Universidade Do Estado do Amazonas-UEA

Centro de Estudos Superiores de Tefé

Curso de Graduação em Matemática

Licenciatura em Matemática

CARTILHA DE ANÁLISE: SEMINÁRIOS DE ANÁLISE NA RETA

Prof. Josimauro Borges de Carvalho

Acadêmicos :

Jhonny Oliveira Pereira

Francisco Érison Cardoso da Cunha

Elcimar Arante Damasceno

Ismael Quirino Gomes

Alisson Athos Rodrigues Mangabeira

Alison Thaylo dos Santos Pereira

Rodrigo Coelho Gomes

Tefé - 2020

Prof. Josimauro Borges de Carvalho

Acadêmicos :

Jhonny Oliveira Pereira

Francisco Érison Cardoso da Cunha

Elcimar Arante Damasceno

Ismael Quirino Gomes

Alisson Athos Rodrigues Mangabeira

Alison Thaylo dos Santos Pereira

Rodrigo Coelho Gomes

CARTILHA DE ANÁLISE: SEMINÁRIOS DE ANÁLISE NA RETA

Tefé - 2020

Agradecimentos

Agradeço ao professor Fernando Soares Coutinho que dedicou parte do seu precioso tempo em fazer correções, críticas e adequações valiosas para a melhoria deste texto.

Dedico este texto ao amigo e colega de trabalho, grande homem e mestre professor Feliciano Cândido Parente (in memorian).

DA LUTA...AO LUTO Amemo-nos... Ainda não creio...não cremos Que o Eterno nos conforte, Neste...e naquele plano, Receba a alma do prof. FELICIANO, Após lutas travadas, E muitas vencidas, A caminhada foi PLENA, É triste que nesse teatro da vida, Nossa existência... vai-se...numa CENA

(Manoel Domingos)

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens".

(Descartes).

Resumo

Não se trata de um livro, este texto foi escrito a partir das notas e rabiscos de seminários e apresentações de oficinas realizadas pelos estudantes do curso e matemática da UEA de Tefé e de Eirunepé, durante a execução do projeto de produtividade intitulado "Tópicos de Análise: Números reais e topologia na reta"que ocorreu entre os meses de março de 2018 e fevereiro de 2020 sob a coordenação do professor Josimauro Borges e a participação direta dos estudantes Jhonny Oliveira, Érison Cardoso, ambos acadêmicos do curso de matemática de Eirunepé, dos acadêmicos Alisson Athos, Alison Taylo, Rodrigo Meza, Ismael Quirino e Elcimar Arante, estes são acadêmicos do curso de Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tefé- CEST. O projeto teve carga horária total de 144 horas distribuídas em 6 horas por mês. Há alguns questionamentos a serem esclarecidos: i) Que conjuntos são considerados como corpos ii) Será que existem dois corpos ordenados completos, ou o conjunto dos números reais é único com essas propriedades? E, iii) Vale a recíproca do teorema de Borel-Lebesgue? Na parte final falamos brevemente sobre alguns espaços importanes no meio matemático. O texto tem caráter elementar pelo fato de que, a princípio, os resultados terem sidos escritos para acadêmicos iniciantes do curso de matemática, embora, se estendesse também aos que pretendem ingressar nos cursos de pós-graduação, visto que esse tema é cobrado na realização dos exames de ingresso em tais cursos. O objetivo é facilitar a compreensão de alguns temas abordados na disciplina de Análise Matemática para licenciatura e Álgebra Linear. O material está disponível na biblioteca de Tefé e de Eirunepé.

Sumário

Introdução

O ensino de Análise Real e Álgebra Linear é de importância incalculável na área da matemática superior, dada sua grande utilização nas mais diversas linhas de pesquisa nos cursos de pós-graduação. A sua abordagem na parte de topologia, números reais e espaços vetoriais traz uma contribuiçao para o aprendizado paralelo à sala de aula. Dado o fato de que a Análise Real, como importante ramo da matemática, tem sido vista como "difícil"de ensinar e de aprender e também do fato de a universidade (CEST) não dispor de um laboratório de matemática, onde se teria uma ênfase maior nessa área com os acadêmicos, esse texto se apresenta como ação/alternativa pedagódicas para auxiliar os professores e estudantes a fim de melhorar os estudos desses temas. Esse texto se justifica como um instrumento inovador, de pesquisa e cooperação para a comunidade escolar e, claro, fortificando o conhecimento e a aprendizagem dos acadêmicos envolvidos. Durane a realização das palestras e seminários os acadêmicos guardavam todo o material apresentado e em seguida o texto era digitado. Nos colocamos humildemente à disposição para fazer correções de eventuais erros que este texto apresentar, bem como apreciar comentários e acrescentar se assim entendermos. Críticas e sugestões, favor enviar para o *email* jbcarvalho@uea.edu.br.

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

Neste capítulo introduzimos alguns fatos e definições básicas dos conjuntos numérios $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e apresentamos soluções de alguns exercícios e demonstrações de alguns teoremas. Não é feito um estudo aprofundado. Como já comentamos antes, são apenas resultados que foram discutidos durante a realização do projeto. Para um estudo aprofundado o leitor deve consultar [1], [5], [11], e [12].

1.1 Seminário 1- Contexto Histórico

Este foi o primeiro seminário. Foi apresentado pelos acadêmicos Jhonny e Érison aos demais acadêmicos do curso de Matemática de Eirunepé em 6 de abril de 2018. Também foi apresentado aos acadêmicos do curso de Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tefé-CEST pelos acadêmicos Álisson Athos, Rodrigo Meza e Isamel Quirino.

1. Breve histórico dos conjuntos numéricos: Naturais, Inteiros, Racionais, Reais e Irracionais. Dar a definição rigorosa e formal de cada um deles, citar exemplos;

   (a) Sobre os números naturais $\mathbb{N}$. A constatação de que se pode elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de alguns poucos fatos básicos, conhecidos atualmente como os Axiomas de Peano, deve-se a Giussepe Peano (1858-1932). Trata-se de algumas propriedades fundamentais das quais resultam quase todas as afirmações que se podem fazer sobre esses números. *Neste estudo consideraremos que o menor número natural é o número* 1 . Autores diversos discutem sobre considerar ou não que o zero 0 seja considerado um número natural. Parece que considerar o zero como um número natural é uma questão de conveniência. Então caro estudante, fique atento e use a conveniência e seu raciocínio quanto a isso. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é caracaterizado pelos seguintes fatos, conhecidos como axiomas de Peano:

i) Há uma função injetiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. A imagem $f(n)$ de cada número natural n é o sucessor de n.Ou seja, se $n = 1$ então a imagem $f(n) = 2$, pois 2 é o sucessor de 1, se $n = 2$ então $f(n) = 3$, pois 3 é o sucessor de 2. E assim por diante. Veja que esta construção é infinita para o lado positivo.

ii) Existe um único número natural 1 tal que $1 \neq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso significa que dentro do conjunto dos números naturais o número 1 não tem antecessor, evidentemente o número 1 não é sucessor de nenhum outro número natural.

iii) Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $f(X) \subset X$, isto é, $n \in X \Rightarrow f(n) \in X$ então $X = \mathbb{N}$. Este axioma quer dizer que se o número $1 \in X \subset \mathbb{N}$ e o sucessor do 1 também pertence a X e, um número $n \in X$ e o sucessor deste número n também pertence a X então $X = \mathbb{N}$. Este axioma é conhecido como Princípio da Indução. Veremos mais adiante sobre este princípio.

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$ valem as seguintes propriedades:

i. Comutativa da soma: $a + b = b + a$.

ii. Associativa da soma: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

iii. Associativa do produto: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

iv. Distributiva à direita: $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Distributiva à esquerda: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

v. Elemento neutro do produto: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

vi. Comutativa do produto : $a \cdot b = b \cdot a$.

(b) Sobre os números inteiros $\mathbb{Z}$. O conjunto dos números inteiros contém os números positivos e negativos e tambémo o número zero. A este conjunto valem todas a propriedades anteriores acrescida de mais três, a saber,

vii . Elemento inverso aditivo: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

viii . Elemento neutro da soma: $a + 0 = 0 + a = a$.

ix . O produto de dois elementos não-nulos é um elemento não-nulo: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Munido dessas propriedades, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros é chamado de *Domínio e Integridade.*

Se um conjunto satisfaz todas estas nove propriedades e ainda satisfaz a seguinte:

x . Inverso multiplicativo:$a \cdot (a)^{-1} = (a)^{-1} \cdot a = 1$,

então é chamado de *Corpo.* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos.

(c) Sobre os números racionais $\mathbb{Q}$. O cojunto dos números racionais é um corpo. É formalmente descrito como sendo

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Isto significa dizer que os números racionais são todas as frações e, evidentemente os números que podem ser escritos em forma de fração. Por exemplo, o número 3, pode ser escrito em forma da fração $\frac{6}{2} = 3$.

