

**GEOMETRIA FRACTAL E POSSÍVEIS SITUAÇÕES DIDÁTICAS PARA A
FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**

Autor	Raniery Costa do Nascimento
Orientador(a)	Profa. Dra. Lucélida de Fátima Maia da Costa
Banca Examinadora	Prof. Msc. Gideão Teixeira Queiroz Prof. Bruno Lopes dos Reis
Resumo	<p>Diante das exigências atuais impostas para o ensino de matemática na Educação Básica, se torna necessário que os professores ainda na formação inicial sejam apresentados a ferramentas que os permitam realizar práticas contextualizadas e interdisciplinares. Nesse sentido, apresentamos os resultados de uma pesquisa de natureza qualitativa que utiliza como metodologia a Engenharia Didática, e tem por objetivo o desenvolvimento de uma sequência didática capaz de mobilizar conhecimentos matemáticos relacionados as noções da Geometria Fractal na perspectiva da Formação de professores de matemática. Os resultados encontrados, nos permitiram compreender as concepções dos sujeitos sobre a Geometria Fractal, contextualização no ensino de matemática e como se constitui uma engenharia didática e suas etapas.</p> <p>Palavras-chave: Engenharia Didática. Geometria Fractal. Formação de professores.</p>
Abstract	<p>Given the current demands imposed on the teaching of basic mathematics, it is necessary that teachers still in initial education present tools that allow them to perform contextualized and interdisciplinary practices. In this sense, it presents the results of a qualitative research that uses as a didactic engineering methodology, and aims to develop a didactic sequence capable of mobilizing related mathematical knowledge as notions of Geometry Fractal in the perspective of mathematics teacher education. The results allow us to understand the conceptions of the subjects about the Fractal of Geometry, contextualization in mathematics teaching and how to identify a didactic engineering and its stages.</p> <p>Keywords: Didactic engineering. Fractal geometry. Teacher training.</p>

GEOMETRIA FRACTAL E POSSÍVEIS SITUAÇÕES DIDÁTICAS PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

1 INTRODUÇÃO

Durante a experiência como Bolsista do Programa de Apoio a Iniciação Científica (PAIC), realizamos uma pesquisa voltada para as possíveis contribuições da Geometria Fractal à formação dos professores de matemática do Centro de Estudos Superiores de Parintins (CESP), onde foi possível conhecer melhor os Fractais e relacionar alguns de seus elementos básicos com os objetos matemáticos determinados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Diante do fato de que o estudo realizado no PAIC possuía apenas o interesse de verificar as contribuições da Geometria Fractal na formação inicial de professores de matemática de forma teórica, surgiu o interesse em dar continuidade a esse estudo e analisar de forma prática, possíveis relações entre elementos básicos da Geometria Fractal e objetos matemáticos determinados na BNCC.

Dessa forma, apresentamos nesse texto os resultados referentes a uma pesquisa de natureza qualitativa que utiliza como metodologia a Engenharia Didática e tem por objetivo geral compreender o desenvolvimento de uma sequência didática capaz de mobilizar conhecimentos matemáticos relacionados as noções da Geometria Fractal na perspectiva da Formação de professores de matemática. Decorrente deste elaboramos três objetivos específicos que são: verificar quais conhecimentos os licenciandos em matemática do CESP possuem de Geometria Fractal; identificar as dificuldades dos licenciandos em matemática do CESP na contextualização de conteúdos matemáticos da Educação Básica; evidenciar quais ações devem compor uma sequência didática que vise contribuir com a formação de professores de matemática, no CESP, utilizando elementos básicos de Geometria Fractal.

O estudo foi desenvolvido na Universidade do Estado do Amazonas no Centro de Estudos Superiores de Parintins e contou com a colaboração de 36 sujeitos, acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática aprovados na disciplina Geometria I e que aceitaram participar da pesquisa, sendo 2 do 4º período, 17 do 6º período e 17 do 8º período.

Ao tratar do ensino de matemática, a BNCC indica que esse ensino deve ser realizado de maneira interdisciplinar e contextualizado com foco na resolução de problemas, embora a mesma não englobe questões de metodologias. Nesse sentido, entendemos que é necessário que

o professor de matemática possua conhecimentos suficientes para realizar práticas docentes que atendam as exigências do ensino atual.

Como possibilidade de contextualizar alguns conteúdos matemáticos, temos a Geometria Fractal que possui relações com diversas ciências, além de nos permitir representar as formas da natureza de modo mais aproximado do que a Geometria Euclidiana, dando sentido às formas consideradas caóticas. Nessa direção, trabalhar elementos de Fractais na formação do professor, pode contribuir na ampliação tanto da visão como também da base geométrica dos licenciandos de matemática do CESP, o que é de grande importância já que a Geometria é um dos pilares da matemática e uma das principais Unidades Temáticas da BNCC.

