmos da 2º parte do II, onde a professora orientadora informou o que precisava ser corrigido a respeito do roteiro de aprendizagem e o passo a passo da construção das figuras Triângulo de Sierpinski a Curva de Koch.	Rodrigues.
03/11	2 horas	Orientação via Google Meet para os últimos ajustes nos slides para a defesa do TCC, onde o orientado realizou um ensaio de defesa e a orientadora falou sobre os pontos positivos e o que precisava ser melhorado a respeito da apresentação.	Rodrigues.

Obs.: Este documento deve obrigatoriamente ser preenchido, assinado e anexado junto ao TCC a ser entregue à Profa. Denise Medim da Mota, responsável pela disciplina de Trabalho de Conclusão II.

SUMÁRIO

I ESCOPO DO PROJETO DE PESQUISA

1 DELIMITAÇÃO DO TEMA

Construindo o triângulo de Sierpinski e a curva de Koch no Geogebra: possibilidades de inserção da Geometria Fractal no 9º Ano do Ensino Fundamental.

2 PROBLEMA DA PESQUISA

Ser educador matemático é uma tarefa complexa, é preciso ir além do conhecer e dominar conteúdos matemáticos ou utilizar certa metodologia. É assumir a responsabilidade de despertar nos alunos o interesse pela disciplina e através desta desenvolver e provocar o senso crítico dos educandos, para que consigam tecer reflexões políticas e sociais, transformando o ambiente onde vivem.

Quando falamos sobre o despertar o interesse do aluno, estamos pensando nos termos da aprendizagem significativa de Ausubel[1], isto é, consideramos duas condições necessárias expressas na teoria deste pesquisador, estas: i) o aluno precisa ter disposição para aprender, ii) o conteúdo escolar deve ser potencialmente significativo. Este processo distingue-se pela interação de conhecimentos já aprendidos e novos conhecimentos, logo o professor deve estar atento para auxiliar seus alunos na assimilação e organização dos novos conteúdos a serem apreendidos, deve, portanto abranger o saber e o saber fazer bem, como o aprender e o como aprender a aprender.

Quanto mais próximo o professor desenvolve a aprendizagem pela descoberta mais o aluno compreende que o conhecimento não é algo pronto e acabado. Na matemática nós educadores precisamos mostrar a beleza da Matemática presente nas demonstrações, nos cálculos, nas aplicações, na forma como ela se apresenta na natureza, enfim, apresentar uma Matemática viva e em movimento.

Dentro da Matemática, é a Geometria um dos campos que mais o professor consegue relacionar seus conteúdos com o dia a dia, seja através das artes ou através das construções de casas e edifícios, ricos em detalhes, formas e desenhos geométricos. Entretanto, por muito tempo, o ensino da Geometria foi deixado de lado nos planejamentos dos planos de curso das Secretarias de Educação. De acordo com Lorenzato (2010, p. 58) “[...] com o implemento da matemática moderna nas escolas na década de 60, a geometria foi deixada de lado,

---

[1] Para Ausubel, a aprendizagem significativa é o processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do individuo, ou seja, neste processo uma nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica [...]. (Moreira e Masini, 2001, p. 17)

acarretando em dificuldades educacionais, pois assim como outros tópicos são importantes na matemática o não estudo da geometria não desenvolverá o pensamento os discentes quanto a esta parte.

Na Base Nacional Comum Curricular (2018) é recomendado que a geometria no Ensino Fundamental II deve ser vista pelos alunos como uma forma de enriquecer os seus conhecimentos matemáticos e ressalta que esta área não pode ser delimitada ao cálculo de área, volume ou conhecer conceitos sobre retas paralelas, perpendiculares.

Ao analisar os planos de curso de Matemática tanto da Secretaria de Estado de Educação e Qualidade do Ensino – SEDUC do ano atual (2020) quanto no da Secretaria Municipal de Educação – SEMED do município de Tefé no ano de 2019, percebemos que os conteúdos pertinentes a área de Geometria encontram-se no plano municipal do 6º, 7º e 8º anos no 4º bimestre e em relação ao 9º ano no 3º bimestre, já no plano de curso Estadual, 6º, 7º e 9º anos estão dispostos no 3º e 4º bimestre, e 8º no 3º bimestre. Baseado no exposto, por vezes devido ao tempo a Geometria acaba por não ser trabalhada em tempo hábil.

Vale ressaltar que em nenhum dos dois planos fazem-se presentes ideias sobre geometria fractal, embora, no Plano da Secretaria Estadual de Educação do Município de Tefé, no 7º Ano, 2º bimestre, unidade temática de Geometria, objeto de conhecimento: simetrias de translação, rotação e reflexão; sugere o trabalho com a habilidade (EF07MA21) que refere-se ao reconhecimento e construção de figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica. Neste exemplo, o professor pode introduzir conceitos da geometria fractal com o uso do Geogebra. Esta geometria, entretanto pode ser facilmente incorporada nos currículos, visto que ela pode ser observada nas folhas de determinadas plantas, troncos de árvores, raios ou em um simples brócolis.

A Geometria Fractal conforme (Lovis; Franco; Lima, 2014) está voltada ao estudo de formas geométricas denominadas fractais, onde nelas são encontradas “cópias” próximas da própria forma (autossimilaridade) e uma complexidade sem fim.

Nesse sentido, trazemos como temática deste projeto a Geometria fractal, onde nossos estudos irão voltar-se as propriedades de autossimilaridade e a complexidade infinita, para tanto optou-se pelas construções do triângulo de Sierpinski[2] e a construção da curva de Koch [3]utilizando o software Geogebra.

---

[2] Uma figura da Geometria Fractal, composto por um conjunto de vários triângulos equiláteros autossimilares.
[3] Uma das primeiras figuras dos fractais a ser descrito, é construído a partir de um segmento de reta e o resultado final assemelha-se a um floco de neve.

O software Geogebra é um recurso tecnológico que Leite; Oliveira (2016) dispõe como ferramenta de fácil manuseio e trás consigo possibilidades de se trabalhar de maneira dinâmica várias formas geométricas.

A tecnologia é pulsante em nossa volta, grande parte dos alunos possuem um aparelho celular, televisão em suas casas, computadores, vídeos games, DVD, logo pensamos em aliar a tecnologia com o ensino da geometria fractal para despertar o interesse dos alunos pela Matemática.

Diante do exposto, surge nossa problemática: de que forma o uso da tecnologia nas construções do triângulo de Sierpinski e da Curva de Koch podem contribuir para o ensino da geometria fractal em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental II?

3 OBJETIVOS

3.1 GERAL

Verificar quais as contribuições que a construção do triângulo de Sierpinski e da curva de Koch no Geogebra podem trazer para uma aprendizagem de conceitos iniciais da Geometria Fractal.

3.2 ESPECÍFICOS

- Investigar quais conhecimentos os discentes têm sobre a Geometria Fractal;
- Introduzir conceitos de autossimilaridade e complexidade infinita;
- Construir o triângulo de Sierpinski e a curva de Koch através do software Geogebra;
- Explorar as interrelações existentes entre a geometria Euclidiana e a Geometria Fractal nas construções das figuras;
- Fazer com que os alunos trabalhem de forma colaborativa e interativa nos processos de construção das figuras geométricas e ao longo de todas as atividades propostas;
- Verificar as opiniões dos discentes se gostaram ou não do ensino da Geometria Fractal através de tecnologias digitais.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 O Ensino da Geometria: Algumas reflexões sobre a Formação do Professor e o Ensino de Geometria

A Matemática permite trabalhar em diversas áreas do conhecimento, trazendo consigo uma riqueza de conteúdos que estão presentes em nosso cotidiano, em particular, a geometria desempenha um papel importante na arte de facilitar a aprendizagem da matemática (LORENZATO, 2010). O autor discorre por exemplo, que é a geometria que faz tornar visível o que nem sempre números, expressões e palavras são capazes de fazê-lo.

Neste aspecto, Neto (2003, p. 136) argumenta que:

> De toda cultura humana, talvez as duas áreas mais utilizadas no cotidiano sejam a *linguagem* e a *Geometria*. Não passamos um dia sem elas e, desse modo, estamos muito acostumados com relações geométricas como paralelismo, perpendicularidade, concordância, simetrias, retângulos, triângulos, círculos, trapézios e tantas outras relações (conhecimento lógico-matemático), mesmo sem saber seus nomes.

Destarte, isto nos mostra o quão é comum encontrar em nosso dia a dia, seja nas arquiteturas, pinturas, objetos de artesanato, cerâmicas e outros a presença da Geometria. Tais aspectos contribuem para que o educador adote uma abordagem metodológica sobre a unidade temática Geometria que se aproxima com a realidade do educando, entretanto na prática isto não está acontecendo.

De encontro ao autor, Barbosa (2005) salienta que a geometria possibilita situações de contemplação de aspectos harmoniosos como é o caso das artes, monumentos arquitetônicos e nos adornos da natureza, mas cabe ao docente promover a experimentação disso aos alunos.

Não se trabalhar a geometria, acaba acarretando dificuldades de aprendizagem até mesmo em outras disciplinas, como na geografia que é utilizada para identificar o tamanho da área de um lago, floresta, assim torna-se uma das temáticas da Matemática mais presente e importante no cotidiano, sem ela o aluno terá dificuldades em calcular uma simples área da sua residência, assim não conhecerá os conceitos básicos para afirmar quais características cada figura obedece ou ainda, não conseguirá deduzir uma fórmula de polinômios que se dar através de figuras planas.

Machado (2013, p. 126) evidencia que “[...] várias pesquisas apontam a geometria como um dos problemas de ensino e aprendizagem” e mais “[...] vem sendo dada à geometria menos atenção do que ao trabalho com outros temas [...]”. Tais problemas acabam por acarretar dificuldades maiores no desenvolvimento intelectual, de raciocínio lógico e na capacidade de abstrair e generalizar dos alunos.

> "os resultados das pesquisas de Lorenzato, especialmente, vêm reiterar muitos dos encontrados por Perez: a insegurança dos professores e seu despreparo para ministrar as aulas de Geometria e a localização do tema na parte final dos livros didáticos facultam aos professores sentirem-se "justificados" caso, por "falta de tempo", o conteúdo não venha a ser trabalhado. (Bicudo; Borba , 2012, p.138).