(d) Sobre os números irracionais $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Este conjunto são os números que jamais podem ser escrito em forma de fração, são as dízimas não periódicas, nossas velhas conhecidas. Os mais conhecidos são $\sqrt{2}$, π, dentre outros.

(e) Sobre os números reais $\mathbb{R}$. O conjunto dos números reais satisfaz estas dez propriedades citadas, bem como $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{C}$. No entanto, existem ainda outras propriedades que são satisfeitas apenas pelo conjunto dos números reais, aliás são estas propriedades que o diferencia dos demais conjuntos. Veremos mais adiante que $\mathbb{R}$ é ordenado e completo, coisas que $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Q}$ não são.

2. Mostrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Solução: A demonstração é feita por contradição. Para estudar um pouco mais sobre demonstrações veja [7]. Suponha que exista um número racional igual a raiz de 2, ou seja, que existam números inteiros positivos a e b tais que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, com $\frac{a}{b}$ na forma irredutível. Ou equivalentemente $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$. Temos que a^2 é par, pois é o dobro de b^2. Veja a deve ser par, pois o quadrado de um número ímpar é impar. Ora, se a é par então é o dobro de algum outro número, digamos que $a = 2k$. Assim,

$$a = 2k$$

$$(2k)^2 = 2b^2$$

$$4k^2 = 2b^2$$

$$2k^2 = b^2$$

Veja que b^2 é par, logo b também deve ser par. Se a e b são pares, como é possível ter uma fração irredutível com numerador e denominador pares ? Não é possível ter esta fração, logo $\sqrt{2}$ não é um número racional. ■

1.2 Seminário 2 - Princípio de Indução e Princípio da Boa Ordenação

Este seminário foi apresentado em 4 de maio de 2018 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé. Para um aprofundamento do assunto veja [7] , [11] e [12].

(a) Definir o Principio da Indução e mostrar um exemplo.

Princípio da Indução. Este princípio serve como base para um método de demonstração de teoremas sobre números naturais conhecido como *método de indução*, que funciona assim : Se uma propriedade P vale para o número 1 e, a partir daí supormos que seja válida para um número n (é o que chamamos de Hipótese de Indução) e provarmos que vale também para o sucessor de n que é $n + 1$ então podemos conluir que vale para todos os números naturais. Exemplo: Prove por indução que $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solução:

A igualdade vale para $n = 1$, isto é

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Suponha que valha para um certo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, fazendo $n = k$. Temos

$$1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

A esta igualdade chamamos de Hipótese de Indução.

Devemos provar que é verdade para o sucessor do número k escolhido anteriormente, isto é, $k+1$. Ou seja, devemos provar o seguinte:

$$1+2+...+k+1 = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Para provar esta igualdade vamos usar a Hipótese de Indução, veja que

$$\begin{aligned} 1+2+...+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k^2+k+2k+2}{2} \\ &= \frac{k^2+3k+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Está provado. Veja que no primeiro passo da igualdade usamos a Hipótese de Indução e, somamos $k+1$ a ambos os membros da igualdade. Em seguida calculamos o mmc (mínimo múltiplo comum) para obter $k^2+k+2k+2 = k^2+3k+2$. No último passo calculaos as raízes da equação de segundo grau em k que são $k=-1$ e $k=-2$. Finalmente chegamos à igualdade desejada. ■

(b) Definir o Princípio da Boa Ordenação e mostrar um exemplo.

Solução: O Princípio da Boa Ordenação-P.B.O. diz o seguinte: Todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um elemento mínimo, isto é, um elemento $n_0 \in X$ tal que $n_0 \leqslant n$ para todo $n \in X$. Em outras palavras, qualquer subconjunto não vazio dos números naturais tem, necessariamente, um elemento que é menor do que todos os outros.

Exemplo. Dado $n \in \mathbb{N}$, prove que não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n+1$.

Solução: Na primeira desigualdade tem-se $n < x \Rightarrow x = n+p$. Por outro lado $x < n+1$. Ou seja, $n+p < n+1 \Rightarrow p < 1$. Chegamos a uma contradição, pois pelo P.B.O 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$. ■

1.3 Seminário 3 - Conjuntos finitos e infinitos

Este seminário foi apresentado em 1 de junho de 2018 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé. Para um aprofundamento do assunto veja [10],

[11] e [12].

1 . Definir:

i. Conjunto finito;

Solução

Um conjunto é finito quando é vazio (não possui elementos) ou quando você consegue contar todos os seus elementos do primeiro até o último, sem esquecer nenhum deles. Por exemplo, o conjunto $J = \{m, a, u, r, o\}$ formado por estas letras é finito. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros não é finito. Se você tentar contar todos os seus elementos certamente vai gastar mais de cento e vinte anos e, mesmo assim não conseguirá contar todos. Precisamos dar uma definição formal de conjunto infinito. Veja: Considere o conjunto $I_n = \{1, 2, ..., n\}$, ou seja, o conjunto formado pelos números naturais de 1 até n, isto é, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$I_n = \{p \in \mathbb{N}; 1 \leqslant p \leqslant n\}$$

Assim, um conjunto X chama-se finito quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma função bijetiva

$$f : I_n \longrightarrow X.$$

Cada conjunto I_n é finito e possui n elementos, por exemplo,

$$I_1 = \{1\}$$

$$I_2 = \{1, 2\}$$

$$I_3 = \{1, 2, 3\}$$

E assim por diante. Se uma função $f : X \longrightarrow Y$. é uma bijeção, necessariamente os conjuntos X e Y são finitos.

ii. Conjunto infinito;

Solução

Um conjunto é infinito quando não tem fim, é o caso do conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros que comentamos anteriormente. Formalmente falando, um conjunto X é infinito quando não é vazio e, além disso, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_n \longrightarrow X$.

iii. Conjunto Enumerável;

Solução

Um conjunto é enumerável quando você consegue enumerar = contar todos os seus elementos. Como assim enumerar? Enumerar significa contar, mesmo que você não chegue ao fim da contagem, é importante que, durante a contagem, nenhum elemento pode ser esquecido. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros não tem fim, mas você consegue fazer uma enumeração dos seus elementos, mesmo não chegando ao fim. A definição formal é a seguinte: Um conjunto X é enumerável quando é finito ou quando existe uma função bijetiva $\mathsf{f} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathsf{X}$, no segundo caso X é infinito enumerável.

iv. Conjunto não enumerável.

Solução

Um conjunto X é não-enumerável quando jamais podemos contar ou enumerar seus elmentos por mais que tentemos. Um exemplo clássico é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Além de ser infinito, se você tentar contar os seus elementos certamente estará esquecendo vário deles, pois estão escondidos entre os outros. Por exemplo, se você iniciar a contagem pelo número 1 e fizer uma lista, qual seria o próximo número a ser colocado na lista? Digamos que seja o número 2, assim teríamos

$$1; 2; ...$$

Veja que ao passar do 1 para o 2 você esqueceu do $1,5$. Então vamos fazer uma nova lista acrescentando o $1,5$, temos

$$1; 1,5; 2; ...$$

Veja que ao passar do 1 para o $1,5$ você esqueceu do $1,4$. Então vamos fazer uma nova lista acrescentando o $1,4$, temos

$$1; 1,4; 1,5; 2; ...$$

Epa! Veja que você está esquecendo vários outros números, estão faltando nesta lista o $1,1$;$1,2$; $1,3$. Então vamos fazer uma nova lista acrescentando eles, temos

$$1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 2; ...$$

Agora veja que você esqueceu de colocar na lista os números que estão entre $1,1$ e $1,2$. Esqueceu também os números que estão entre $1,3$ e $1,4$. Bom, continuando o racioncínio, veremos que jamais poderemos fazer uma contagem sem esquecer algum número entre os outros. Portanto, um conjunto com esta caracteristica é não-enumerável.

2 . Prove que todo subconjunto de um conjunto finito é finito;

Solução

Vamos denotar por X o conjunto e Y o subconjunto. Se $X = \emptyset$ ou X possui um único elemento, é claro que $Y \subset X$ será vazio ou possuirá um único elemento, assim Y é finito. Se X possui n elementos e $Y \subset X$ com $Y = X$, Y é finito. Se X possui $n + 1$ elementos e $Y = X$, Y é finito, mas se $Y \neq X$, tome $a \in X$ com $a \notin Y$. Assim, teremos $Y \subset X - \{a\}$ possui n elementos, consequentemente Y é finito. ■

3 . Prove que o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável;

Solução

Por hipótese X e Y são enumeráveis então, pela definição de conjunto enumerável existem bijeções $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ e $g : \mathbb{N} \longrightarrow Y$. Logo, a ufnção $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X \times Y$ definida por $h(m, n) = (f(m), g(n))$ é, pelo menos sobrejetiva. SEndo assim, só nos resta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isto, tome uma função $j : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $j(m, n) = 2^m \cdot 3^n$ e mostremos que j é uma bijeção. Como h é sobrejetiva então j é sobrejetiva também. Nos falta mostrar que j é injetiva. Veja que $j(m, n) = 2^m \cdot 3^n$, m será sempre diferente de n, pois a decomposição em fatores primos é única. Logo, j é bijeçao e, cosequentemente o produto cartesiano requerido é enumerável. ■

4 . Prove que $\mathbb{Z}$ é infinito;

Solução

A função $f : I_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ é sobrejetiva, mas nunca injetiva. Logo, não teremos a bijeção. Assim, $\mathbb{Z}$ é infinito.