Os resultados são apresentados e discutidos nas três seções que compõem esse artigo, de modo que as falas dos sujeitos estão em itálico seguido de uma identificação numérica e o ano em que ocorreu a pesquisa. Em relação aos resultados, primeiramente apresentamos a análise preliminar, buscando evidenciar a importância da Geometria Fractal para a formação de professores de matemática, bem como as concepções dos sujeitos a respeito da mesma e de questões sobre contextualização e interdisciplinaridade no ensino de matemática, essa atividade respondeu nosso primeiro objetivo específico. Em seguida, tratamos da elaboração da sequência didática e sua análise prévia, apresentando hipóteses sobre sua aplicação em sala de aula, e por fim, analisamos os comportamentos e os questionamentos dos sujeitos durante a aplicação de nossa sequência didática, afirmando ou refutando as hipóteses apresentadas na segunda seção, as atividades desenvolvidas nessa etapa contribuíram para o alcance total do segundo e do terceiro objetivo específico.

2 PARA CONHECER O FENÔMENO EM ESTUDO: ANÁLISE PRELIMINAR

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa/ensino que teve sua origem na Didática da Matemática por volta dos anos 80 na França, e busca sistematizar os procedimentos metodológicos, levando em consideração as relações que existem entre teoria e prática docente. Uma Engenharia Didática, de acordo com Pais (2002, p. 101), se constitui a partir da realização de quatro etapas sucessivas: “análises preliminares; concepção e análise *a priori*; aplicação de uma sequência didática e a análise *a posteriori* e a avaliação”.

A primeira etapa realizada em nossa pesquisa foi a análise preliminar que consistiu em “[...]uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino[...]

que é a fase da concepção das situações didáticas” (GUIMARÃES; BARLETTE; GUADAGNINI, 2015, p. 217).

Nossa análise preliminar foi construída a partir da realização de duas etapas. Primeiro, estudamos a utilização da Geometria Fractal na Educação Básica e as suas contribuições para formação de professores de matemática. Para tal estudo, realizamos uma pesquisa bibliográfica, que abrange a “bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo” (MARCONI; LAKATOS, 2008, p. 185). Dessa forma, trabalhamos com artigos, livros e revistas da área de Educação Matemática que tivemos acesso e que apresentam aplicações da Geometria Fractal, como também, sua utilização na Educação Básica. Vale ressaltar que foram utilizados os resultados da pesquisa que realizamos no âmbito da Iniciação Científica, no período de agosto de 2018 a agosto de 2019, citada na introdução desse artigo, intitulada por “A Geometria Fractal e a formação do professor de matemática: constructos possíveis”, em que apresentamos e discutimos as possíveis relações entre objetos matemáticos da BNCC com elementos básicos da Geometria Fractal e as principais características do conhecimento de Geometria desenvolvido pelo Licenciando em Matemática do CESP.

A partir de nosso estudo bibliográfico identificamos trabalhos como os de Gomes, Salvador (2017), Costa (2018), Sena (2018), que apresentam a Geometria Fractal como um instrumento facilitador da aprendizagem para o ensino da matemática na Educação Básica, em outra direção Reis (2012) evidencia a importância da Geometria Fractal para formação inicial de professores de matemática e algumas relações entre Fractais e objetos matemáticos da Educação Básica presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

A segunda etapa da análise preliminar foi a aplicação de dois questionários que combinavam questões abertas e de múltipla escolha, visto que, “a combinação de respostas de múltipla escolha com as respostas abertas possibilita mais informação sobre o assunto [...]” (MARCONI, LAKATOS, 2008, p. 209).

O primeiro questionário (APÊNDICE A) possuía como principal objetivo verificar as concepções dos sujeitos sobre contextualização, interdisciplinaridade e geometrias não-euclidianas (especificamente a Fractal), vale ressaltar que ainda no primeiro questionário foi verificado também em quais áreas da Matemática os sujeitos manifestavam ter mais conhecimentos, afinidade e/ou facilidade de ensinar, do mesmo modo, as que possuem mais dificuldade.

Analisando os primeiros questionários observamos que dos 36 sujeitos da pesquisa 18 acadêmicos apontaram a Geometria como área de maior afinidade, porém, estes, ao serem

questionados sobre quais conteúdos matemáticos possuem mais dificuldade de ensinar, em sua maioria (10 sujeitos) responderam conteúdos da área de Geometria, o que de certa forma demonstra uma contradição, que pode ser explicada pela forma como é trabalhada a Geometria Euclidiana na Licenciatura em Matemática do CESP que

garante ao licenciando um aporte teórico sólido sobre esse assunto, porém, sem um direcionamento para que ele desenvolva práticas docentes que utilizem ideias geométricas para a contextualização de conteúdos matemáticos de outros ramos dessa ciência. (NASCIMENTO; COSTA, 2019, p. 14).