Ainda nesse aspecto Santos; Nacarato (2014) avalia que muitos dos nossos docentes, justamente por não terem tido um contato próximo com a Geometria, desconhecem a importância da construção do pensamento geométrico, o que acarreta para (Bicudo; Borba, 2012) prejuízos incalculáveis para a formação do aluno.

Os programas de formação de professores de Matemática precisam emergir a Geometria em seus currículos, no geral, contemplam a Geometria Analítica, Geometria Plana e Geometria Espacial, deixando de lado outras Geometrias como a Hiperbólica, a Esférica, e Rimmaniana.

O Ministério da Educação preconiza a formação de professores preparados para enfrentar o mercado de trabalho, assim, é essencial que sejam realizadas reflexões acerca da incorporação de novos temas no currículo de formação de professores que atendam o que a sociedade espera e exige do professor de Matemática nos dias atuais.

Baldovinotti (2011) sugere alguns tópicos, estes são: lógica e criptografia, programação linear e dinâmica; teoria do caos, fractais e fuzzy, teoria dos jogos e inteligência superficial. Discorre ainda, que os cursos de formação de professores devem considerar um conjunto de estratégias de desenvolvimento profissional voltados para a compreensão do conteúdo específico, conteúdo pedagógico e do pensamento do aluno.

Neto (2008) elucida que o fato da Geometria ser deixada de lado ou trabalhada de forma rápida concentra-se na forma deficiente de como se forma o professor e seu condicionamento em como abordar o conteúdo no espaço da sala de aula, o que acarreta para (Bicudo; Borba, 2012) prejuízos incalculáveis para a formação do aluno.

Dessa maneira o professor quando vai para sala de aula não entende de fato a importância de trabalhar a geometria detalhadamente, pois é um tópico da Matemática utilizada desde a educação infantil ao Ensino Médio e muitas áreas de graduação.

D' Ambrósio (2012) cita ainda, que a educação de modo geral apresenta grandes problemas e no caso específico da educação matemática estes problemas estão voltados à formação do professor.

Essas discussões mostram que uma formação deficiente dos educadores levará a uma prática pedagógica insegura no que se refere ao ensino da Geometria. É necessário propiciar aos alunos atividades que os estimulem a explorar ideias geométricas utilizando materiais que possam manipular, favorecendo condições para a descoberta e o estabelecimento das relações geométricas existentes à nossa volta. (BICUDO; BORBA, 2012).

No momento em que o professor desenvolve o ensino da geometria com sua devida importância e dinamismo que a mesma possibilita, facilitará a compreensão dos conteúdos por parte dos discentes.

4.2 Geometria Fractal e a Sala de Aula

De início, a geometria dos fractais ficou conhecida como algo caótico, irregular, onde ainda ninguém havia conseguido encontrar um padrão para as formas que a mesma se apresentava.

Paula; Souza (2017, p. 136) delineiam que "[...] na realidade existe todo um esquema desde as pétalas de uma flor, até um curso sinuoso de um rio. Há uma geometria no mundo que nos rodeia. E essa geometria é chamada de Geometria Fractal".

A Geometria Fractal está relacionada com a Ciência denominada CAOS[4], embora essa geometria possua padrões, por vezes complexos, não extingue a beleza dos fractais. Como complementa Barbosa (2005, p. 09):

> "[...] As estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas dessa geometria, fornecem uma certa ordem ao CAOS, razão de ser, às vezes, considerada como sua linguagem, que busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório."

A Geometria Euclidiana não estuda todas as formas encontradas na natureza, foi daí que se fez necessário uma geometria que estudasse tais formas. Os estudos realizados para este fizeram-se desenvolver a geometria dos fractais.

Mais acima, discutimos o ensino de geometria de uma forma mais geral, e podemos perceber que "[...] o professor ainda se sente inseguro para ensinar Geometria, o que evidencia que os dois termos de binômio aprender-ensinar estão intimamente interligados, ou seja, só temos condições de ensinar aquilo que conhecemos". (SANTOS; NACARATO, 2014, p.15-16).

Quando trata-se de outra geometria que não é a de Euclides este cenário é mais preocupante ainda, pois raramente é abordada por nossos educadores. Fonseca, Lopes e Barbosa (2011) discute que as experiências, o interesse e as necessidades dos alunos devem

---

[4] A teoria do caos é um processo em que está ligado a um processo complexo, não apresenta linearidade e suas características são que aparentemente é algo imprevisível de seu comportamento e é extremamente sensível a variações iniciais de um determinado sistema.

ser considerados pelo educador na tomada de decisão sobre o percurso que este irá tomar para abordar a Geometria e de modo análogo, isto deve ser considerado na formação desses professores.

O conhecimento sobre a geometria dos fractais permitiria um ensino mais dinâmico mostrando que as geometrias podem ser ensinadas integradamente sem uma necessariamente se sobrepor a outra, neste sentido, pretendemos passar de um currículo “cartesiano” para um currículo dinâmico (D’AMBRÓSIO, 2012).

Barbosa (2005) explicita algumas das razões pelo qual o professor deve inserir a geometria não euclidiana na sala de aula, entre elas citamos: as conexões com as várias ciências; suprir as “deficiências” da Geometria Euclidiana no estudo de formas da natureza; difusão e acesso as tecnologias da informação; possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético aplicado às artes no momento em que se constroem os fractais e por fim a sensação de surpresa, do novo pelos alunos diante da ordem ou desordem característicos dos fractais.

Ratificando a fala de Barbosa (2005), Niedermeyer, Koefender e Roos (2009, *apud* Paula; Souza, 2017, p. 137), tratam de alguns outros motivos para se trabalhar fractais na escola, estes são:

> • Trabalhar conteúdos a partir de exemplos encontrados na natureza estimula a criatividade, o raciocínio lógico, motiva o educando e o auxilia na compreensão de conteúdos e conceitos matemáticos;
> • Deixar de usar somente quadro, giz e livro didático, em detrimento do uso de recursos audiovisuais (computador, projeção audiovisual, lâminas), faz com que o educando se concentre mais e visualize melhor as situações apresentadas;
> • A Geometria Fractal pode ser trabalhada em qualquer nível de ensino, pois ela vai de uma simples dobradura de papel até os entes matemáticos modernos que envolvem números complexos, modelagem, etc.

Os motivos elencados acima mostram que as contribuições de se trabalhar as geometrias não euclidianas na sala de aula vão desde a diversidade de reflexões que estas podem gerar até o desenvolvimento da criatividade e autonomia do aluno.

Zanatta et al (2019, p. 01) por sua vez, descreve que “as geometrias não-euclidianas, em especial a geometria dos fractais, embora pouco trabalhadas na Educação Básica, abrem espaço para novas possibilidades de abordagem para conteúdos matemáticos diversos em sala de aula”.

Dessa forma, trazendo a geometria para ser explorada de forma lúdica e criativa com os discentes é possível os apresentar o quanto é dinâmica, interessante e inovadora, não deixando de lado sua importância para o estudo da Matemática.

Barbosa (2005, p. 19) afirma que a beleza que há nos fractais é um atrativo para despertar e trabalhar o modo estético de forma geral, e ainda que as figuras geométricas encontradas na natureza possuem uma geometria própria, onde modela os fractais, ou seja, a Geometria Fractal. Situações como esta, permitem ao professor elaborar e desenvolver projetos educacionais que versam sobre transversalidade com vistas para a compreensão dos fenômenos que acontecem nos mais distintos ambientes.

Diante do exposto, entende-se que conhecer a Geometria Fractal é importante para aquisição de conhecimentos dos alunos, visando tanto relembrar os conceitos básicos da Geometria trabalhada em sala de aula quanto trazer novos conceitos referentes ao campo da Geometria em geral, para tanto, existem distintas formas de abordar esse eixo temático, e uma delas, pode ser realizada por meio da tecnologia, através de programas computacionais, como é o caso do Geogebra. Assim sendo, nosso próximo tópico apresenta algumas contribuições sobre a inserção das tecnologias no ambiente de sala de aula.

4.3 Ensino por meio da tecnologia

As tecnologias são recursos que podem ser utilizados na área educacional para auxiliar a construção de uma aprendizagem significativa, é nesse sentido, que Balacheff e Kaput, (1997, *apud* Bicudo; Borba, 2012) argumentam que o uso do computador no ambiente escolar contribui para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, pois propõe outras atividades diferentes das habituais trabalhadas em sala, o que promove novas formas de pensar e agir.

Nacarato *et al.*(2013) mostram que “a forma de aprender dos alunos do século XXI está mudando. A incorporação da informática na sociedade e sua difusão mudaram o perfil dos alunos e de seus interesses”. Estamos diante da era tecnológica, computadores, celulares e televisões estão presentes na casa, se não de todos, mas no lar da maioria de nossos alunos, isto nos leva a considerar que a inserção da tecnologia nas salas de aula seria uma boa forma de chamar a atenção dos alunos.

Moran (2008, *apud* Sturion; Moraes, 2016) salientam que esta geração não se imagina sem as mídias, sem as redes sociais e possibilidade de não se conectar com o restante do mundo. Fazendo referência a este fato, indicam a urgência de introduzir os recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem, de modo que o espaço escolar não fique alheio aos avanços que ocorrem à sua volta.

Além dos autores supracitados, outros tantos falam sobre as contribuições da utilização das TIC’s como metodologia para o ensino de matemática, com a presença da tecnologia é importante que o docente saiba manuseá-las para trabalhar a geometria, tanto suas figuras quanto seus conceitos (SANTOS, *et al.* 2016). Como a tecnologia nos rodeia, pensa-se que ela é de fácil acesso, entretanto, não é o cenário que costumamos presenciar em nossas escolas.

Conforme os dados divulgados pelo INEP[5] através do Censo Escolar de 2017 "a presença de recursos tecnológicos como laboratórios de informática e acesso à internet ainda não é realidade para muitas escolas brasileiras [...]" (Brasil, 2017, p.5), informam ainda que apenas 46,8% de nossas escolas de ensino fundamental possuem laboratórios de informática e dessas 65,6% apenas tem acesso à internet. Nossas escolas, do interior do estado do Amazonas, são sem dúvida, parte expressiva desses dados estatísticos.