1.4 Seminário 4 - Corpo

Este seminário foi apresentado em 13 de junho de 2018 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé. Para estudar mais veja [8] e [12].

(a) Defina as propriedades de corpo;

Solução

Para que um conjunto seja considerado um corpo ele precisa satisfazer as seguintes propriedades:

i Comutativa da soma: $a + b = b + a$.

ii Associativa da soma: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

iii Associativa do produto: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

iv Distributiva à direita: $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Distributiva à esquerda: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

v Elemento neutro do produto: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

vi Comutativa do produto : $a \cdot b = b \cdot a$.

vii . Elemento inverso aditivo: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

viii . Elemento neutro da soma: $a + 0 = 0 + a = a$.

ix . O produto de dois elementos não-nulos é um elemento não-nulo: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

x . Invesro multiplicativo:$a \cdot (a)^{-1} = (a)^{-1} \cdot a = 1$.

Os conjunto $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos. Todos eles satisfazem essas dez propriedades.

(b) Use o fato de que o trinômio do segundo grau $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + \lambda y_i)^2$ é $\geqslant 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Solução

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant f(\lambda) &= \sum_{1=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^2 \\
&= \sum_{1=1}^{n} (x_i^2 + 2\lambda x_i y_i + \lambda^2 y_i^2) \\
&= \sum_{1=1}^{n} x_i^2 + \lambda 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.
\end{aligned}
$$

Daí

$$
\sum_{1=1}^{n} x_i^2 + \lambda 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geqslant 0
$$

Faça $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = a$, $2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = b$ e $\sum_{1=1}^{n} x_i^2 = c$. Assim, $a\lambda^2 + b\lambda + c \geqslant 0$, isto é, $\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0$ ou $b^2 \leqslant 4ac$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 &\leqslant 4\left(\sum_{1=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \Leftrightarrow \\
4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 &\leqslant 4\left(\sum_{1=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \Leftrightarrow \\
\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 &\leqslant \left(\sum_{1=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

(c) Dê exemplo de conjuntos que não são corpos;

Solução

Para que um conjunto não seja *corpo* basta que ele deixe de satisfazer qualquer uma das dez propriedades do item anterior. Veja que o conjunto $\mathbb{N}$ do números naturais não satisfaz a propriedade [vii] do elemento inverso aditivo: $a + (-a) = (-a) + a = 0$, pois em $\mathbb{N}$ não se tem número negativo, logo $\mathbb{N}$ não é corpo. Também o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros não satisfaz a propriedade [x] inverso multiplicativo: $a \cdot (a)^{-1} = (a)^{-1} \cdot a = 1$, pois em $\mathbb{Z}$ não se tem fração nem potência em -1, logo não podemos inveter números. Assim, $\mathbb{Z}$ não é um corpo.

1.5 Seminário 5 - Corpo ordenado

Este seminário foi apresentado em 24 de agosto de 2018 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé. Veja [11] e [12].

(a) Defina as propriedades que caracterizam o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como um corpo ordenado.

Solução

Dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado é dizer que dentro deste conjunto existe uma ordem, ou seja, existem elementos que são maiores e/ou menores que outros. Por exemplo, $2 < 5$. Isso não ocorre em $\mathbb{C}$, isto é, dados dois números complexos z_1 e z_2 não se pode dizer que $z_1 > z_2$ ou que $z_1 < z_2$. Pois bem, vejamos aqui as propriedaes que fazem de $\mathbb{R}$ um corpo ordenado. Pode ser que em livros diversos você encontre estas propriedades escritas separadamente ou de maneira diferente, mas a essência é a mesma.

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$

P1 . Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

P2 . Tricotomia: dados $x, y \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.

P3 . Monotonicidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + y < y + z$.

P4 . Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então, para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$. Se $z < 0$ então $x < y$ implica em $yz < xz$.

Com estas propriedades fica estabelecida a ordem dentro do conjunto dos números reais.

(b) Prove a *desigualdade de Bermoulli* e a *desigualdade triangular*.

Solução

A Desigualdade de Bernoulli $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx, \forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant -1$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, é um dos resutados clássicos das propriedades dos números reais e, tambem dos números naturais. A demonstração é feita por indução.

Solução

usaremos os passos da Induçao

i. Para n=1, tem-se a veracidade

$$(1+x)^1 \geqslant 1+1x.$$

ii. Supomha que valha para $n=k$ (Hipótese de Indução), isto é,

$$(1+x)^k \geqslant 1+kx.$$

iii. Queremosmostrar que vale para $n=k+1$, isto é,

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) = 1+x+kx+kx^2 \Leftrightarrow \\
(1+x)^{k+1} &\geqslant 1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x \Leftrightarrow \\
(1+x)^{k+1} &\geqslant 1+(k+1)x,
\end{aligned}$$

pois $kx^2 \geqslant 0$.■

A desigualdade triangular $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ é usada em várias áreas da matemática. É um grande clássico das desigualdades. A demonstração dela é feita de várias maneiras. Aqui faremos usando as identidades de módulo, pois achamos assim conveniente. Note que $|x| \geqslant x$ e $|y| \geqslant y$. Somando membro a membro vem $|x|+|y| \geqslant x+y$. Fazendo o memso procedimento com $|x| \geqslant -x$ e $|y| \geqslant -y$ resulta em $|x|+|y| \geqslant -(x+y)$. Agora basta tomar $|x|+|y| \geqslant |x+y| = \max\{x+y, -(x+y)\}$, isto é, $|x|+|y| \geqslant |x|+|y|$. ■

1.6 Seminário 6 - Corpo ordenado completo

Este seminário foi apresentado em 10 de setembro de 2018 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé. Para estudar mais sobre este assunto veja [11] e [12].

(a) Defina conjunto limitado.

Solução

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant b$ para todo $x \in X$. Ou seja, o número b é maior que qualquer elemento do conjunto X. O elemento b recebe um nome especial, ele é chamado de cota superior do conjunto X, não é obrigatório que b pertença a X. Usando o mesmo raciocínio dizemos que o conjunto X é limitado inferiormente quando existe um número $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leqslant x$ para todo $x \in X$. Ou seja, o número a é menor que todos os elemento do conjunto X. O elemento a recebe um nome especial, ele é chamado de cota inferior do conjunto X, não é obrigatório que a pertença a X. Se um conjunto tiver estas duas características, ou seja, se X é limitado inferiormente e superiormente, então X é limitado. Dizer que o conjunto X é limitado é dizer que X está contido em um intervalo limitado por ambos os lados $[a, b]$.

(b) Defina *supremo* e *ínfimo* de um conjunto.

Solução

Vamos definir *supremo* de um conjunto X, denota-se por $\sup X$. Para que o número $b \in \mathbb{R}$ seja supremo de X é necessário que para todo $x \in X$, tem-se $x \leqslant b$, o *supremo* é a menor das cotas superiores. Não é necessário que o *supremo* pertença ao conjunto X . Para que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tenha supremo é necessário que X seja limitado superiormente. Usando o mesmo raciocínio, vamos definir *ínfimo* de um conjunto X, denota-se por $\inf X$. Para que o número $a \in \mathbb{R}$ seja ínfimo de X é necessário que para todo $x \in X$, tem-se $a \leqslant x$, o *ínfimo* é a maior das cotas inferiores. Não é necessário que o *ínfimo* pertença ao conjunto X . Para que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tenha ínfimo é necessário que X seja limitado inferiormente.

Veja os casos abaixo:

i. $X = \{x \in \mathbb{R}; 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, o número 2 é ínfimo do conjunto X e $2 \in X$. O número 5 é supremo do conjunto X e $5 \in X$. O número 5 é o maior elemento de X por isso é também chamado de *máximo*. O número 2 é o menor elemento de X por isso é também chamado de *mínimo*.

ii. $Y = \{x \in \mathbb{R}; 2 < x < 5\}$, o número 2 é ínfimo do conjunto Y e $2 \notin Y$. O número 5 é supremo do conjunto Y e $5 \notin Y$. O conjunto Y não possui maior e nem menor elemento, logo não tem máximo e nem mínino.

(c) Justifique o fato de o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais ser um *corpo ordenado completo*.

Solução

Dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado copleto significa que todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo. Esta característica somente o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais possui.