Verificamos também que 13 sujeitos afirmaram conhecer a Geometria Fractal, diante disso, com o intuito de adquirirmos informações mais detalhadas a respeito de seus conhecimentos, aplicamos aos respectivos sujeitos um segundo questionário (APÊNDICE B) contendo perguntas específicas sobre Fractais. De modo geral, verificamos que os sujeitos conheceram a Geometria Fractal por meio de artigos ou vídeos que tratam da mesma, e que apenas sabem de sua existência e aplicações, mas não sabem como trabalhar essas aplicações, principalmente na Educação Básica.

Ainda sobre o primeiro questionário, 30 sujeitos afirmaram não conhecer geometrias não-euclidianas, porém como citado anteriormente, 13 afirmaram conhecer a Geometria Fractal, isso nos leva a concluir que os sujeitos não caracterizam a Geometria Fractal como sendo não-euclidiana, ou, desconhecem a definição de geometria não-euclidiana, o que pode indicar um conhecimento superficial sobre esse assunto.

Grande parte dos sujeitos não soube definir, de uma forma completa, contextualização e interdisciplinaridade na matemática, visto que, sobre contextualização percebemos que as respostas convergiam a uma só vertente: “mostrar a matemática ou aplicações matemáticas em situações do cotidiano”. Essa definição apresentada pelos sujeitos não está errada, porém é limitada e pode ser ampliada, isto porque de acordo com Reis, Nehring (2017, p. 341), a contextualização “tem por objetivo fundamentar o processo de aprendizagem, pois possibilita estabelecer sentidos do aluno para os significados dos conceitos matemáticos”. Assim, entendemos que contextualizar vai além de mostrar a matemática em situações do cotidiano, é apresentá-la em situações que façam sentido aos alunos.

Em relação à Interdisciplinaridade as definições apresentadas possuíam o significado de: “relacionar duas disciplinas ou ensinar por meio de duas disciplinas”. Novamente a definição apresentada pelos sujeitos ainda pode ser ampliada, visto que a relação entre as disciplinas na interdisciplinaridade deve levar em consideração os aspectos metodológicos

presentes em cada uma, visando um ensino não fragmentado. Desse modo, interdisciplinaridade consiste essencialmente “num trabalho em comum tendo em vista a interação das disciplinas científicas, de seus conceitos e diretrizes, de suas metodologias, de seus procedimentos, de seus dados e da organização de seu ensino” (FAZENDA, 2011, *apud*, OLIVEIRA; SANTOS, 2017, p. 76).

De modo geral, as informações obtidas com os questionários corroboram com os resultados adquiridos com o estudo da pesquisa de PAIC que realizamos anteriormente, visto que por meio dela foi verificado que durante a Licenciatura em Matemática do CESP não há indicação para o estudo de Geometrias não-euclidianas e especificamente a Geometria Fractal.

A conclusão dessa etapa da pesquisa nos permitiu a obtenção de dados suficientes para a concepção e análise de nossa sequência didática, que será apresentada na seção a seguir.

3 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI*

A construção e análise a priori da sequência didática diz respeito a segunda etapa da pesquisa, que de modo geral “consiste na definição de um certo número de variáveis de comando do sistema de ensino que supostamente interferem na constituição do fenômeno estudado” (PAIS, 2002, p. 101). De maneira mais específica é nessa etapa que “se concebem e se analisam as situações didáticas previamente à sua realização no ambiente educacional, tendo-se por base os estudos preliminares e os comportamentos que o professor intenciona que sejam expressos pelos alunos na realização da experiência” (GUIMARÃES; BARLETTE; GUADAGNINI, 2015, p. 217).

Para denominarmos as aulas que compõem a sequência didática adotamos o termo indicado por Pais (2002) que nos diz que essas aulas também podem ser chamadas de sessões. Dessa forma, como a sequência didática pode ser composta por mais de uma sessão, elaboramos duas sessões cada uma dividida em três momentos.

3.1. Primeira sessão

A primeira sessão possui o objetivo de trabalhar a contextualização de conteúdos matemáticos da Educação Básica e as noções básicas sobre Geometria Fractal, a fim de despertar nos sujeitos, a curiosidade por essa geometria. Para essa sessão utilizamos como recursos: Datashow, quadro branco, pincel para quadro branco, folhas de papel A4, caneta.

Primeiro momento: a turma deve ser dividida em grupos para a realização de uma atividade, afim de percebermos o entendimento dos sujeitos da pesquisa sobre contextualização

de conteúdos matemáticos como proposto no segundo objetivo específico da pesquisa. Para tal atividade, sorteamos seis conteúdos de matemática da Educação Básica de anos diversos, sendo eles: Ponto médio, Noção intuitiva de Limite, Problemas de Medidas, Transformações Geométricas, Sequências Recursivas, e Sequências Numéricas, vale ressaltar que, esses conteúdos estão direta ou indiretamente relacionados a Geometria Fractal.