Tratando-se da atualidade, a pandemia do novo coronavírus escancarou à desigualdade social no Brasil e o acesso às tecnologias para acompanhamento das aulas na modalidade de ensino remoto, segundo uma pesquisa do Instituto DataSenado, no Brasil dos 58% dos alunos matriculados no ensino básico e superior passaram a ter aulas online, sendo que, tratando-se da rede pública, 26% não possuem se quer acesso a internet.

Entendemos que existem limitações, principalmente no que tange a parte estrutural, como é o caso da não existência de laboratórios de informática, ou quando se tem, por vezes já sucateados, mas é importante ressaltar que a utilização da tecnologia como recurso didático faz o aluno adentrar em um campo dinâmico e diferente do que estão acostumados. Assim, o professor, mesmo diante às limitações impostas deve tentar inserir as tecnologias digitais em suas aulas.

No momento em que se emprega a tecnologia, variadas ferramentas e softwares para trabalhar a Matemática estão disponíveis nas plataformas para serem baixados gratuitamente por qualquer pessoa, como é o caso do Geogebra. Conforme Leite; Oliveira (2016) esse é um software que permite trabalhar de forma dinâmica, possibilitando fazer e manipular construções geométricas, ampliando as perspectivas sobre a utilização de ferramentas tecnológicas.

Com a utilização o software Geogebra permite a interação de figuras encontradas ou não na natureza pertencentes à geometria fractal. "O uso de softwares como o GeoGebra permite a automação da natureza repetitiva da criação." ODOM e WOOD (2009, p.18).

O Geogebra surge como um meio didático para trabalhar a Geometria dos Fractais, pois aguça o pensamento criativo dos alunos, tendo em vista que, a "visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático", pois "a compreensão de conceitos

---

[5] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

matemáticos requer múltiplas representações visuais podendo transformar o entendimento deles”. Borba (2011 *apud Oliveira; Golçalves; Marquetti*, 2015, p. 3).

Ainda neste sentido, Nacarato, *et al.* (2013) descreve que:

> “[...] o computador com recursos gráficos sofisticados, conjugados a um software matemático adequado, possibilita a visualização dinâmica e interativa de um objeto matemático virtual que, eventualmente, pode ser alterado, deslocado e rotacionado, dependendo do ambiente em que se trabalhe”.

Diante de todas as argumentações acima, pensamos em utilizar o Geogebra nas construções do triângulo de Sierpinki[6] e a Curva de Koch[7], com o intuito de possibilitar aos discentes experimentos relacionados a Geometria Fractal (ideias iniciais) e as tecnologias digitais. Moran (2005, p. 29) discute que “aprendemos melhor quando vivenciamos, experimentamos, sentimos. Aprendemos quando fazemos relação, estabelecemos vínculos, laços, entre o que estava solto, caótico, disperso, integrando-o em um novo contexto, dando-lhe significado [...]”.

Ainda neste sentido, Züge; Mathias (2018) salienta que a construção manual da maior parte dos fractais é trabalhosa, logo exige tempo e precisão de medidas e propõe assim que este processo pode simplificado se utilizarmos de recursos computacionais.

Odom e Wood (2019, p. 12) argumenta que “a criação de fractais depende da repetição e da transformação de formas geométricas básicas, portanto, eles são adequados para as classes mais jovens ou para uma introdução à geometria avançada”, esse é mais um dos motivos para trabalhar o ensino juntamente com a tecnologia.

Quando não trabalha-se com recursos inovadores dentro de sala de aula ou mesmo com projetos voltados a aprendizagem, deixa-se uma lacuna a ser preenchida. Pois não se pode negar a necessidade de inserir mídias digitais como alternativa didática, elas têm alta potencialidade de tornar as aulas mais atraentes para os discentes, auxiliando na construção do saber matemático, garantindo aos educandos maior acesso a uma Educação de qualidade.

---

[6] Descoberto por Waclav Sierpinski. É obtido a partir da construção de um triângulo equilátero, sendo que dentro do mesmo é feito outros 4, utilizando os pontos médios, onde o do centro tem a forma investida em relação original, dessa forma, repetindo esse processo interativo várias vezes percebemos que esses novos triângulos são auto semelhantes.

[7] Criado pelo matemático Helge Von Koch. É construído pelos seguintes passos: i) utiliza-se inicialmente um segmento de reta; ii) sendo que este segmento é dividido em 3 partes iguais e na parte do meio é substituído por um triângulo equilátero, eliminando um dos lados (o de baixo); iii) por fim aplica-se o passo (ii) nos demais segmentos.

5 METODOLOGIA

Tendo como objetivo “verificar quais as contribuições que a construção do triângulo de Sierpinski e da curva de Koch no Geogebra podem trazer para uma aprendizagem de conceitos iniciais da Geometria Fractal” delineou-se nosso estudo quanto à sua natureza como sendo qualitativa, onde buscamos através dela expor as opiniões e sensações dos alunos diante das atividades propostas em sala de aula. Conforme André (2012) refere-se a um plano que vai além da pesquisa quantitativa, pois considera todos os fenômenos durante um determinado processo e não deixando de lado as suas influências no processo.

Quanto aos objetivos da pesquisa optou-se pela explicativa, tendo em vista que além de analisarmos e interpretarmos os fenômenos, procuraremos identificar as contribuições que uma abordagem feita através da Geometria Fractal pode oferecer aos alunos quanto à sua aprendizagem de conceitos geométricos básicos.

Com base aos procedimentos técnicos empregaremos a modalidade de pesquisa-ação tendo em vista que pretendemos fazer um diagnostico dos conhecimentos prévios sobre a temática para então traçar uma ação em que todos interajam e trabalhem de forma cooperativa.

Nesse sentido, segundo Thiollent (1985, *apud* GIL, 2010) este tipo de pesquisa tem como base as experiências realizadas por meio de uma ação, sendo que o pesquisador torna-se um agente que colabora e participa diretamente na pesquisa afim de sanar ou amenizar algum problema coletivo.

Quanto aos sujeitos e campo da pesquisa, estes seriam os alunos de uma turma de 9º do Ensino Fundamental II do turno vespertino da Escola Estadual Deputado Armando de Souza Mendes, situada na Estrada do Bexiga, 1241, Jerusalém, em Tefé/AM.

A escolha desta escola se deu devido à infraestrutura oferecida pela instituição, isto é, a presença de laboratório de informática, elemento essencial em nosso estudo, visto que utilizaremos o software Geoogebra.

Já a escolha do 9º ano, ocorreria em razão de que os alunos já tiveram contato com a geometria euclidiana, por um longo período sendo que um nos nossos objetivos é justamente “explorar as interrelações existentes entre a geometria euclidiana e a geometria Fractal nas construções das figuras".

Para orientar o desenvolvimento de nosso trabalho e o processo de validação de nossos objetivos utilizaríamos como instrumentos/técnicas para a coleta dos dados: observação participante, questionário, oficinas metodológicas e registro dos alunos.

A observação participante ocorreria durante toda a pesquisa, pois não pretendíamos apenas observar, mas participar integralmente das atividades desenvolvidas com a turma do 9º ano do Ensino Fundamental II. Trata-se de um “[...] contato direto, frequente e prolongado do investigador, com os atores sociais, nos seus contextos culturais, sendo o próprio investigador instrumento de pesquisa” (CORREIA, 1999, p.31).

A utilização de questionário dar ia-se pelo fato de que busca-se o objetivo “investigar quais conhecimentos os discentes têm sobre a Geometria Fractal”, Marconi; Lakatos (2015, p. 86) argumenta é “um instrumento de coleta de dados por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondido por escrito e sem a presença do entrevistador”.

O questionário possui perguntas objetivas e subjetivas sobre a Geometria Fractal e conceitos básicos de Geometria Euclidiana.

Após o questionário faríamos uma oficina pedagógica com duração de 10h/aulas estas divididas da seguinte maneira: i) 2 horas/aulas para explanar o conteúdo a ser trabalhado; ii) 3h/aulas para orientação sobre o manuseio do Geogebra; iii) 5h/aulas para construção das figuras geométricas, triângulo de Sierpinski e a curva de Koch.

Segundo Paviani e Fontana (2009, p. 78), oficina pedagógica é “uma forma de construir conhecimento, com ênfase na ação, sem perder de vista, porém, a base teórica”. É neste momento que introduziremos conceitos de autossimilaridade e complexidade infinita aos alunos e trataremos das interrelações existentes entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Fractal, pois para construir as figuras geométricas utilizaremos: conceitos sobre triângulo equilátero, segmento de reta, vértice, polígono regular, reflexões, perímetro, dentre outros.

Depois da oficina pedagógica, utilizaríamos novamente o questionário para verificar se por meio da construção do triângulo de Sierpinski e da curva de Koch no Geogebra os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II compreenderiam as ideias centrais sobre a Geometria Fractal, este similar ao primeiro questionário, entretanto, foi acrescentado uma pergunta com relação à opinião dos alunos sobre a alternativa didática abordada.

Ao término da realização da pesquisa, os dados coletados seriam analisados mediante a técnica da análise interpretativa, com o intuito de dar ênfase às respostas obtidas durante o questionário, pois conforme Marconi e Lakatos (2010) essa técnica permite interpretar, avaliar ou explicitação da posição filosófica, e ainda averiguar possíveis influências, concepções e associações de pensamentos expostos pelo o autor, e também, de certa maneira, possibilita criticar e/ou julgar o conteúdo obtido através da coleta de dados para uma possível discussão.

Todos os instrumentos e as técnicas citados vislumbram a discussão de nosso problema da pesquisa, que é se construção do triângulo de Sierpinski e a curva de Koch por meio do Geogebra pode contribuir na aprendizagem da Geometria Fractal.

Com a pandemia do Novo coronavírus (COVID-19) em que vivemos atualmente (2020), nos impossibilitou de desenvolver este projeto em campo com os alunos do 9º ano como era previsto, de fazermos um questionário sobre os conhecimentos prévios dos discentes e depois a oficina pedagógica para a construção das figuras dos fractais (triângulo de Sierpinski e a curva de Koch), porém, apesar disto encontra-se nos apêndices os modelos de questionário e o roteiro de aprendizagem que foram elaborados para aplicação.