(d) Dadas funcões $f, g : X \to \mathbb{R}$ limitadas superiormente, prove que

(a) A soma $f + g : X \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente, onde $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

(b) $\sup(f + g) \leqslant \sup(f) + \sup(g)$.

Solução

Demonstração do item a). A função f é limitada superiormente, então existe $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant k_1$, $\forall x \in X$. A função g é limitada superiormente, então existe $k_2 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \leqslant k_2$, $\forall x \in X$. Assim, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leqslant k_1 + k_2$, $\forall x \in X$, ou seja, $(f + g)(x) \leqslant k$, $\forall x \in X$, onde $k = k_1 + k_2$. Logo $(f + g)$ é limitada superiormente.

Demonstração do item b). Primeiramente veja que $f \leqslant \sup(f)$ e $g \leqslant \sup(g)$, somando membro a membro temos $(f + g) \leqslant \sup(f) + \sup(g)$. Isto significa que $\sup(f) + \sup(g)$ é uma cota superior de $(f + g)$. Por outro lado veja que $(f + g) \leqslant \sup(f + g)$, Como $\sup(f + g)$ é a menor das cotas superiores de $(f + g)$, então $\sup(f + g) \leqslant \sup(f) + \sup(g)$. ■

1.7 Seminário 7 - O conjunto dos números complexos é um corpo não ordenado

Este seminário foi apresentado em 08 de outubro de 2018 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé. Para estudar mais veja [2] e [4] .

(a) Prove que o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos satisfaz as propriedades de corpo, logo é um corpo;

Solução

As propriedades de corpo são aquelas que foram abordas no Seminário 4. Ao invés de a e b use z e w, de modo que $z = x + yi$ e $w = c + di$ com x, y, c, d números reais.■

(b) Mostre que $\mathbb{C}$ não é um corpo ordenado;

Solução

O corpo $\mathbb{C}$ não é ordenado. Tomando $i \in \mathbb{C}$, supondo que $\mathbb{C}$ fosse ordenado teríamos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant i \\ i \cdot 0 &\leqslant i \cdot i \\ 0 = i \cdot 0 &\leqslant i \cdot i = i^2 = -1. \end{aligned}$$

Chegamos a um absurdo, pois $-1 = -1 + 0i$ e $0 = 0 + 0i$. Isto é suficiente para mostrar a desordem de $\mathbb{C}$. Vejamos um caso curioso: suponha que

$$3 + 4i \leqslant -4 + 4i,$$

assim deveríamos ter,

$$\begin{aligned} (3 + 4i) + (4 - 4i) &\leqslant (-4 + 4i) + (4 - 4i) \Leftrightarrow \\ 3 + 4i + 4 - 4i &\leqslant -4 + 4i + 4 - 4i \Leftrightarrow \\ 7 &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Isto é um absurdo!■

1.8 Seminário 8 - Sobre a enumerabilidade

Este seminário foi apresentado em 09 de novembro de 2018 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé. Para estudar mais sobre este assunto veja [1], [5] e [11].

(a) Seja $f : X \to Y$ injetiva. Se Y é enumerável então X também é.

Solução

Por hipótese $f : X \longrightarrow Y$ é injetiva. Tome $\varphi : Y \longrightarrow N$ bijeção, assim teremos uma função composta $\varphi \circ f : X \longrightarrow C \subset \mathbb{N}$. Veja que $C \subset \mathbb{N}$ é enumerável, logo X é enumerável. ■

(b) Seja $f : X \to Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável então Y também é.

Solução

Por hipótese $f : X \to Y$ é sobrejetiva, ou seja, para cada $y \in Y$ podems escolher $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Tomando uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ com $x = g(y)$, tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Isto mostra que g é injetiva. Como g é injetiva, pelo item (a) Y é enumerável. ■

(c) Prove que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.

Solução

Já temos que $\mathbb{Z}$ é enumerável e $\mathbb{Z} - \{0\}$ também é enumerável. Logo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ é enumerável, pois já mostramos no Seminário 3 que o produto cartesianso de dois conjuntos enumeráveis é enumerável. Agora, tomemos uma função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida por $f(m, n) = \dfrac{m}{n}$ é sobrejetiva. Assim, pelo item (b), $\mathbb{Q}$ é enumerável. ■

(d) Prove que o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros é enumerável.

Solução Para que $\mathbb{Z}$ seja enumerável é necessário que exista uma função bijetiva dos natirais nos inteiros. Considere a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por $f(n) = \dfrac{(n-1)}{2}$ para n ímpar e $f(n) = \dfrac{-n}{2}$ para n par. Note que f é uma bijeção, logo $\mathbb{Z}$ é enumerável. ■

(e) Prove que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.

Solução

Precisamos mostrar que não se tem $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que seja bijeção. para isto seja f uma função e considere uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$ de intervalos liitdos e fechados tais que $f(n) \notin I_n$. Existe um número c que petence a todos os intervalos I_n, ou seja $c \in \bigcap I_n$, em outras palavras $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isto, nenhum dos valores $f(n)$ pode ser igual a c, logo f não pode ser sobrejetiva. Portanto, não é bijeção e, $\mathbb{R}$ não é enumerável. ■

Capítulo 2

Sequências e noções de topologia na reta

Estudaremos neste capítulo algumas propriedades e definições de sequências de números reais, alguns teoremas importantes, também algumas propriedades topológicas de subconjuntos da reta. O conjunto dos números reais é o mais frequentemente utilizado, por isso o mais importante. O texto apresentado aqui é de linguagem bastante acessível, a intenção é mostrar os resultados dos seminários realizados pelo acadêmicos. Para um aprofundamento do assunto veja [1], [10], [11] e [12].

2.1 Seminário 9 - Sequências

Este seminário foi apresentado em 07 dedezembro de 2018 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé. O estudo das sequências é de grande importância no entendimento da resolução de problemas relacionados ao comportamento de funções, principalmente nos limites. Essa utilidade é ampla tanto na reta $\mathbb{R}$ como em $\mathbb{R}^n$. Trataremos aqui de alguns resultados apresentados no seminário.

1. Defina sequência de números reais.

   Solução

   Uma sequência de númeos reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real $x(n)$ que é o n-ésimo termo da sequência, isto é $\{x_1, x_2, ...x_n, ...\}$ e denotamos por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_1, x_2, ...x_n, ...)$ ou simplesmente (x_n) para reprensentar sequências de números reais.

2. Defina subsequência.

   Solução

   No estudo das sequências existem as subsequências que são sequências dentro de sequências. Se uma sequência é denotada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ então uma subsequência é denotada por $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

3. Dê exemplo de sequência e subsequência.

   Solução

   $x_n = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...)$ é uma sequência de números reais. Uma subsequência seria $x_{2n} = (2, 4, 6, 8, ...)$ e também $x_{2n-1} = (1, 3, 5, 7, ...)$.

4. Defina limite de uma sequência.

   Solução

   O número real a é limite de uma sequência x_n se dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existir um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ implique em $|x_n - a| < \varepsilon$, simbolicamente escrevemos

   $$\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

   Quando o $\lim x_n = a$ existe dizemos que a sequência x_n converge para a ou que x_n é uma sequência convergente, caso contrário, x_n é uma sequência divergente. Se $\lim x_n = a$ e $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de x_n então também se tem $\lim(x_{n_k}) = a$

5. Sequência de Cauchy.

   Solução

   Uma sequência x_n é chamada sequência de Cauchy se dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implique em $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Ou seja, para que uma sequência x_n seja de Cauchy é necessário e suficiente que para m, n suficientemente grandes os termos x_m e x_n estejam próximos um do outro a uma distância menor do que ε

2.2 Seminário 10 - Teoremas sobre sequências

Este seminário foi apresentado em 21 de dezembro de 2018 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé. Neste seminário provamos apenas três teoremas sobre sequências, pois assim julgamos conveniente.

1. *Teorema*(*Unicidade do Limite*): Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$ então $a = b$.

   Demonstração. Considere que se tenha $\lim x_n = a$ e seja $b \in \mathbb{R}$ com $a \neq b$. Os intervalos $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sao disjuntos para algum $\varepsilon > 0$, isto é $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \emptyset$. Como, por hipótese, $\lim x_n = a$, pela definição de limite, tem-se $|x_n - a| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ então $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $x_n \notin (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Logo não se tem $\lim x_n = b$. ■

2. *Teorema*(*de Bolzano-Weierstrass*): Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

   Demonstração. Seja x_n uma sequência limitada, isto é $x_n \leqslant k$, $k \in \mathbb{R}$. Considere $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto de todos os índices n tais que x_n é um termo destacado, isto é, $x_n \geqslant x_p$ com $p > n$. Se $D = \{n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ...\}$ for um conjunto infinito, então a subsequência $(x_{n_k})_{n_k \in D}$ será monótona não-crescente. No entanto, se D for finito, seja n_1 maior que todos os índices n. Então x_{n_1} não é destacado. Logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez x_{n_2} não é destacado. Logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Assim, x_{n_3} não é destacado, logo existe $n_4 > n_3$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < x_{n_4}$. Prosseguindo assim obteremos uma subsequência crescente $(x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < x_{n_4} ... < x_{n_k} ...)$ convergente. ■

3. *Teorema do Sanduíche*: Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ para todo n suficientemente grande então $\lim z_n = a$.