Após o sorteio de cada tema, os grupos devem elaborar em um tempo de 10 a 15 minutos, uma situação que contextualize um conteúdo de matemática relacionado ao seu tema e em seguida apresentar para os demais sujeitos. Por fim, haverá uma discussão sobre as situações apresentadas entre todos os participantes.

Segundo momento: o segundo momento tem como ponto de partida o questionamento: é possível contextualizar qualquer conteúdo matemático da Educação Básica? Após as respostas, explicamos que é possível sim, visto que a contextualização é dar significado aos conteúdos, e não necessariamente apresentá-los em situações do cotidiano. O ponto chave desse momento é apresentar as geometrias não-euclidianas, tal como suas aplicações na matemática de forma simples e intuitiva.

Para apresentar as ideias fundamentais de uma geometria não-euclidiana, deve ser utilizado os postulados de Euclides, afim de mostrar como essas geometrias se originam, e as principais existentes.

Terceiro Momento: o último momento da primeira sessão tem como foco principal apresentar a Geometria Fractal para os sujeitos. Essa atividade tem como ponto de partida a história dos Fractais, de modo que, ela deve ser utilizada para mostrar a importância do desenvolvimento dessa geometria para a Matemática, e em seguida, os elementos básicos, as áreas de aplicação e os tipos de Fractais de acordo com o grau de autossimilaridade.

As definições de Fractal são muitas, mas possuem em si uma mesma vertente, adotaremos a definição dada por Carvalho (2005, p.18), que entende um fractal como sendo “uma figura geométrica em que uma parte se assemelha a toda figura, obtida através de um processo iterativo e que pode ter uma dimensão não inteira”. Dessa forma, a definição dada por Carvalho nos apresenta as características fundamentais desses entes geométricos, sendo elas: autossimilaridade, processo iterativo e dimensão não inteira (REIS, 2012).

Ao final desse momento deve ser realizado dois questionamentos:

1ª – Diante do que foi apresentado, qual as possibilidades da Geometria Fractal na educação básica?

2ª – Como explorar essa geometria na sala de aula?

Essas questões possuem o objetivo de direcionar as atividades da segunda sessão da sequência didática, que possui um olhar mais prático de construção e exploração dos Fractais para o ensino.

Após o término da primeira sessão os sujeitos possuíam conhecimentos prévios de Geometria Fractal, o que permitirá o trabalho prático da segunda sessão, tendo em vista a construção e exploração dos Fractais em sala de aula.

3.2. Segunda sessão

O segundo dia de atividades, tem por objetivo trabalhar a Geometria Fractal para o ensino de matemática, de modo que essa Geometria “não se limita a apenas fazer a representação de formas naturais. Sua aplicação no ensino vai além, abrindo um leque de possibilidades pra contextualização de conceitos intrínsecos à matemática, servindo de ponte para dar significado a diversos conteúdos matemáticos” (REIS, 2012, p. 13).

Utilizaremos como recursos: Datashow, quadro branco, pincel para quadro branco, folhas de papel A4, caneta e o *Software Xaos*¹. As atividades dessa sessão ocorreram nos mesmos grupos que haviam sido formados na atividade de contextualização da primeira sessão.

Primeiro momento: a primeira atividade usada é o Jogo do Caos apresentado por Barbosa (2005). Mas, pela linguagem mais didática, utilizamos o jogo na perspectiva de Reis (2012), para quem a atividade é uma boa introdução aos fractais, pois por meio dela podemos observar que a princípio o que parece aleatório e caótico, na verdade possui ordem. Sua realização ocorre em 5 etapas:

- 1^a – é desenhado um triângulo ABC qualquer
- 2^a – marca-se um ponto P dentro desse triângulo
- 3^a – traça-se um segmento a um vértice aleatório do triângulo ABC, partindo do ponto P.
- 4^a – marca-se o ponto médio desse segmento traçado
- 5^a – se repete os passos a partir do 3^a

Os sujeitos devem realizar esse processo diversas vezes por no mínimo dez minutos, para que a visualização final da atividade fique clara. Passado o tempo, deve ser construído um triângulo a partir dos pontos médios do triângulo ABC, onde será observado que os pontos

¹ Link para download: <http://matek.hu/xaos/doku.php?id=downloads:main>

marcados estarão nos triângulos adjacentes aos vértices, e nenhum ponto estará no triângulo central.

Ao final da análise do Jogo do Caos, exibimos o triângulo de Sierpinski, Fractal que pode ser visualizado ao final desse jogo, o que permite a exploração dos conceitos de autossimilaridade e de complexidade apresentada por esse ente geométrico.

Segundo momento: a segunda atividade é direcionada pela construção e exploração da curva de Koch, e deve se iniciar a partir da proposta da medição do litoral brasileiro, atividade essa proposta por Fuzzo (2008), em que novamente adotaremos a interpretação de Reis (2012).