CRONOGRAMA

	ANO 2019/2					ANO 2020/1						
META/ ATIVIDADE	**Ago**	**Set**	**Out**	**Nov**	**Dez**	**Mai**	**Jun**	**Jul**	**Ago**	**Set**	**Out**	**Nov**
Levantamento Bibliográfico	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**			
Revisão Bibliográfica		**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**			
Elaboração do projeto			**X**	**X**								
Defesa do projeto				**X**								
Elaboração dos instrumentos de pesquisa									**X**	**X**		
Elaboração da Oficina Pedagógica									**X**	**X**	**X**	
Defesa do TCC												**X**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Etnografia da Prática Escolar.** São Paulo: Papirus, 2012.

BALDOVINOTTI, Nilson Jorge. **Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática.** 2011. 204 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91046>.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal - para sala de aula**. - 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. - 4º ed. São Paulo: Cortez, 2012.

BRASIL. MEC. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep). Sinopse Estatística da Educação Básica 2017. [Online]. Brasília: Inep, 2018. Disponível em: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:zz7GKk4bLwwJ:download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/notas_estatisticas/2018/notas_estatisticas_Censo_Escolar_2017.pdf+&cd=4&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br&client=firefox-b-d. Acesso em: 03 de outubro de 2019.

______. MEC. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Sinopse Estatística da Educação Básica 2018. [Online]. Brasília: 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental. Acesso em 16 de outubro de 2019.

CORREIA, Márcia Carvalho. **A Observação Participante enquanto técnica de investigação. Pensar Enfermagem**, 1999.

D' AMBRÓSÍO, Ubiratan. **Educação matemática: Da teoria à prática**. - 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

Fonseca, Maria da Conceição; Lopes, Maria da Penha; Barbosa, Maria das Graças Gomes; Dayrell Mônica Maria Machado S. S. **O ensino da Geometria na Escola Fundamental. 3º edição**. Belo Horizonte. Autentica Editora, 2011.

Instituto Data Senado. disponível em: https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2020/08/12/datasenado-quase-20-milhoes-de-alunos-deixaram-de-ter-aulas-durante-pandemia

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. - 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

LEITE, Rubervan da Silva; OLIVEIRA, Gerson Pastre. **Formação de Professores e Geogebra: Uma Proposta Para Compreender e Ensinar o Teorema de Tales. 2016. Disponível em:** http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:S51g9YvU-m0J:www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5241_2609_ID.pdf+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br&client=firefox-b-d

LORENZATO, Sergio. **Para Aprender Matemática.** - 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

LOVIS, Karla Aparecida; FRANCO, Valdeni Soliani; LIMA, Vanderléia Mendes de. **Reflexões Sobre o Ensino da Geometria Fractal por meio do Geogebra e de Materiais Manipuláveis**, p.135-148. Set. 2014. Encontro Paranaense de Educação Matemática. Disponível em: ttp://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:T9P3cbyTbS0J:sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/COMUNICACOES/CCTitulo/CC064.PDF+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br&client=firefox-b-d.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. - 8. ed. - Campinas, SP: Papirus, 2013.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica. -** 7. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de Pesquisa: planejamento execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados. -** 7. ed. – 8 reimpressão. São Paulo: Atlas, 2015.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa: A teoria de David Ausubel**. São Paulo: Centauro, 2001.

NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi Espasandin. **Indagações, reflexões e práticas em leitura e escritas na educação matemática**. Campinas, SP: Mercado de letras, 2013.

NETO, Esnesto Rosa. **Didática da Matemática.** 11ª. ed. São Paulo: Editora Ática, 2003.
NETO, Antonio Rodrigues Neto. **Geometria e estética: Experiências com o jogo de xadrez**. – São Paulo: Editora da UNESP, 2008.

PAULA, Cleyton Eugenio Santos de; SOUZA, Tatiana Miguel Rodrigues de. Uma Abordagem da Geometria Fractal para o Ensino Médio. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**. ISSN 2316-9664 v. 10, dez. 2017. Disponível em: https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=Uma+Abordagem+da+Geometria+Fractal+para+o+Ensino+M%C3%A9dio#. Acesso em: 05 de outubro de 2019.

Plano de Curso de Matemática do Ensino Fundamental II da Secretaria de Estado da Educação e Qualidade de Ensino – SEDUC. Tefé-AM, 2020.

Plano de Curso de Matemática do Ensino Fundamental II da Secretaria Municipal de Educação – SEMED. Tefé-AM, 2020.

ODOM, Jenna; WOOD Taylor. EXPLORATION OF THE SIERPINSKI TRIANGLE WITH GEOGEBRA, 2015. Disponível em: https://mathed.miamioh.edu/index.php/ggbj/article/view/108/113. Acesso em: 09 de setembro de 2020.

OLIVEIRA, Gerson Pastre De; GONÇALVES, Mariana Dias; MARQUETTI, Celso. **Reflexões acerca da tecnologia e sua inserção na pesquisa em educação matemática**. Educação Matemática Pesquisa, > v. 17, n. 3, p. 472-489, 2015. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/25665. Acesso em: 10 de outubro de 2019.

PAVIANI, Neires Maria Soldatelli; FONTANA, Niura Maria. **Oficinas pedagógicas: relato de uma experiência. Conjectura**. v. 14, n. 2, mai./ago. 2009. Disponível em: https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:GLkGPJ52ZFUJ:https://abenfisio.c om.br/wp-content/uploads/2016/05/Oficinas-Pedag%25C3%25B3gicas.pdf+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br&client=firefox-b-d. Acesso em: 10 de outubro de 2019.

SANTOS, Cintia Melo dos; NEVES, Tatiani Garcia; TOGURA , FAORO, Tiaki Cintia. **As tecnologias digitais no ensino de matemática: uma análise das práticas pedagógicas e dos objetos educacionais digitais**, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5245_2978_ID.pdf. Acesso 04/11/2019.

SANTOS, Cleane Aparecida dos; NACARATO, Adair Mendes. **Aprendizagem em Geometria na educação básica: a fotografia e a escrita em sala de aula**. Belo horizonte: autentica Editora, 2014.

STURION, Leonardo; MORAIS, Daiane Aparecida Miliossi. **Impactos Da Utilização Das Tecnologias De Informação E Comunicação No Processo De Ensino E Aprendizagem Da Matemática.** 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5160_2465_ID.pdf. Acesso 04/11/2019.

ZANATTA, Leonardo Ferreira; Macedo, Karine da Silva; Seiscentos, Rebeca L. C; Moran, Mariana; Rezende, Veridiana. **O fractal hexágono de dürer: uma possibilidade de exploração com materiais manipuláveis.** 2019. Disponível em: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:ShKEXOmUWNoJ:www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/view/1146/887+&cd=4&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br. Acesso em: 20 de maio de 2020.

II ROTEIRO DAS ATIVIDADES DE APLICAÇÃO DA PESQUISA

1 OFICINAS PEDAGÓGICAS

ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: 9º ANO	
TURMA: 01	**TURNO:** VESPERTINO
DISCIPLINA: MATEMÁTICA	
CARGA HORÁRIA: 12 h/a	
DATA (S): 04 a 18 de setembro de 2020	
CONTEÚDO (S): Noções primitivas da Geometria: ponto, reta, semirreta; Polígonos regulares; Construção de figuras semelhantes.	
HABILIDADES DA BNCC: (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais; (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.	
TÉCNICA (S): Aula expositiva e dialogada.	
TENDÊNCIA(S) DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: Tecnologia no Ensino da Matemática.	
RECURSOS: Quadro branco, pincéis, data show, computadores, software geogebra, folhas impressas.	
ATIVIDADES: Questionário; Oficina pedagógica.	
LEITURA INDICADA Livro: Descobrindo a Geometria Fractal de Ruy Madsen Barbosa. BIANCHINI, EDWALDO**. Matemática 8º ano, -** 1 ed. – São Paulo: Moderna, 2015	
AVALIAÇÃO:	

Os discentes serão avaliados através do questionário final.
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal - para sala de aula**. - 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. BIANCHINI, EDWALDO. **Matemática 6º ano**, - 1 ed. – São Paulo: Moderna, 2015. BIANCHINI, EDWALDO. **Matemática 8º ano**, - 1 ed. – São Paulo: Moderna, 2015.

PROPOSTA DE OFICINAS PEDAGÓGICAS

A proposta de oficinas pedagógicas a seguir pode ser aplicada no 9º ano do Ensino Fundamental e também nos anos do Ensino Médio, assim possibilitando os discentes a processos interativos e estimulando os discentes a desenvolver sua criatividade e seus conhecimentos a respeito da Geometria euclidiana e Fractal, e ainda do software Geogebra. Será utilizada as competências específicas de matemática para o ensino fundamenta 3 e 4 da BNCC (2018)

Unidade Temática

Geometria Plana e Fractal

Objeto de conhecimento

Similaridade, figuras planas, Padrões Geométricos, Triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch.

Competência Especifica

Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

Habilidades

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, polígonos regulares.

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Percurso Didático

1. Questionário

Para iniciarmos a pesquisa, com o objetivo de investigar quais conhecimentos os discentes têm sobre a Geometria Fractal iríamos conhecer a turma, onde o pesquisador aplicaria um pré-teste para avaliar o conhecimento prévio dos discentes a respeito da geometria euclidiana e fractal.

Neste momento precisaríamos de 1 hora/aula e só explicaríamos dúvidas em relação às questões e não a resolução, e utilizaríamos somente as folhas impressas com questões objetiva e subjetiva com perguntas a respeito da geometria euclidiana e fractal (conceitos).

2. Apresentação da aula de Geometria Euclidiana e Fractal

Logo após aplicação do questionário, tendo como objetivo Introduzir conceitos de autossimilaridade e complexidade infinita, faríamos uma oficina pedagógica com duração de 10h/aulas estas divididas da seguinte maneira: i) 2 horas/aulas para explanar o conteúdo a ser trabalhado; ii) 3h/aulas para orientação sobre o manuseio do Geogebra (aplicativo gratuito e disponível para ser baixado tanto na loja de aplicativos dos celulares quanto na dos computadores), onde os discentes estariam acessando um computador com o software instalado e o pesquisador reproduzirá na tela espelhada por meio do Datashow tanto a aula quanto como trabalhar com o Geogebra.