   Demonstração. Por hipótese, $\lim x_n = a$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1$ implica em $|x_n - a| < \varepsilon$, ou seja, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Analogamente se $\lim y_n = a$, então existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2$ implica em $|y_n - a| < \varepsilon$, isto é, $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ para $n > n_0$ temos

   $$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon.$$

   Logo $\lim z_n = a$. ■

2.3 Seminário 11 - Conjuntos Abertos

Este seminário foi apresentado em 06 de março de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé.

1. O que é topologia?

   Solução. Topologia é uma ramo da matemática onde se estuda noções de limite, de continuidade e as ideias relacionadas.

2. Defina conjunto aberto.

   Solução. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto da reta. Um ponto a é interior ao conjunto X se existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq X$. O conjunto de todos os pontos interiores ao conjunto X é denotado por int$X$ e chamado de interior de X. Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é chamado de *conjunto aberto* se todos os seus pontos são interiores.

   O conjunto vazio $\emptyset$ e a reta $\mathbb{R}$ são conjuntos abertos.

3. *Teorema*: Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos então a interseção $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.

   Demonstração. Seja $x \in A_1 \cap A_2$. Por hipótese A_1 e A_2 são conjuntos abertos e, pela definição existem $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tais que $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subseteq A_1$ e $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq A_2$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ tem-se $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_1$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_2$, isto implica em $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_1 \cap A_2$. logo $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.$\blacksquare$

2.4 Seminário 12 - Conjuntos Fechados

Este seminário foi apresentado em 22 de março de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé.

1. Defina conjunto fechado.

   Solução. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto da reta. Um ponto a é aderente a X se a é limite de alguma sequência de pontos (x_n) de X. Topo ponto a é aderente a X, para isto basta tomar $(x_n) = a$. Mas pode-se ter casos em que a é aderente a X sem que a pertença a X, por exemplo seja $X = (0, \infty)$, veja que $0 \notin X$, mas $0 = \lim \frac{1}{n}$, com $x_n = \frac{1}{n} \in X$. conjunto de todos os pontos aderentes a X é chamado de o fecho de X e é denotado por $\overline{X}$. Um conjunto X é chamado de *conjunto fechado* se $X = \overline{X}$, isto é, todo ponto aderente a X pertence a X. Para que um ponto a seja aderente ao conjunto X é necessário e suficiente que dado $\varepsilon > 0$, o intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$, ou seja, uma vizinhança V_ε de a contém uma infinidade de pontos de X.

O conjunto vazio $\emptyset$ e a reta $\mathbb{R}$ são conjuntos fechados.

2. Um conjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.

   Demonstração. Suponha F fechado e tome $x \in F^c$, neste caso $x \notin F$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Portanto, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq F^c$, logo $F^c = \mathbb{R} - F$ é aberto. Reciprocamente, suponha que $F^c = \mathbb{R} - F$ seja aberto e tome x um ponto aderente a F, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Sendo assim, x não é interior a F^c, portanto $x \notin F^c$ e, necessariamente $x \in F$. Logo F é fechado.■

3. *Teorema*: Se F_1 e F_2 são conjuntos fechados então $F_1 \cup F_2$ é um conjunto fechado.

   Demonstração. Por hipótese, F_1 e F_2 são conjuntos fechados, então os complementares $F_1^c = \mathbb{R} - F_1$ e $F_2^c = \mathbb{R} - F_2$ são conjuntos abertos. Ora, a interseçao finita de conjuntos aberto é um conjunto aberto. Assim, $F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c$ é um conjunto aberto. Logo seu complementar $(F_1 \cup F_2)$ é um conjunto fechado.■

4. Defina cisão.

   Solução. Uma cisão de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é uma decomposiçao por meio de união, ou seja, escreve-se $X = A \cup B$ de tal forma que A e B são disjuntos e $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $B \cap \overline{A} = \emptyset$. Isto significa que nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A. Existe uma decomposição de X que pode ser feita com a união de X com o conjunto vazio, isto é, $X = X \cup \emptyset$, é o que chamamos de *cisão trivial*. Quando se trata de intervalos da reta, só é possível ocorrer a cisão trivial.

2.5 Seminário 13 - Ponto de acumulação

Este seminário foi apresentado em 19 de abril de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé

1. Defina ponto de acumulação.

   Solução. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto da reta. Um ponto a é chamado de ponto de acumulação do conjunto X se toda vizinhança V_ε de a possui uma infinidade de pontos de $X - \{a\}$, ou seja, uma infinidade de pontos de X diferentes do prórpio a.

Isto é, dado $\varepsilon > 0$ tem-se $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. O conjunto dos pontos de acumulação do conjunto X é chamado de derivado de X e denotado por X'. Assim $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$. Se a não é ponto de acumulação de X então a é chamado de ponto isolado. Um conjunto cujos pontos são todos isolados é chamado de conjunto discreto.

2. Justifique o fato de o conjunto $\mathbb{Z}$ ser discreto.

   Solução. O conjunto $\mathbb{Z}$ possui apenas pontos isolados. Isto significa que em $\mathbb{Z}$ não há ponto com vizinhança. Em outras palavras, os pontos de $\mathbb{Z}$ são todos distantes uns dos outros. $\mathbb{Z}$ não possui ponto de acumulação. Assim, $\mathbb{Z}$ é um conjunto discreto.

2.6 Seminário 14 - Teorema de Borel-Lebesgue

Este seminário foi apresentado em 23 de maio de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé e de Eirunepé. Neste seminário optamos apenas por provar o teorema de Borel-Lebesgue.

Cobertura. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto da reta. Uma *cobertura* do conjunto X é uma família $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é, para todo $x \in X$ existe $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$. Uma *subcobertura* do conjunto X é uma subfamília $C' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, $L' \subseteq L$ tal que ainda se tem $X \subseteq \bigcup C_\lambda$. Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é limitado superiormente se dado $k \in \mathbb{R}$ se tem $x \leqslant k$ para todo $x \in X$ e, analogamente X é limitado inferiorente se $k \leqslant x$mpara todo $x \in X$. O conjunto X é limitado quando é limitado superior e inferiormente.

Teorema de Borel-Lebesgue . Seja $F \subseteq$ um conjunto limitado e fechado. Toda cobertura $F \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de F por meio de abertos possui uma subcobertura finita

$$F \subseteq A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_1} \cup ...A_{\lambda_n}.$$

Demonstração . Por hipórtese F é imitado e fechado. Portanto, $F \subseteq [a, b]$ e, seu complementar $F^c = \mathbb{R} - F$ é aberto. Daí, pode-se obter uma subcobertura finita

$$[a, b] =\subseteq A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_1} \cup ...A_{\lambda_n} \cup F^c.$$

Como nenhum ponto de F pertence a F^c, podemos escrever

$$F \subseteq [a, b] =\subseteq A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_1} \cup ...A_{\lambda_n} \cup F^c.$$

Como queríamos demonstrar.■

2.7 Seminário 15 - Conjunto compacto

Este seminário foi apresentado em 14 de junho de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé.

1. Defina conjunto compacto.

   Solução. Um conjunto X é compacto se satisfaz as seguintes condições:

   (a) X é limitado e fechado;

   (b) Toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita;

   (c) Todo subconjunto de X possui ponto de acumulação pertencente a X;

   (d) Toda sequência (x_n) de X possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente para um ponto de X.

   Um intervalo fechado $[a, b]$ da reta é um conjunto compacto. A reta $\mathbb{R}$ não é um conjunto compacto, o conjunto vazio $\emptyset$ é compacto. o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros não é compacto.

2. Fale sobre o conjunto de Cantor.

   Solução. O *conjunto de Cantor*, cujo crédito se deve ao matemático George Cantor, é um conjunto compacto. É um curioso conjunto obtido a partir da reunião de intervalos abertos do intervalo $[0, 1]$ da seguinte maneira: retira-se do interalo $[0, 1]$ seu terço médio, isto é, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, restam então $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, sem seguida retira-se destes os seus terços médios. Restam então os intervalos $\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Retira-se sucessivamente os terços médios dos intervalos restantes, o conjunto dos intervalos não retirados é o conjunto de Cantor.

Capítulo 3

Funções Contínuas e Derivadas.