A atividade tem seu início a partir da exibição de uma imagem de satélite do Brasil por meio de *Power Point*, de modo que seja possível observar atentamente a forma de seu Litoral, e em seguida, fazemos uma comparação entre as medidas desse litoral por mais de uma fonte utilizando a internet, de modo que, seja verificado as diferenças nas medidas ao consultarmos fontes diferentes.

Deve ser explicado que essa diferença pode ser vista mais claramente quando associamos o litoral do Brasil a curva de Koch, visto que a escala utilizada na medição pode ser relacionada ao comprimento dos lados do Fractal ao decorrer das iterações realizadas. Posteriormente, os grupos devem realizar a construção do Fractal até o terceiro nível de iteração, observando que durante esse processo, estará sendo utilizado técnicas de desenho geométrico. Para construção da Curva de Koch, devem ser realizados os seguintes passos:

- 1^a – Desenhe um segmento de comprimento c
- 2^a – Divida-o em 3 partes iguais
- 3^a – Construa um triângulo equilátero tendo como base o segmento central
- 4^a – Remova a base desse triângulo
- 5^a – Repita a partir do passo 2 para cada um dos novos segmentos

Após a finalização da construção, exploramos o Fractal elaborando a fórmula que permite o cálculo de seu comprimento em qualquer nível de iteração, O que nos permite verificar que lados desse Fractal crescem em Progressão Geométrica. Vale ressaltar que essa atividade possui caráter interdisciplinar, de modo que relaciona conhecimentos da Geografia referentes aos conceitos de litoral e escalas, com os conhecimentos de Matemática utilizados para a construção das fórmulas.

Terceiro Momento: após a finalização do segundo momento, deve haver uma discussão a respeito das possibilidades pedagógicas que foram destacadas. Essa discussão tem como objetivo principal verificar se as concepções adquiridas possibilitaram aos sujeitos

perceber que a Geometria Fractal, se bem utilizada, pode se tornar uma potencial fonte de contextualizações.

Decorrente do planejado nas sessões e em seus respectivos momentos esperamos que os sujeitos apresentem alguns comportamentos/respostas para as situações apresentadas ao longo do desenvolvimento da sequência didática.

Comportamentos/respostas esperados:

- 1^a – Apresentação de contextos voltados a situações cotidianas.
- 2^a – Ao menos uma contextualização com situações não cotidianas.
- 3^a – Falta de clareza em pelo menos uma contextualização.
- 4^a – Fácil compreensão dos conceitos não euclidianos básicos.
- 5^a – Dúvidas a respeito dos postulados de Euclides.
- 5^a – Compreensão dos elementos básicos da Geometria Fractal.
- 6^a – Fácil entendimento na realização e análise do Jogo do Caos
- 7^a – Fácil compreensão da atividade de relação entre a o Fractal Curva de Koch e o litoral brasileiro.
- 8^a – Interação entre os sujeitos nas atividades
- 9^a – Classificação das atividades como interessantes.
- 10^a – Interesse em conhecer mais sobre os Fractais e contribuição para o desenvolvimento de contextualizações utilizando as noções de Geometria Fractal apresentadas.

4 EXPERIMENTAÇÃO E AVALIAÇÃO

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos nas últimas duas etapas realizadas em nossa pesquisa chamadas de ‘experimentação’ e ‘análise *a posteriori* e avaliação’.

Durante a fase de experimentação da sequência didática “[...] é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado” (PAIS, 2002, p. 102). Dessa forma, é fundamental que durante essa etapa seja realizada o registro das atividades desenvolvidas, onde segundo Guimarães, Barlette, Guadagnini, (2015, p. 215), esse registro pode ser através de “[...] observações por meio de diário da prática pedagógica, gravações em áudio/vídeo, produções escritas dos alunos, etc.” Em nossa pesquisa, realizamos o registro de das atividades por meio de áudio, fotos, produções dos alunos e um diário contendo anotações a respeito das situações observadas.

Em relação a escrita do texto, apresentamos os dados obtidos durante a experimentação em paralelo à última etapa que foi composta por dois processos, análise *a posteriori* e avaliação.

A análise *a posteriori* “refere-se ao tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação da sequência didática” (PAIS, 2002, p. 103). Esse tratamento de informações, permitiu que fosse realizada a etapa de avaliação, responsável por validar os resultados da pesquisa, essa validação “é obtida pela confrontação entre os dados obtidos na análise *a priori* e *a posteriori*, verificando as hipóteses feitas no início da pesquisa” (PAIS, 2002, p. 103). Em uma engenharia didática a etapa de avaliação, do ponto de vista metodológico, diz respeito a análise de dados da pesquisa.

A primeira sessão da sequência didática, contou com a participação de dezesseis sujeitos, em que foi possível a divisão em cinco grupos para o desenvolvimento da primeira atividade, a contextualização dos conteúdos matemáticos citados na segunda seção deste texto.