3. Construindo a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski no Geogebra

Dando continuidade as nossas atividades, realizaríamos a terceira etapa da oficina (iii) 5h/aulas para construção das figuras geométricas, triângulo de Sierpinski e a curva de Koch) com os seguintes objetivos: Construir o triângulo de Sierpinski e a curva de Koch através do software Geogebra; explorar as inter-relações existentes entre a geometria Euclidiana e a

Geometria Fractal nas construções das figuras; Fazer com que os alunos trabalhem de forma colaborativa e interativa nos processos de construção das figuras geométricas e ao longo de todas as atividades propostas.

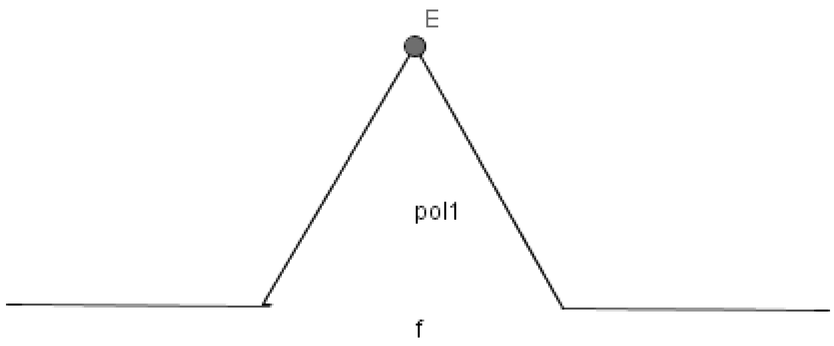
3.1 Passo a passo da construção da Curva de Koch.

1º Passo: Começamos construindo um segmento de reta;

2º passo: Depois dividimos esse segmento em três partes congruentes;

3º Passo: Constrói-se um triângulo equilátero, no segmento do meio, deixando sua base oculta, como mostra a figura abaixo:

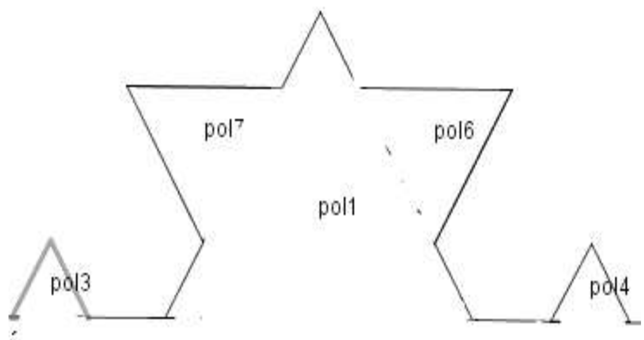
Figura 01: Construindo a curva de Koch



Fonte: SILVA, 2020

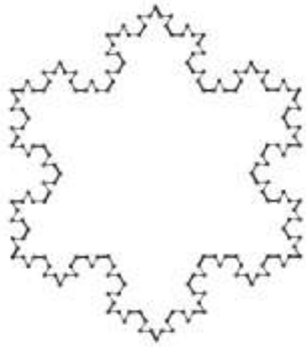
4º Passo: Agora, é somente repetir o passo 1 e 3, que então, estará construída a curva de Koch.

Figura 02: 4º etapa da curva de koch



Fonte: SILVA, 2020

Figura 03: Curva de Koch



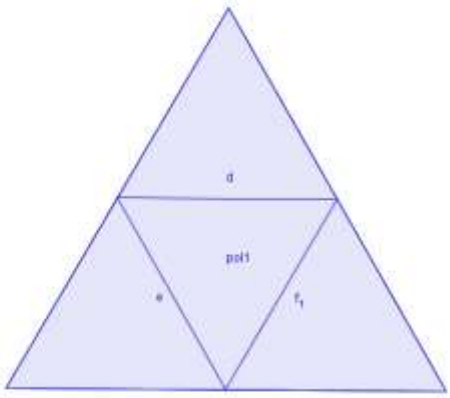
Fonte: SILVA, 2020

3.2 Passo a passo da construção do Triangulo de Sierpinski

1º Passo: Começamos construindo um triângulo equilátero;

2º passo: Depois, marcamos os segmentos dos pontos médios, dessa forma, formando quatro triângulos, “retirando o triângulo do meio”, pois não faremos interações no centro dele;

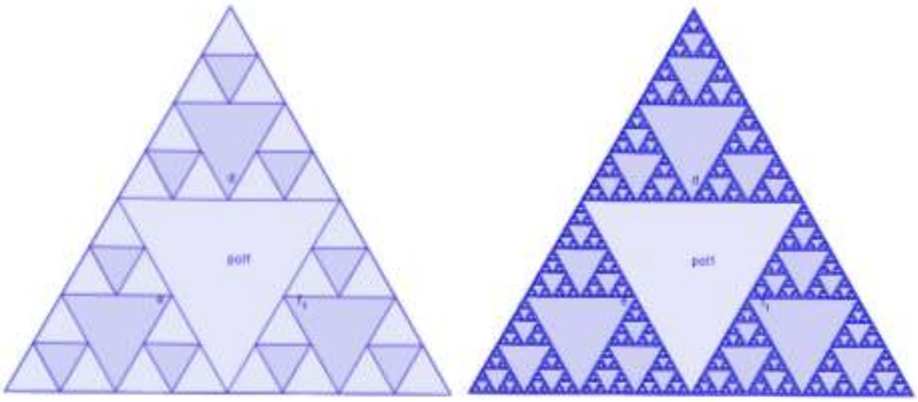
Figura 04: Primeira interação do Triangulo de Sierpinski



Fonte: SILVA, 2020

3º Passo: Nos triângulos com a ponta para cima, precisamos repetir o mesmo procedimento do passo 02, assim sucessivamente.

Figura 05: Triangulo de Sierpinski construído



Fonte: SILVA, 2020

4 Aplicação do Questionário Final

Para finalizarmos nosso projeto na sala de aula aplicando o questionário com o tempo de 1 hora/aula, tendo como objetivo: verificar as opiniões dos discentes se gostaram ou não do ensino da Geometria Fractal através de tecnologias digitais, onde utilizaríamos o mesmo questionário da primeira aula, acrescentando uma questão para saber se os alunos gostaram da experiência de participar de oficinais para aprender mais sobre geometria fractal e o software Geogebra.

APÊNDICES

Apêndice 1: Questionário que seria aplicado aos discentes no primeiro do projeto em sala de aula

QUESTIONÁRIO

1) Conforme o seu entendimento, responda as perguntas abaixo:

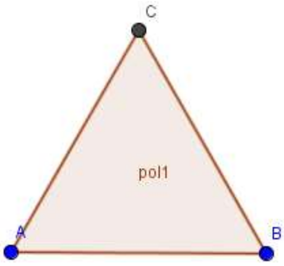
a) O que é um ponto?

b) O que é uma reta?

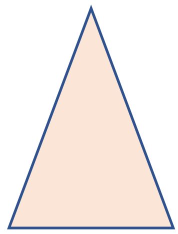
c) O que é um triângulo equilátero?

2) Enumere as questões conforme as figuras

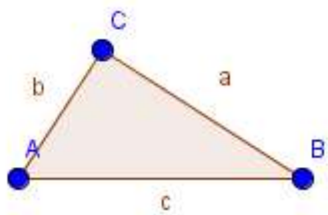
( ) Triângulo Isósceles (1)



( ) Triângulo Equilátero (2)



( ) Triângulo Escaleno (3)

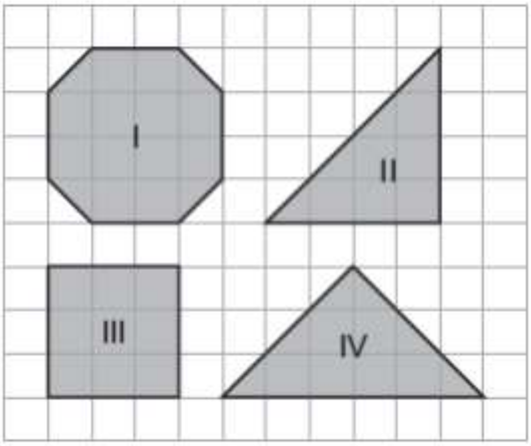


3) Você acredita que a geometria Euclidiana está presente no seu cotidiano? Diga aonde?

4) Você conhece a Geometria Fractal? Caso a resposta seja “sim”, cite um exemplo.

( ) SIM ( )NÃO

5) (OBMEP, 2015) Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?



a) IV e III
b) IV e II
c) IV e I
d) III e II
e) II e I

Apêndice 2: Roteiro de Aprendizagem

UEA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Roteiro de Aprendizagem

Douglas Cabral da Silva

Referências Bibliográficas:

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal - para sala de aula**. - 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BIANCHINI, EDWALDO, **Matemática 6º ano**, - 1 ed. – São Paulo: Moderna, 2015.

Aula 01: Geometria Plana

Geometria (Euclidiana)

Originalmente, Geometria foi o nome que os gregos deram à parte da Matemática que estudava a medida (metria) da terra (geo). Trata-se do ramo da Matemática em que são estudadas as figuras e suas características.

Figuras planas e não planas

Ao observar os objetos à nossa volta, percebemos que eles apresentam as mais variadas formas. Os brinquedos a seguir são exemplos de objetos que têm características diferentes.

Exemplos:

	A superfície do tabuleiro do jogo de damas, podemos associar esta figura: 	As peças do jogo podemos associar esta figura: 

Ponto e reta

O ponto e a reta são noções aceitas sem definição na Geometria, por isso são chamadas noções primitivas. Elas podem ser associadas, de maneira intuitiva, a diferentes coisas que nos rodeiam.

Exemplo:

Cada estrela que vemos no céu dá a ideia de um ponto

Um raio de luz dá a ideia de uma reta.

Graficamente, um ponto pode ser representado como e é indicado por letras maiúsculas do nosso alfabeto: Graficamente, um ponto pode ser representado como e é indicado por letras maiúsculas do nosso alfabeto:

Ponto *A* Ponto *D* Ponto *L*

Quando há um ou mais pontos, temos uma figura. Por exemplo:

Uma reta também é uma figura com infinitos pontos. Graficamente, uma reta pode ser representada da seguinte maneira:

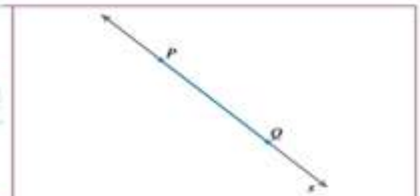
A reta é indicada por letras minúsculas do nosso alfabeto:

Uma reta não tem começo nem fim nem espessura. Veja uma reta e alguns de seus pontos.