Nestes seminários tratamos brevemente sobre as funções localmente contínuas, derivadas e integral(soma) de Riemann. Mostramos apenas alguns resultados básicos, pois assim julgamos conveniente para atingir o objetivo. Usamos literatura bastante popular no meio acadêmico, alguns dos livros utilizados existe na biblioteca do CEST, outros em acervo prórpio. Para aprofundar os estudos sobre este tema veja [1], [5], [10], [11] e [12] .

3.1 Seminário 16 - Funções Contínuas.

Este seminário foi apresentado em 20 de agosto de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé. Nesta ocasião os acadêmicos de Eirunepé Jhonny e Érisonjá haviam concluído o curso de graduação finalizando assim, a participação neste projeto.

1. Defina função contínua.

   Solução. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto de números reais e $f :\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que a função f é contínua num ponto $a \in X$ se, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ é possível obter um $\delta > 0$, tal que se tenha , $x \in X$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Simbolicamente, temos

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

   Dizemos que funçao f é descontínua no ponto a quando, nessas mesmas condições, e tem $|f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$.

   Em geral, uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se f é contínua em todo ponto $x \in X$. Se $a \in X'$, isto é, se a é ponto de acumulação de X, dizer que f é contínua em a significa que $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$. Por isso, dizemos que continuidade é um fenômeno local, ou seja, f é contínua em a implica em f ser contínua em toda a vizinhança de a. A fim de que f seja contínua num ponto a é necessário e suficiente que para toda sequência $(n_n) \in X$ com $\lim_n (x_n) = a$ se tenha $\lim_n f(x) = f(a)$. Tosa função polimomial $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contína. Toda função racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ é contínua. A funçao $sen(\dfrac{1}{x})$ não é contínua em $x = 0$.

2. Prove que a conposta de funções contínuas é uma função contínua.

   Solução. Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em a e $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $b = f(a) \in f(X) \subseteq Y$, com $g \circ f$ bem definida. Então $g \circ f$ também é contínua no ponto a. **Demonstração**. Por hipótese g é contínua no ponto $b = f(a)$. Assim,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; y \in Y, 0 < |y - b| < \delta \Rightarrow |g(y) - b| < \varepsilon.$$

   E também f é contínua em a. Assim,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \beta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

   Consequentemente, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, tem-se

$$x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |g(y) - g(b)| = |g(f(x)) - g(f(a))| = |g \circ f(x) - g \circ f(a)| < \varepsilon.$$

   Logo $g \circ f$ é contínua em a.■

3. Enuncie e prove o Teorema do Valor Intermediário.

   Solução. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) \leqslant d \leqslant f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

   Demonstração.

   Consideremos os conjuntos $A = \{x \in [a, b]; f(x) \leqslant d\}$ e $B = \{x \in [a, b]; f(x) \geqslant d\}$ com $A \cap B = \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B}$. Como A e B são fechados e, além disso, $A \cup B = [a, b]$, temos duas alternativas. Se $A \cap B \neq \emptyset$ existe $c \in (a, b)$ e, para todo c tem-se $f(c) = d$. Se $A \cap B = \emptyset$ temos uma cisão do intervalo $[a, b]$ que é uma contradição, pois intervalos da reta só admitem a cisão trivial. Logo, necessariamente é $A \cap B \neq \emptyset$ e $f(c) = f$.■

4. Enuncie e prove o Teorema de Weierstrass.

   Solução. Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ com f contínua e X compacto.Então f atinge seu valor de máximo e seu valor de mínimo, isto é, existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$ para todo $x \in X$.

Demonstação. Como X é compacto e f é contínua, o conjunto imagem $f(X)$ é compacto, assim existem pontos $y_0 \in f(X)$ com $y_0 = \inf f(X)$ e $y_1 \in f(X)$ com $y_1 = \sup f(X)$. Pela continuidade de f existem $x_0, x_1 \in X$ com $y_0 = f(x_0) = \inf f(X)$ e $y_1 = f(x_1) = \inf f(X)$, logo

$$f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$$

para todo $x \in X$. ■

3.2 Seminário 17 - Função derivável.

Este seminário foi apresentado em 20 de setembro de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé.

1. Defina função derivável.

   Solução. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $a \in X \cap X'$ um ponto de acumulação de X pertencente a X. Diremos que a função f é derivável no ponto a se o limite

   $$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

   existir. Caso o limite exista, $f'(a)$ é chamada *a derivada* de f no ponto a. A reta que passa pelo ponto $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^2$ é chamada de reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação $f'(a)$. Veja que fazendo $h = x - a$ no limite acima, temos $x = a + h$ e, escrevemos

   $$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

   que também expressa a derivada de f no ponto a.

2. Prove o teorema: Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a então f é contínua em a.

   Demonstação. Por hipótese, f é derivável em a, então vale

   $$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Portanto, vale também o limite

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.(x-a)\\
&= \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\lim_{x\longrightarrow a}(x-a)\\
&= 0. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Isto significa que $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = f(a)$. Logo f é contínua.

3. Prove o teorema (*Regras de derivação*). Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se f e g são deriváveis em a então $(f \pm g), (f.g)$ e $\dfrac{f}{g}$ também são deriváveis e valem

   i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ e $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$;

   ii) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$;

   iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}$.

   Demonstação.

   Em $i)$ temos

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\
&= f'(a)+g'(a)
\end{aligned}
$$

   Analogamente, temos

$$
\begin{aligned}
(f-g)'(a) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{(f-g)(a+h)-(f-g)(a)}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(a+h)-g(a+h)-f(a)+g(a)}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\
&= f'(a)-g'(a).
\end{aligned}
$$

   Em $ii)$ temos

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{(f.g)(a+h)-(f.g)(a)}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(a+h).g(a+h)-f(a).g(a)}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(a+h).g(a+h)-f(a+h).g(a)+f(a+h).g(a)-f(a).g(a)}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\left(\frac{f(a+h)\left[g(a+h)-g(a)\right]+g(a)\left[f(a+h)-f(a)\right]}{h}\right)\\
&= f(a+h)\cdot\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+g(a)\cdot\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\
&= f(a).g'(a)+f'(a).g(a).
\end{aligned}
$$

Em iii) temos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left[\left(\frac{f}{g}\right)(a+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)\right]\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right]\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\frac{f(a+h)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(a+h)}{g(a+h)\cdot g(a)}\right]\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\frac{f(a+h)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(a+h)}{g(a+h)\cdot g(a)}\right]\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{[f(a+h)-f(a)]\cdot g(a)-f(a)\cdot[g(a+h)-g(a)]}{g(a+h)\cdot g(a)}\right\}.\\
&= \frac{g(a)\cdot\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f(a)\cdot\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}{g(a)\cdot g(a)}\\
&= \frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}.
\end{aligned}
$$

Como queríamos demonstrar.

4. Prove o teorema (*Regra da Cadeia*).

   Demonstação. Sejam $X\subseteq\mathbb{R}$, $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$, $g:Y\longrightarrow\mathbb{R}$ e $a\in X\cap X'$, com $b=f(a)$ e $f(X)\subseteq Y$. Se $f'(a)$ e $g'(b)$ existem, então $g\circ f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ é derivável em a e vale $(g\circ f)'(a)=g'(b)\cdot f'(a)=g'(f(a))\cdot f(a)$. **Demonstação**.

   Já temos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Leftrightarrow\\
f(x)-f(a) &= f'(a)(x-a)+\varepsilon_1(x)\Leftrightarrow\\
f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon_1(x),\text{ com }\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\varepsilon_1(x)}{x-a}=0.
\end{aligned}
$$

Assim, escrevemos

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x)-f(a)) + \varepsilon_2(f(x)), \text{ com } \lim_{f(x)\longrightarrow f(a)} \frac{\varepsilon_2 f(x)}{f(x)-f(a)} = 0\\
g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))\left[f'(a)(x-a)+\varepsilon_1(x)\right] + \varepsilon_2(f(x))\\
g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))\cdot f'(a)(x-a) + g'(f(a))\cdot\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(f(x)).
\end{aligned}$$

Ponhamos $\varepsilon(x) = g'(f(a))\cdot\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(f(x))$ e escrevemos

$$g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))\cdot f'(a)(x-a) + \varepsilon(x), \text{ com } \lim_{x\longrightarrow a}\frac{\varepsilon(x)}{x-a} = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\varepsilon(x)}{x-a} &= \lim_{x\longrightarrow a}\frac{g'(f(a))\varepsilon_1(x)}{x-a} + \lim_{x\longrightarrow a}\frac{\varepsilon_2(f(x))}{x-a}\\
&= 0 + \lim_{x\longrightarrow a}\frac{\varepsilon_2(f(x))\cdot[f(x)-f(a)]}{[f(x)-f(a)]\,(x-a)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow a}\frac{\varepsilon_2(f(x))}{f(x)-f(a)}\cdot\lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))\cdot f'(a)(x-a)$, ou seja,

$$g'(f(a))\cdot f'(a) = \lim_{x\longrightarrow a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = (g\circ f)'(a),$$

finalmente,

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a).$$

Como queríamos demonstrar.