De modo geral, os grupos conseguiram desenvolver a atividade proposta no tempo solicitado. Três grupos apresentaram contextos relacionados a situações como eleições políticas, sequência de Fibonacci aplicada na reprodução de coelhos e jogo de futebol, os outros dois grupos somente citaram que realizariam as contextualizações buscando situações cotidianas vivenciadas pelos alunos, não especificando quais situações.

Percebemos que as situações apresentadas pela maioria, não necessariamente são cotidianas, como o caso da reprodução de coelhos, fato esse que refuta o primeiro comportamento esperado na análise *a priori* onde acreditávamos que os sujeitos somente utilizariam situações relacionadas ao cotidiano dos alunos. Esse fato confirma o segundo comportamento esperado: ao menos um grupo apresentar um contexto fora do cotidiano, que no caso foram 3 contextos.

Porém, houve grupos que não especificaram a situação problema que seria utilizada em sua aula, o que demonstra que alguns sujeitos possuem certa dificuldade na elaboração de um contexto para conteúdos matemáticos menos comuns de serem apresentados na Educação Básica, como a noção intuitiva de limite, o que confirma o terceiro comportamento esperado: a falta de clareza na contextualização de pelo menos 1 dos temas sorteados, no caso investigado, foram dois grupos cujas contextualizações foram superficiais em relação ao conteúdo matemático.

Em relação aos questionamentos voltados a possibilidade de contextualização de conteúdos matemáticos, os sujeitos apresentaram respostas que possuíam as seguintes vertentes.

“*Se os conteúdos existem é porque houve a necessidade de se criar, então é possível elaborarmos contextos*” (Sujeito A, 2019).

“Segundo o que alguns professores [Educação Básica] falam, não é possível contextualizar todos os conteúdos, pois, especificamente no Ensino Médio a contextualização se tornam mais difícil” (Sujeito D, 2019).

“Geralmente é possível se fazer aplicações, mas contextualizar não” (Sujeito M, 2019).

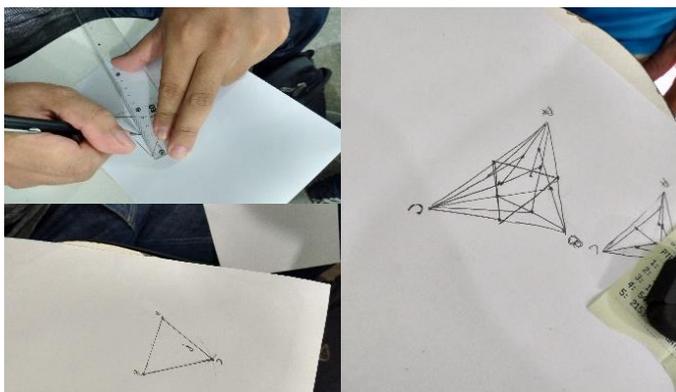
As atividades referentes a contextualização permitiram que verificássemos que a maioria dos sujeitos reconhece as possibilidades de contextualização, porém, com certa dúvida em virtude do que ouvem no ambiente escolar. A análise dessa atividade nos permitiu construir resultados para o segundo objetivo específico da pesquisa que consistia na identificação das dificuldades dos licenciandos em matemática do CESP na contextualização de conteúdos matemáticos da Educação Básica, pois percebemos que as dificuldades surgem e se fortalecem à medida que a exigência é para a contextualização de conteúdos ensinados no Ensino Médio.

Ao se tratar dos conceitos geométricos não-euclidianos, os sujeitos apresentaram uma certa dúvida a respeito da organização dos postulados de Euclides, fato esse que pode ser explicado pois “durante a Licenciatura em Matemática do CESP, não consta como conteúdos nas Ementas das disciplinas curso, o estudo dos postulados de Euclides” (NASCIMENTO; COSTA, 2019). Porém, ao discutimos sobre o nascimento de uma geometria não-euclidiana, houve um entendimento satisfatório por parte dos sujeitos. Diante disso, confirmamos o quinto comportamento esperado: dúvidas sobre os postulados e o quarto comportamento, relacionado à fácil compreensão dos conceitos não-euclidianos.

Após a explicação sobre as noções básicas de Geometria Fractal, os sujeitos demonstraram uma boa compreensão sobre os elementos básicos, fato que confirma o quinto comportamento esperado, referente ao fácil entendimento sobre os conceitos básicos dos Fractais. Além disso, surgiram comentários sobre o distanciamento entre a Geometria Euclidiana e a Fractal e, o fato de que quando o professor possui noções básicas sobre Fractais, pode quebrar a concepção errônea de que contextualizar é simplesmente colocar o conteúdo numa situação cotidiana.