Segmento de reta

Considere uma reta t e dois pontos distintos pertencentes a ela: M e H.

Um segmento de reta é uma parte da reta limitada por dois pontos distintos, chamados de extremos.



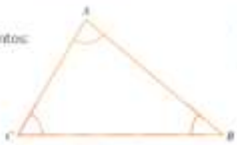
A parte pintada de azul é o **segmento de reta** $\overline{PQ}$ de extremidades *P* e *Q*, formado pelos pontos *P*, *Q* e por todos os demais pontos da reta *s* que estão entre *P* e *Q*.

Diariamente nos deparamos com diversos objetos que nos dão ideia de triângulo. Veja alguns objetos que podem ser relacionados a esse polígono de três lados.

No triângulo ABC, ao lado, destacamos seus elementos:

Elementos de um triângulo

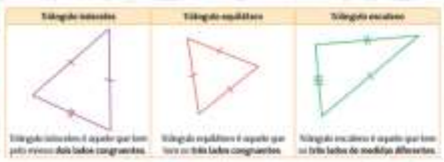
No triângulo ABC, ao lado, destacamos seus elementos:
- A, B e C são os **vértices**.
- $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ são os **lados**.
- $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os **ângulos internos**.



Classificação dos Triângulos

Os triângulos podem ser classificados quanto às medidas de seus lados e quanto às medidas de seus ângulos internos. Observe a seguir os dois tipos de classificação.

Classificação quanto aos lados



Aula 02: Geometria Fractal

A geometria fractal nasce a partir dos formatos das mais diversas e irregulares formas encontradas na natureza, antes caracterizada como teoria do caos. Muitos pesquisadores tentavam observar algum tipo de padrão nesta teoria, mas foi um matemático francês, chamado Benoit Mandelbrot que se empenhou em estudá-la e nomeá-la.

"As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, os litorais não são círculos e as cascas das árvores não são lisas, tampouco os raios se deslocam em linha reta", escreveu Mandelbrot.

A geometria fractal surge nos diversos ambientes da natureza, onde ela encontra-se em nuvens, árvores, relâmpagos entre outros não tem um formato que sejam contemplados pelos estudos da

Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e independem de escala. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

Qual a necessidade de estudar os fractais?

Mandelbrot passou a vida inteira procurando uma base matemática simples para as formas irregulares do mundo real. Parecia cruel para ele que os matemáticos tivessem passado séculos contemplando formas idealizadas, como linhas retas ou círculos perfeitos.

Autossimilaridade

Imagine nuvens, montanhas, brócolis e samambaias, suas formas têm algo em comum, algo intuitivo, acessível e estético.Se você observar com atenção, vai descobrir que a complexidade deles ainda está presente em uma escala menor.

Exemplos de Fractais:

Fonte: Google

Veja este brócolis romanesco. Sua estrutura geral é composta por uma série de cones repetidos em escalas cada vez menores.

Fonte: Google

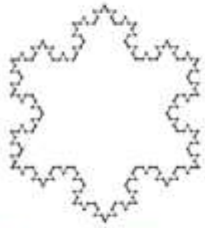
Floco de neve

Fonte: Google

Imagem feita em computador

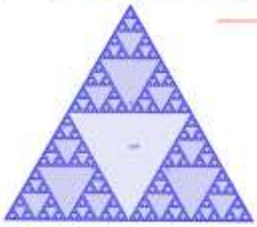
Fonte: Google

Curva de KOch



Fonte: SILVA. 2020

Triângulo de Sierpinsk



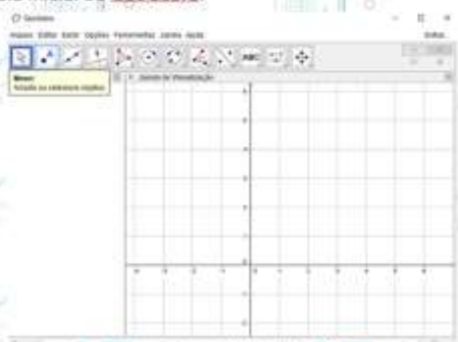
Fonte: SILVA. 2020

Tutorial do GeoGebra

O que é o GeoGebra?

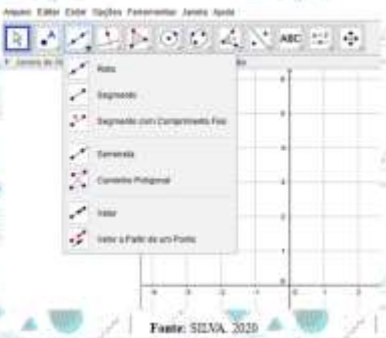
GeoGebra é um software de Matemática dinâmico e gratuito, podendo ser utilizado em todos os níveis de ensino, pois podemos trabalhar álgebra, gráficos, estatísticas e principalmente a Geometria.

1. Essa é a tela inicial do GeoGebra.



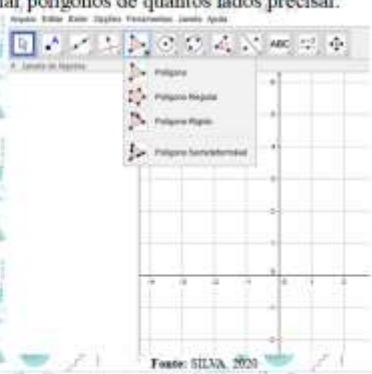
Fonte: SILVA. 2020

2. Ferramentas para construir reta, segmento de reta, semirreta e etc.



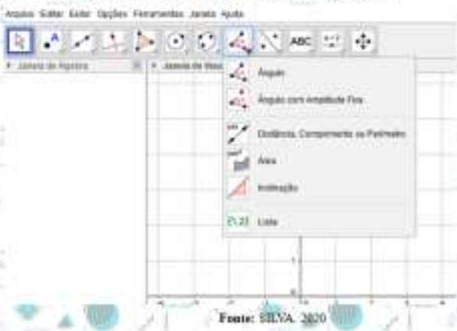
Fonte: SILVA. 2020

3. Ferramentas para criar polígonos de quantos lados precisar.



Fonte: SILVA. 2020

4. Ferramenta para criar ângulos ou área de algum polígonos.

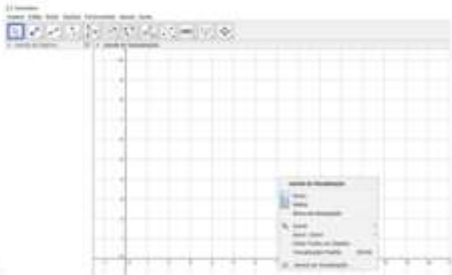


Fonte: SILVA. 2020

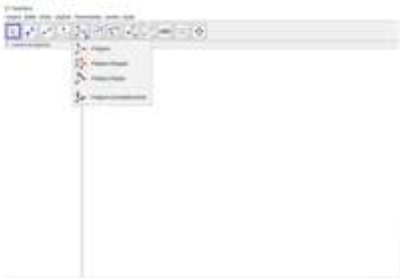
Apêndice 3: Construção do Triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch no Geogebra

CONSTRUINDO O TRIÂNGULO DE SIERPINSK PASSO A PASSO

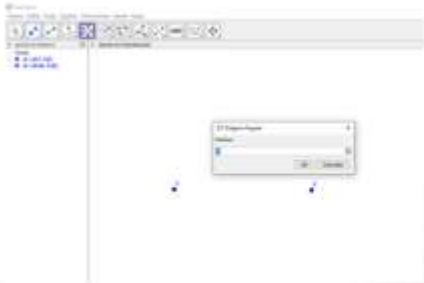
Passo 1: Abra o Geogebra, em seguida clique com o botão direito do mouse, que aparecerá a seguinte barra de notificação e nela você clicará em "eixos" e "malha".



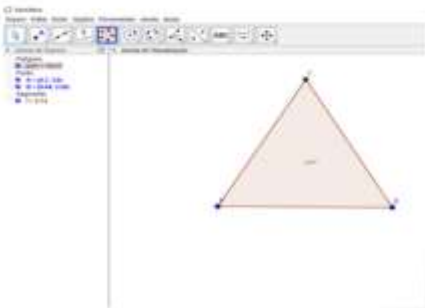
Passo 2: O fundo do Geogebra ficará branco, como mostra a imagem, a partir daí clique na janelinha que tem um triângulo e selecione "polígono regular", como mostra a imagem abaixo:



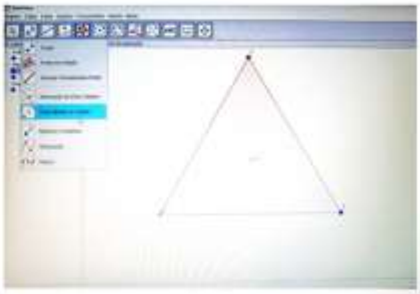
Passo 3: Com o a opção "polígono regular" ativada, agora só é clicar em dois pontos distintos da tela, que aparecerá a seguinte notificação para determinar os vértices, então, você digita 3.



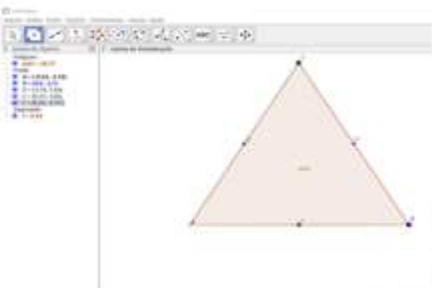
Passo 4: Feito isso, aparecerá a seguinte imagem:



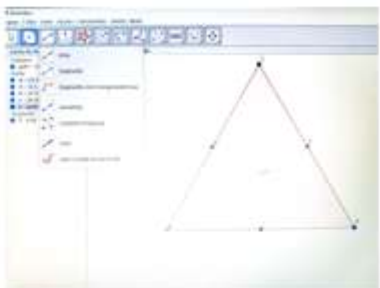
Passo 5: Clique no quadrilho do ponto e em seguida selecione "ponto Médio ou centro"



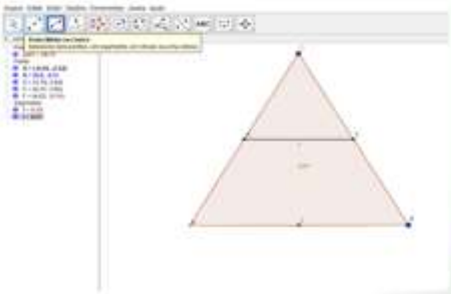
Passo 6: Clique nos dois vértices "a" e "c", depois "c" e "b", depois "b" e "a".