3.3 Seminário 18 - Três teoremas sobre derivadas.

Este seminário foi apresentado em 17 de outubro de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé.

1. Prove o teorema (*Derivada da Função Inversa*).

   Solução. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow Y$ uma funçao que possui inversa $g = f^{-1} : Y \longrightarrow X$ Se $f'(a)$ existe e g é contínua em $b = f(a)$, então g é derivável em b se, e somente se $f'(a) \neq 0$. No caso afirmativo tem-se $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

   Demonstação. Por hipótese g é contínua em b. Assim, dado $y \in Y$ temos $\lim_{y\longrightarrow b} g(y) = g(b)$.

Note que $g(y) \neq a$, $g(b) = a$, $f(g(y)) = y$, $f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)}$ e ainda $\dfrac{1}{f'(a)} = \lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)}$.
Logo,

$$g'(b) = \lim_{y \longrightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{(y - b)} = \lim_{y \longrightarrow b} \frac{g(y) - a}{f(g(y)) - f(a)}.$$

2. Prove o (*Teorema de Rolle*).

   Solução.Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contína com $f(b) = f(a)$. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

   Demonstação. Se f é constante, pela definiçao, tem-se $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$. Se f não é constante, pelo teorema de Weiestrass, f atinge seu máximo M e seu mínimo m, pois $[a, b]$ é compacto. Se $M = b$ e $m = a$, f constante e $f'(c) = 0$. Se forem diferentes e f atinge um desses valores, digamos c, então $f'(c) = 0$. ■

3. Prove o (*Teorema do Valor Médio (de Lagrange)*).

   Solução. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contína. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

   Demonstação. Considere a função auxiliar $g(x) = f(x) - j \cdot x$ e ponhamos $j = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Note que

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - j \cdot b \\ &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b \\ &= \frac{b \cdot f(b) - a \cdot f(b) - b \cdot f(b) + b \cdot f(a)}{b - a} \\ &= \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b - a}. \end{aligned}$$

   e também

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - j \cdot a \\ &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a \\ &= \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b) - a \cdot f(b) + a \cdot f(a)}{b - a} \\ &= \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b - a}. \end{aligned}$$

   Isto é, $g(a) = g(b)$. Portanto, g satisfaz o teorema de Rolle e, vale $g'(c) = 0$. Assim,

$$g'(c) = f'(c) - j = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como queríamos demonstrar.

3.4 Seminário 19 - Teorema Fundamental do Cálculo.

Este seminário foi apresentado em 07 de novembro de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé. O Teorema Fundamentla do Cálculo estabelece uma relação entre a derivada e a integral de uma funçao f. Destaca-se como um ds mais bels teorema do cálculo diferencial integral.

(*Teorema Fundamental do Cálculo*). Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguinteds afirmações sobre a função $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes

i) F é uma integral indefinida de f, isto é, dado $a \in I$ tem-se $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

ii) F é uma primitiva de f, ou seja, $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. De fato, $i) \Rightarrow ii)$, suponha que $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Sejam $x_0, x_0 + h \in I$, temos

1) $F(x_0 + h) - F(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$.

2) $h \cdot f(x_0) \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt$.

Subtraindo membro a membro, obtemos

$$F(x_0 + h) - F(x_0) - h \cdot f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt,$$

isto implica em

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt.$$

Pela continuidade de f, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, $x_0, h \in I$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < 0$$

Assim, dados $x_0, x_0 + h \in I$ com $0 < |h| < \delta$ implicam em

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &\leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |(f(t) - f(x_0))|dt \\ &\leqslant \frac{1}{h} \cdot |h| \cdot \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $F'(x_0) = f(x_0)$.

Também $ii) \Rightarrow i)$, reciprocamente suponha $F'(x_0) = f(x_0)$ uma primitica de $f(x)$. Considere a função $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. F e G são ambas primitivas de f diferindo apenas por uma constante, isto é,

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + G(x) \\ &= F(a) + \int_a^x f(t)dt \\ \int_a^x f(t)dt &= F(x) - F(a). \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Capítulo 4

Espaços

Nesta seção trataremos de alguns espaços bem conhecidos no meio acadêmico. Alguns deles não são tratados nos conteúdos e nas bibliografias do curso de graduação, no entanto é interessante que os acadêmicos tenham conhecimento da existência deles. O texto abordado é bastante acessível e a linguagem altamente compreensível. Os pré requisitos para estudar estes espaços são apenas os conhecimentos de espaços vetoriais.

4.1 Seminário 20 - Espaços Vetoriais

Este seminário foi apresentado em 14 de novembro de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé. Nos limitamos a falar brevemente da definição e de algumas propriedades peculiares dos espaços vetoriais. Não comentamos de base, dimensão e nem de mudança de base, deixamos estes subtemas para outra ocasião. Sabems que Álgebra Linear é um curso que pode durar mais de um semestre. Para estudar mais sobre o assunto veja [3] e [14] .

1. Defina espaço vetorial.

   Solução. Um espaço vetorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$, que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, é um conjunto cujos elementos são chamados de vetores e representados por letras minúsculas do alfabeto latino em negrito ou com uma seta sobrescrita. Por exemplo, $\mathbf{v}$ou$\vec{v}$. Um conjunto E é um espçao veorial no qual estõ definidas as operações de soma e multipicaçõ por escalar

   i) $\vec{u}, \vec{v} \in \mathsf{E}$, tem-se $u \vec{+} v \in \mathsf{E}$

ii) $\vec{u} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, tem-se $\alpha\vec{u} \in E$

Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ estas operações devem satisfazer os seguintes axiomas:

(a) Comutatividade : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

(b) Associativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$. e $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

(c) Inverso aditivo: $\vec{u} + (-\vec{u}) = (\vec{-u}) + \vec{u}$.

(d) Vetor nulo : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

(e) Multiplicação por 1: $1 \cdot u = u \cdot 1 = \vec{u}$.

(f) Distributividade: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ e também $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.

2. Dê exemplos de espaços vetoriais. **Solução**.

1) O espaço euclidiano n-dimensional denotado por $\mathbb{R}^n$ munido das operações de adição e multiplicação por escalar é um espaço vetorial.

2) O espaço $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ das matrizes reais com n linhas e m colunas munido das operações de soma e multiplicação por escalar é um espaço vetorial.

3) O espaço $F(X : \mathbb{R})$ das funções $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ reais de variável real, munido das operações de soma e multiplicação por escalar é um espçao vetorial.

4.2 Seminário 21 - Espaços Métricos

Este seminário foi apresentado em 11 de dezembro de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé. A maneira mais natural de verificar qual de dois pontos x e y pertencentes a um conunto X, está mais próximo de um ponto $a \in X$ é medir as distâncias de x e y ao ponto a. Para realizarmos esse procedimento precisamos ter a noção de distância. Os conjuntos onde faz sentido falar na distânca entre dois pontos são denominados espaços métricos. Os espaços topológicos (tratados no seminário 23) são espaços métricos. A maioria dos espaços topológicos encontrados na matemática vem munido de uma métrica. Falaremos agora um pouco sobre espaços métricos. Para estudar mais sobre o assunto veja [10] e [13].

1. Defina métrica. Uma métrica num conjunto M é uma função que chamaremos de $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de pontos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado de a *distância* doponto x ao ponto y, de tal modo que :

   (a) $d(x, x) = 0$, $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

   (b) $d(x, y) = d(y, x)$;

   (c) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

2. Defina espaço métrico.

   Espaço métrico é um par (M, d) formado por um conjunto M e uma métrica d em M.

3. Dê exemplo de espaço métrico.

   O exemplo mais importante de um espaço métrico é, sem dúvida, o conjunto $\mathbb{R}$ dos úmeros reais munido da métrica $d(x, y) = |x - y|$ que é igual ao valor absoluto da diferença $x - y$. Outro exemplo de espaço métrico é o *Plano Cartesiano* denotado por $\mathbb{R}^2$, isto é, o conjunto de todos os pares ordenados $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$ de números reais, neste caso a métrica é definida por

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

   Em $\mathbb{R}^n$ seria

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

4.3 Seminário 22 - Espaços Normados

Este seminário foi apresentado em 18 de dezembro de 2019 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé.

Nos espaços vetoriais somamos seus elementos e multiplicamos por escalares, em espaços métricos sabemos calcular a distância entre dois de seus elementos. O espaço normado é o ambiente emque todas essas operações podem ser feitas. No espaço normado sempre teremos uma norma a ser usada. Para estudar mais sobre o assunto veja [3], [15] e [17].

1. Defina módulo ou valor absoluto.

   Solução

   Dado um corpo $\mathbb{K}$ a função módulo ou valor absoluto

   $$a \in \mathbb{K} \longmapsto |a| \in \mathbb{R}$$

   satisfaz as seguints condições:

   (a) $|a| \geqslant 0$ para tod a e $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

   (b) $|a.b| = |a|.|b|$ para todo a e b.