A segunda sessão da sequência didática foi realizada com a participação de treze sujeitos, o que possibilitou o desenvolvimento das atividades propostas em cinco duplas e um trio. O principal foco dessa sessão foi a construção dos Fractais, a discussão sobre as possibilidades metodológicas e contribuições para a formação docente. A primeira atividade desenvolvida foi o Jogo do Caos.

FOTO 1 – Desenvolvimento do Jogo do Caos



Fonte: Arquivo do pesquisador

Relações estabelecidas ao longo da construção do Fractal:

Ponto médio para construção dos pontos.

Os sujeitos demonstraram um fácil entendimento do Jogo do Caos, o que confirmou o sexto comportamento esperado, de modo que, ao final o jogo foi classificado como interessante e curioso pelo fato dos pontos desenhados não ficarem localizados no triângulo central.

A associação da curva de Koch ao Litoral Brasileiro e sua construção, ocorreram sem dificuldades, confirmando o sétimo comportamento esperado: fácil compreensão da atividade de relação entre o Fractal Curva de Koch e o litoral brasileiro.

FOTO 2 – Construção da curva de Koch



Fonte: Arquivo do pesquisador

Relações estabelecidas ao longo da construção do Fractal:

- Triângulos equiláteros para construção dos lados do Fractal
- Progressão Geométrica para determinar o Perímetro e da quantidade de lados

Após a conclusão dessa construção, organizamos as informações do Fractal em uma tabela, a fim de elaborarmos as fórmulas para o cálculo do número de lados e perímetro a cada iteração conforme o planejado, em seguida, foi utilizado o *software Xaos* para mostrar de forma visual que o perímetro da curva de Koch tende ao infinito se os números de iterações também forem infinitos.

Vale ressaltar que durante as atividades desenvolvidas os sujeitos a todo momento interagiram uns com os outros e classificaram as atividades como interessantes, confirmando o

oitavo comportamento esperado, referente à interação dos sujeitos, e o nono comportamento esperado, relacionado à classificação das atividades como interessantes.

Diante dessas atividades os sujeitos realizaram os seguintes comentários e questionamentos:

“Como associar a geometria euclidiana à fractal no momento de ensinar?” (Sujeito F, 2019).

“A utilização do software em união à construção gera curiosidade, pois leva a pensar que tipo de cálculo podemos trabalhar em cima do que é mostrado ou que por trás disso existe cálculos”. (Sujeito D, 2019).

“Acredito que a melhor forma de se utilizar essa geometria é contextualizar trazendo as imagens, como por exemplo o ponto médio” (Sujeito J, 2019).

“Já havia visto o triângulo de Sierpinski quando procurava um contexto de um determinado conteúdo para sala de aula, mas não me aprofundei por medo de não conseguir utilizar” (Sujeito G, 2019).

Ao concluirmos todas as atividades, os sujeitos demonstraram interesse em conhecer mais sobre a Geometria Fractal, ressaltando que classificaram as atividades como interessantes de serem realizadas em sala de aula, pois despertam curiosidade e possuem relações com alguns conteúdos matemáticos da Educação Básica, como os trabalhados na atividade de contextualização. Tal situação, nos permite confirmar o décimo comportamento esperado que consistia no despertar do interesse em conhecer mais sobre os Fractais e sua contribuição para o desenvolvimento de contextualizações na Educação Básica.

Ao analisar os comportamentos, concluímos que as situações que compõem a sequência didática construída responderam de maneira satisfatória a proposta da pesquisa. Porém, como previsto na metodologia da Engenharia Didática, percebemos que a sequência pode ser melhorada, caso haja disponibilidade de tempo, implementando uma atividade de contextualização utilizando os elementos da Geometria Fractal apresentando-os relacionando-os aos objetos matemáticos indicados na primeira sessão da sequência didática. Ademais, pode-se ampliar o trabalho com a construção e exploração de mais Fractais.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das exigências atuais impostas para a Educação Básica, é necessário que o professor domine os conceitos de contextualização e interdisciplinaridade, para que consiga melhorar cada vez mais a qualidade do ensino.

Desse modo, em nosso texto discutimos sobre a elaboração e a aplicação de uma sequência didática que busca contribuir para o processo de formação de professores de matemática, apresentando os Fractais como potenciais ferramentas para a contextualização de conteúdos matemáticos da Educação Básica.

Ao longo do percurso trilhado, percebemos que o desenvolvimento de uma sequência didática não é algo simples, e requer estudos prévios e um bom planejamento. De mesmo modo, compreendemos que a composição de uma sequência didática que utilize elementos básicos da Geometria Fractal com foco em contribuir com a formação de professores de matemática, deve envolver aspectos não somente dos Fractais, mas também de questões como Contextualização e Interdisciplinaridade, tendo em vista as diversas relações que existem entre a Geometria Fractal e as várias áreas da ciência.