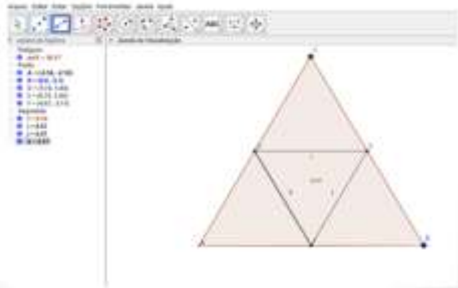
Passo 7: Clique em no quadrinho "reta" e selecione "segmento".



Passo 8: Com o "segmento" ativado, clicaremos em "d" e "e" para formar um segmento.



Passo 9: Depois faremos os segmentos de "EF" e "FD", e vai ficar como mostra a imagem abaixo:

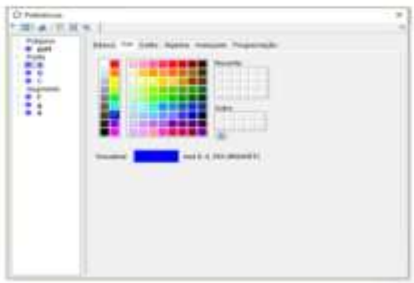


Passo 10: Agora clique em ferramentas, e em seguida "criar uma nova ferramenta"

Passo 11: Feito isso, aparecerá essa janela mostrada abaixo e clicaremos em "próximo".

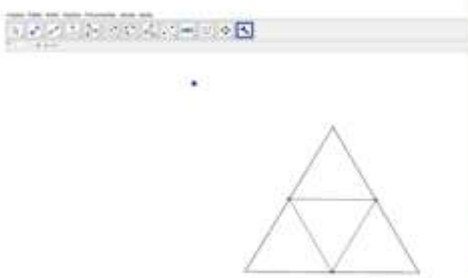
Passo 12: Vai aparecer a seguinte janela e clicaremos em "concluído".

Passo 13: Em seguida clicaremos em "Preferências" e selecionamos o "pol1" e o "ponto" (a, b e c) e aperte na "cor com o quadradinho branco"

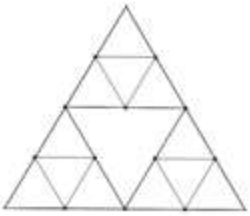


Passo 14: Depois ainda com "pol1" e o "ponto" (a, b e c) selecionados, clique em "Estilo" e arraste até o número "1"

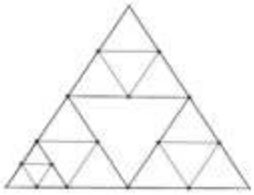
Passo 15: Nosso triângulo ficará da seguinte forma:



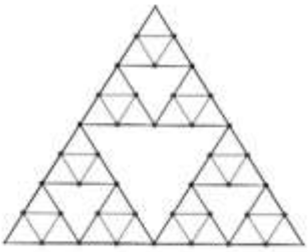
Passo 16: Uma vez que estamos nossa ferramenta ativada, clicaremos nos 3 lados de cada triângulo invertido, ou seja, nesse caso nos 3 triângulos (um em cima, um do lado direito e outro do lado esquerdo) e ficará da seguinte forma:



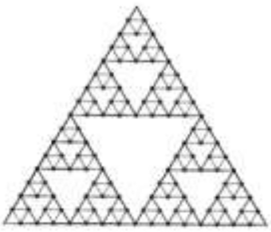
Passo 17: Agora repetiremos a mesma coisa do passo 16, sendo que há 9 triângulos, sendo 3 de cada lado do triângulo do centro (invertido), assim temos que fazer 3 interações nos triângulos de cima que não estão invertidos, e nos outros 6 (3 do lado esquerdo e 3 do lado direito).

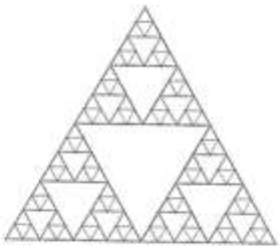


Essa imagem mostra o final das iterações do passo 17.

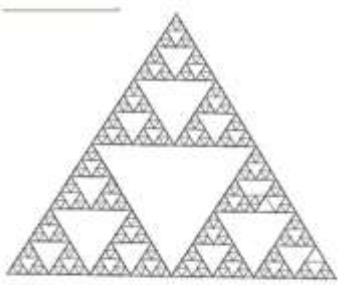


A partir daqui repetiremos o passo 16, mostraremos a seguir as imagens:



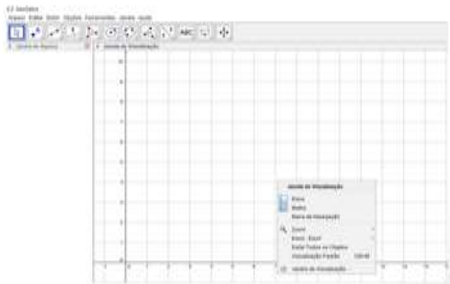


Finalmente chegamos ao Triângulo de Sierpinsk após várias iterações:

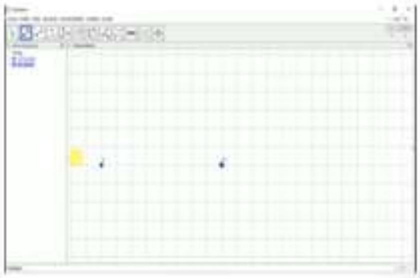


CONSTRUINDO A CURVA DE KOCH PASSO A PASSO

Passo 1: Abra o Geogebra, em seguida clique com o botão direito do mouse, que aparecerá a seguinte barra de notificação e nela você clicará em "eixos".

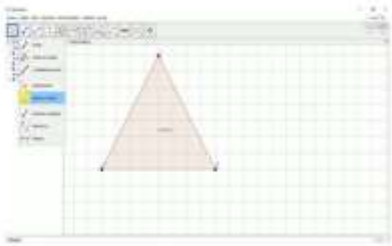


Passo 2: Clique no quadrinho de polígonos, em seguida aperte em dois lugares da tela distintos, como mostra a imagem a seguir:

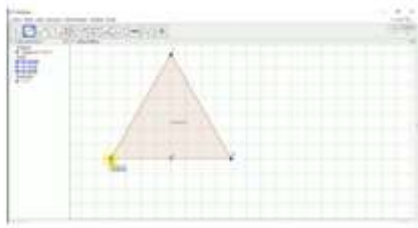


Passo 3: Em seguida aparecerá a seguinte informação "vértices", então, digite o número 3 e vai formar um triângulo como mostra a imagem abaixo:

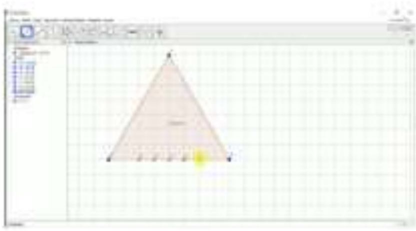
Passo 4: Clique no quadradinho "ponto" e selecione "médio ou centro" como mostra a figura:



Passo 5: Em seguida aperte nos vértices "a" e "b" do triângulo e vai formar o ponto "d":

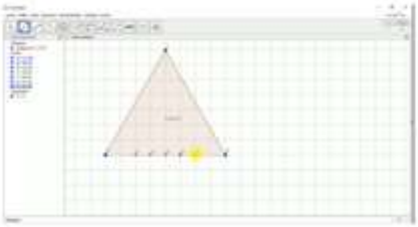


Passo 6: Depois pressione no "a" e "d" para criar o ponto médio dos dois e fazer isso também com "d" e "b" para formar seu ponto médio também.

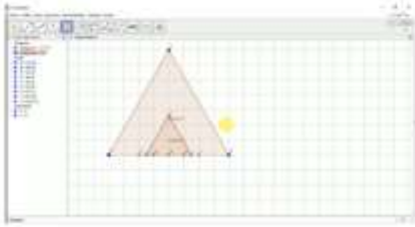


Passo 7: Depois faça o ponto médio de "d" e "a" e ainda de "d" e "b".

Passo 8: Em seguida faça também o ponto médio de "e", "g" e "h", "f":

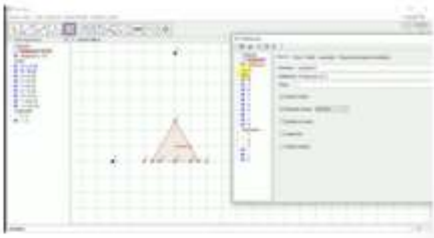


Passo 9: Com isso clicamos no quadrinho de "polígonos regulares" e faremos um triângulo tendo como base "i" e "j".

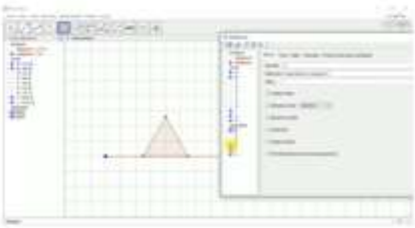


Passo 10: Em seguida clicaremos em "editar" e clicar em "propriedades". Depois Clique ao lado esquerdo (bolinha azul" de onde está escrito "polígono1" e vai sumir os lados do triângulo maior.

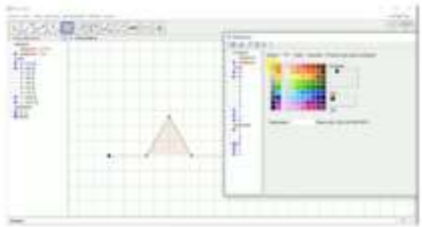
Passo 11: Depois selecione os pontos (de "a" à "k" do lado esquerdo da tela e desmarque o quadrinho da "etiqueta visível" faça esse mesmo procedimento com os segmentos "f, g, h".