   (c) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

   O número $|a - b|$ é entendido cmo sendo a distâncoa entre a e b. O valor abosoluto ou módulo é sempre interpretado como um número positivo.

2. Defina norma e dê um exemplo.

   Solução

   Qualque função que reproduza as condições estabelecidas na definição de módulo ou valor absoluto serve para introduzir a noção de distância. Norma é uma distância. Em um espaço vetorial é comum chamarmos seus elementos de v, já que são vetores, nesta notação vamos denotar o vetor por x e ou y. Seja E um espaço vetorial, uma função

   $$|| \cdot || \longrightarrow \mathbb{R}$$

   é uma norma se as seguites propriedades forem satisfeitas:

   n1 . $||x|| \geqslant 0$.

   n2 . $||ax|| = |a| \cdot ||x||$ para todo escalar a e todo vetor $x \in E$.

   n3 . $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ para quaisque $x, y \in E$.

   Norma é uma ferramenta de referência que se usa para medir a distância entre elementos de um espaço. Por exemplo, na reta $\mathbb{R}$ a referência que se usa para saber a distância entre dois pontos é o módulo, $| \cdot |$. Portanto, o módulo é a norma em $\mathbb{R}$. Como exemplos de normas vamos citar as clássicas, ou seja, as que são usadas nos espaços $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. São elas:

Norma da soma. $||(x_1, ..., x_n)||_1 = |x_1| + ... + |x_n|$.

Norma Euclidia. $||(x_1, ..., x_n)||_2 = (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Norma do máximo. $||(x_1, ..., x_n)||_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$.

3. Defina espaço normado e dê um exemplo.

   Solução

   Um espaço vetorial munido de uma norma é chamado de um espaço vetotial normado. Em um espaço normado as operações algébricas são funções contínuas, isso as torna compatíveis com as estruturas topológicas. Por exemplo, uma se sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço normado E converge para um vetor $x \in E$ se $\lim ||x_n - x|| = 0$ e dizemos que x é o limite da sequência, $x_n \longrightarrow x$, x_n converge para x. O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial normado.

4.4 Seminário 23 - -Espaços Topológicos e Hausforff

Este seminário foi apresentado em 21 de fevereiro de 2020 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé. Para estudarmais sobre o assunto veja [3] [10] e [13].

1. Defina topologia em um conjunto.

   Solução

   Uma topologia num conjunto X é uma coleção de subconjuntos de X, denotamos por τ. Esses subconjuntos são abertos e satisfazem as seguintes condições:

   1 . X e o subconjunto vazio $\emptyset$ são abertos. Isto é, X e o conjunto vazio $\emptyset$ pertencem a τ .

   2 . A reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto. Ou seja, qualquer união de lementos de τ é um elemento de τ.

   3 . A interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto. Ou seja, Qualquer interseção finita de elementos de τ pertence a τ

2. Defina espaço topológico.

   Solução

Espaço topológico é o par (X, τ) onde X é o conjunto e τ é a topologia em X. Normalmente só se escreve espaço topológico X, não há necessidade de escrever τ, salvo em casos de risco de ambiguidade.

3. Propriedades de um espaço topológico.

   Solução

   Em um espaço topológico X valem as seguintes propriedades;

   (a) Qualquer interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado;

   (b) Qualquer união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado;

   (c) X e τ são conjuntos fechados.

   Um espaço toplógico X é dito *metrizável* se existe uma métrica em X que induz a sua topologia, ou seja, as regras da topologia se verificarão de acordo com a métrica. Os espaços topológicos mais interessantes satisfazem ainda a condição de que pontos distintos podem ser separados por abertos disjuntos. Um exemplo é o espaço de *Hausdorff*, também chamado de espaço separado. Um espaço topológico X chama-se espao de *Hausdorff* quando, dados doispontos arbitrários $x \neq y$ em X, existem abertos $A, B \subset X$ tais que $x \in A$ $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$

4.5 Seminário 24 - Espaços de Banach e Hilbert

Este seminário foi apresentado em 03 de março de 2020 aos acadêmicos do curso de matemática de Tefé. Fizemos pouca coisa sobre este tema, dado o fato da pouca familiaridade com os resultados, visto que os acadêmicos estavam ainda cursando no máximo o sexto semestre do curso. No entanto, o que fizemos ficou bem entendido e despertou o interesse dos academicos envolvidos. Pra estudar mais sobre o assunto veja [3]

1. Defina subespaço completo.

   Solução

   Um espaço E é dito completo se todas as sequências de Cauchy em E convergem para pontos que pertencem a E. Ou seja, se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em E tal que $\lim x_n = x$ então, necessariamente $x \in E$. No caso em que $x \notin E$, isto é, se o limite da sequência estiver fora do conjunto E, o espçao E não é completo. Um exemplo de um espaço completo é a reta $\mathbb{R}$ com a métrica do valor absoluto.

2. Defina espaço de Banach.

   Solução

   Já vimos um pouco sobre espaços métricos e norma, também sobre espaço normado. Com estas preliminares dizemos que um espaço normado E é chamado de *espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo com a métrica valendo a partir das regras da norma, isto é, a métrica é induzida pela norma.

3. Dê exemplo de espaço de Banach.

   Solução

   Os conjuntos $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ são espaços de Banach.

4. Defina produto interno.

   Solução Considere um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ist significa que os elementos envolvidos podem ser tanto números reais como números complexos, as propriedades anunciadas adiante já estão adaptadas para esse fim. Um produto interno é uma função, também chamada de aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

   Esta notação significa que é tomando um par de vetores (x, y) em E o seu correspondente é o número $\langle x, y \rangle$.
   Para quaisquer $x, x_1, x_2, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ valem as seguintes propriedades:

   (p1) $\langle x_1 + x_2 \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.

   (p2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

   (p3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

   (p4) Para todo $x \neq 0$, $\langle x, x \rangle$ é um número real positivo .

   O par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado de espaço com produto interno.

5. Defina espaço de Hilbert.

   Solução

Já sabemos o que é um espaço completo e, também já sabemos o que é um produto interno e uma norma. Munido dessas informações dizemos que um *espaço de Hilbert* são espaços com produto interno que são completos na norma que provém de um produto interno. Os espaços de Hilbert são também espaços de Banach. O espçao das sequências que denotamos por $\ell_2 = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty}; x_j \in \mathbb{K}, \text{para todo } j \in \mathbb{N}, \text{e} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\right\}$ é um espaço de Hilbert.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo S de Souza. Introdução à Análise Matemátoca.2.ed.rev.-Saõ Paulo: Edgar Blucher, 1999.

[2] BASTOS, Raimundo. COSTA, Eudes Antônio. Colocando ordem nos complexos. Colloquium Exactarum, v.4, n.1, Jan-Jun. 2012, p. 33-38. DOI: 105747/ce.212.v04.n1.e043.

[3] BOTELHO, Geraldo. Daniel Pellegrino e Eduardo Teixeira. Fundamentos de Análise Funcional. 2.ed.-Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[4] BROWN, JAMES WARD. REUEL, V. CHURCHILL. Variáveis complexas e aplicações. Tradução Claus Ivo Doering. 9.ed. Porto Alegre: AMGH, 2015.

[5] DOERING, Claus I. Introdução à Análise Matemática na reta. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[6] EVES, HOWARD. Introdução à história da matemática. Tradução: Higino Domingues. - Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. .

[7] FOSSA, John A. Introdução às técnicas de demonstração na matemática.2. ed.ampl.e ver.São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[8] GARCIA, Arnaldo, LEQUAIN, Yves. Elementos de Álgebra.6.ed.Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[9] LAUREDO, Aldo Trajano. OLIVEIRA, Alexandro Marinho. LIMA, O Alves. Cálculo Avançado. 2.ed. Campina Grande: EDUEPB, 2012.

[10] LIMA, ELON LAGES. Elementos de topologia geral. Textos universitários. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

[11] LIMA, ELON LAGES. Curso de análise. V.1.14.ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

[12] LIMA, ELON LAGES. Análise real, funções de uma variável. V.1.10ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA 2010.

[13] LIMA, ELON LAGES. Espaços métricos. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA 2007.

[14] LIMA, ELON LAGES. Álgebra Linear. 8.ed. Rio de Janeiro:IMPA, 2012.

[15] LIMA, ELON LAGES. Curso de análise. V.2.11.ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

[16] LIMA, ELON LAGES. Análise real, funções de n variáveis. V.2.6.ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA 2013.

[17] LIMA, Ronaldo Freire. Topologia e Análise noespaço Rn. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[18] MONTEIRO, Alexandrina. POMPEU, Geraldo. A matemática e os temas transversais. São Paulo: Moderna, 2001.

[19] MUNKRES, JAMES R. Analisys on manyfolds. The Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1990.