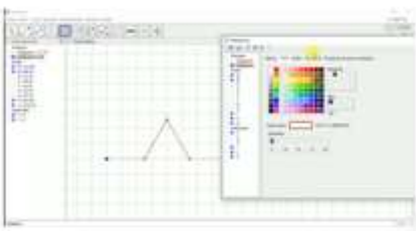
Passo 12: Depois desmarque as "bolinhas azul" dos pontos (de e a h).



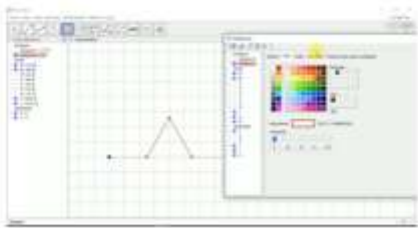
Passo 13: Depois desmarque as "bolinhas azul" dos pontos (g, h).



Passo 14: Selecione o segmento "i" e "cor" e coloque a "cor branca".



Passo 15: Selecione o "polígono1" e coloque em opacidade "0".



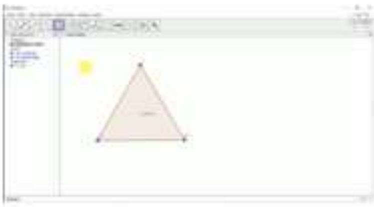
Passo 16: Clique com o botão direito do mouse e tire a "malha" do Geogebra.

Passo 17: Depois clicamos em "ferramentas" e em "criar nova ferramenta".

Passo 18: Aperte em "objeto de saída" e em "polígono 1, polígono 2, ponto c" e os demais que constam na imagem e ainda todos os segmentos.

Passo 19: Em seguida aperte "seguinte" e "concluído".

Passo 20: Depois, como inicialmente fizemos, criaremos um novo triangulo equilátero.

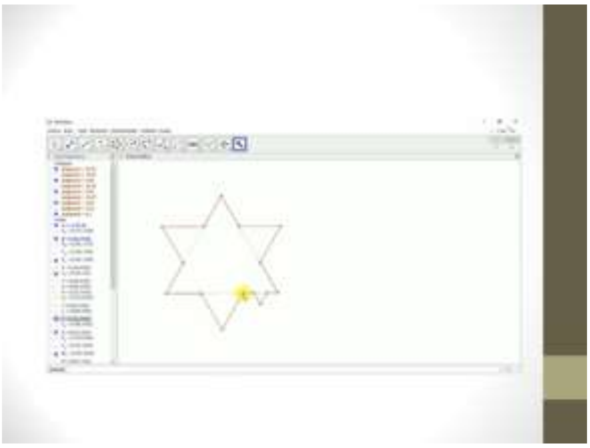


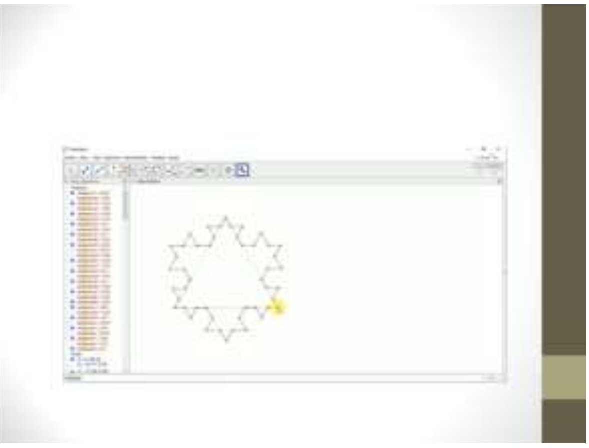
Passo 21: Depois clicaremos com o botão direito do mouse e selecionar "propriedades do polígono" e escolheremos a cor branca para ficar como mostra a imagem abaixo:

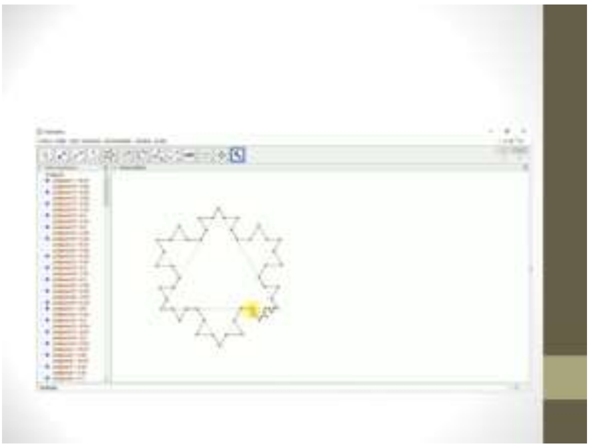
Passo 22: Em seguida aperte o quadradinho com a ferramenta criada e clique em um vértice e depois no seguinte (do segmento em linha reta) e ficara como mostra a imagem abaixo:

Passo 23: A partir daí é só continuar fazendo as interações:


A SEGUIR VEREMOS CADA
INTERAÇÃO COMPLETA








Finalmente chegamos a Curva de
Koch após algumas iterações:

Apêndice 4: Questionário que seria aplicado aos discentes no ultimo dia de projeto em sala de aula para avaliá-los

QUESTIONÁRIO

1) Conforme o seu entendimento, responda as perguntas abaixo:

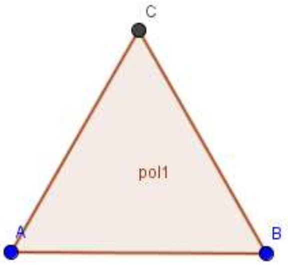
d) O que é um ponto?

e) O que é uma reta?

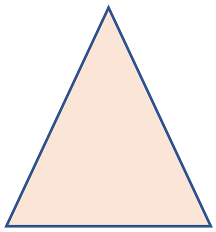
f) O que é um triângulo equilátero?

2) Enumere as questões conforme as figuras

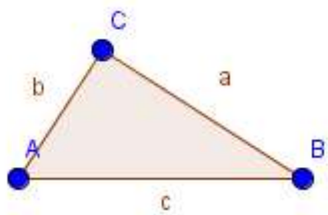
( ) Triângulo Isósceles (1)



( ) Triângulo Equilátero (2)



( ) Triângulo Escaleno (3)

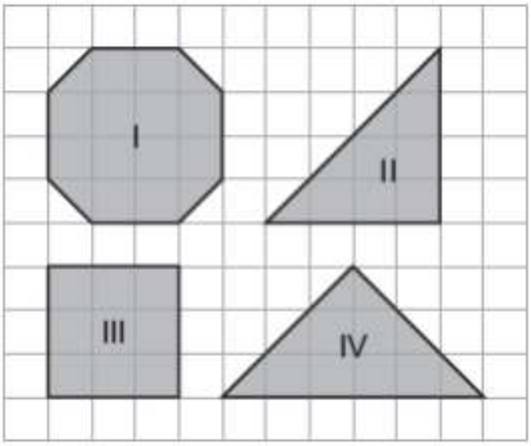


3) Você acredita que a geometria Euclidiana está presente no seu cotidiano? Diga aonde?

4) Você conhece a Geometria Fractal? Caso a resposta seja “sim”, cite um exemplo.

( ) SIM ( )NÃO

5) (OBMEP, 2015) Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?



6) IV e III
7) IV e II
8) IV e I
9) III e II
10) II e I

6) O que mais você gostou durante todas as atividades realizadas em sala e por quê?

ANEXOS

ANEXO 1: Fichas que seriam utilizadas para o inicio da aplicação do projeto na escola

Centro de Estudos Superiores de Tefé

GOVERNO DO ESTADO DO AMAZONAS

UEA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

Tefé, 15 de agosto de 2020.

Ilustríssimo(a) Sr(a). ____, Gestor da Escola Estadual Deputado Armando de Souza Mendes.

Eu, Douglas Cabral da Silva, acadêmico do 8º período de Matemática da Universidade do Estado do Amazonas – Centro de Estudos Superiores de Tefé, responsável pelo projeto Construindo o triângulo de Sierpinski e a curva de Koch no Geogebra: possibilidades de inserção da Geometria Fractal no 9º Ano do Ensino Fundamental**,** venho pelo presente, solicitar de V. Sa. autorização para realizar a pesquisa nesta renomada Instituição de Ensino, na turma do 9º Ano “03” do Ensino Fundamental, bem como autorização para utilizar os dados obtidos na publicação de artigos científicos e na apresentação do Trabalho de Conclusão do Curso de Matemática à Universidade do Estado do Amazonas.

Nossa pesquisa tem por objetivo Verificar quais as contribuições que a construção do triângulo de Sierpinski e da curva de Koch no Geogebra podem trazer para uma aprendizagem de conceitos iniciais da Geometria Fractal e da Geometria Euclidiana.

Quaisquer dúvidas que apareçam no desenvolvimento da pesquisa estaremos à disposição para saná-las. Em anexo segue a cópia do escopo do projeto desta pesquisa.

Desde já, esperamos contar com seu apoio e agradecemos antecipadamente a colaboração.

____

Responsável pela Pesquisa

Documento em duas vias:

1ª via instituição

2ª via pesquisadores

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu ____ aluno (a) da Escola Estadual Deputado Armando de Souza Mendes declaro estar ciente que as informações constantes na pesquisa de campo realizada para a obtenção de Título de Graduado(a) em Licenciatura em Matemática são de uso exclusivo da pesquisa. Não será publicado o meu nome, assim como não serão divulgadas a minha imagem.

Diante do exposto, autorizo a utilização dos registros para análise e construção do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas (UEA).

Tefé, ________ de setembro de 2020.

CIENTE: ____

Aluno(a)
Escola Estadual Deputado Armando de Souza Mendes

CIENTE: ____

Responsável Legal pelo(a) Aluno(a)

CIENTE: ____

Graduando(a) em Licenciatura em Matemática (UEA/CEST)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal - para sala de aula**. - 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BIANCHINI, EDWALDO. **Matemática 6º ano**, - 1 ed. – São Paulo: Moderna, 2015.

BIANCHINI, EDWALDO. **Matemática 8º ano**, - 1 ed. – São Paulo: Moderna, 2015.

CONCEIÇÃO, Maria do Amparo Cruz da. Geometria Fractal: uma sequência didática para a educação básica. 2019.