A sequência discutida nesse texto, se mostra de grande valia para os professores de matemática em formação, pois apresenta situações que podem contribuir com um melhor entendimento sobre o conceito e a utilização dos Fractais para o ensino de matemática, a exploração das ideias de contextualização de forma prática e algumas noções de geometrias não-euclidianas, podendo assim, proporcionar uma visão diferente da Geometria como área de estudo dentro da Matemática.

Percebemos que ainda que são poucos os trabalhos publicados na área da Educação Matemática que possuem um direcionamento para a utilização dos Fractais no contexto da formação do professor de matemática. Esse panorama destaca a importância e a particularidade de nossa pesquisa, que se diferencia por possuir um olhar voltado a essas possíveis contribuições de forma prática.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal: perspectivas e possibilidades para o ensino de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém, 2005.

COSTA, L. S. **Geometria Fractal: utilização do Geogebra e aplicações na disciplina de Computação para matemática no ensino Superior**. Monografia, Manaus: Universidade do Estado do Amazonas, 2018.

FAZENDA, I. C. A. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: efetividade ou ideologia**. 6 ed. São Paulo: Edições Loyola, 2011.

FUZZO, R. A. **Calculando a costa do Brasil:** uma atividade fractal com professores e futuros professores da educação básica. In: ENCONTRO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 8., 2008. Seção de Artigos. União da Vitória: FAFIUV, 2008.

GOMES, A. N; SALVADOR, J. A. **Dobras, Cortes e Fractais no Ensino Fundamental.** Educação Matemática em Revista, n. 37, p. 05-13, 2017.

GUIMARÃES, R. S. BARLETTE, V. E. GUADAGNINI, P. H. **A engenharia didática da construção e validação de sequências de ensino: um panorama com foco no ensino de ciências.** Polyphonia, v. 26, n.1, p. 211 – 226, 2015

MARCONI, M. A; LAKATOS E. M. **Fundamentos da metodologia científica.** São Paulo: Editora Atlas, 2008

NASCIMENTO, R. C. COSTA, L. F. M. **A geometria fractal e a formação do professor de matemática: constructos possíveis.** Iniciação científica (PAIC-FAPEAM) – Universidade do Estado do Amazonas, Parintins, 2019

OLIVEIRA, E. B; SANTOS, F. N. **Pressupostos e definições em interdisciplinaridade: diálogos com alguns autores.** Interdisciplinaridade, n. 11, p. 73-87, 2017

PAIS, L. C. **Didática da Matemática uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2002

REIS, A. Q. M; NEHRING, C. M. **A contextualização no ensino da matemática: concepções e práticas.** Educação Matemática Pesquisa: São Paulo, v.19, n.2, p. 339-364, 2017

REIS, B. L. **A Geometria Fractal e a sua importância para a formação do professor de matemática.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado do Amazonas, Parintins, 2012

SENA, M. M. **Uma proposta do ensino da Geometria Fractal para o 9º ano do ensino fundamental.** Monografia, Manaus: Universidade do Estado do Amazonas, 2018

APÊNDICE A

Questionário I

1. QUAL PERÍODO VOCÊ ESTA CURSANDO?

() 4º

() 6º

() 8º

2. QUAIS DOS RAMOS DA MATEMÁTICA TRABALHADOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA VOCÊ MAIS AFINIDADE?

() GEOMETRIA

() ALGEBRA

() ARITMÉTICA

() ESTÁTISTICA E PROBABILIDADE

3. VOCÊ SABE O QUE É CONTEXTUALIZAÇÃO E INTERDISCIPLINARIEDADE DENTRO DA MATEMÁTICA?

() NÃO

() SIM

() SIM, SEI SOMENTE CONTEXTUALIZAÇÃO.

() SIM, SEI SOMENTE INTERDISCIPLINARIEDADE.

4. PARA VOCÊ O QUE É CONTEXTUALIZAÇÃO NA MATEMÁTICA?

5. PARA VOCÊ O QUE É INTERDISCIPLINARIEDADE?

6. COM QUAL ETAPA DA EDUCAÇÃO BÁSICA VOCÊ SE SENTE MAIS SEGURO PARA DAR AULAS?

() ENSINO FUNDAMENTAL

() ENSINO MEDIO

7. CITE ALGUNS CONTEÚDOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA QUE VOCÊ POSSUI DIFICULDADE DE ENSINAR OU NÃO DOMINA.

8. VOCÊ POSSUI CONHECIMENTOS A RESPEITO DE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS? (SE SIM, QUAIS?)

() NÃO

() SIM

9. VOCÊ CONHECE A GEOMETRIA FRACTAL?

() SIM

() NÃO

10. (SE SIM A 9) VOCÊ CONHECE AS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA?

() SIM

() NÃO

APÊNDICE B

Questionário II

1. COMO VOCÊ CONHECEU A GEOMETRIA FRACTAL?

2. QUAIS SEUS CONHECIMENTOS A RESPEITO DA GEOMETRIA FRACTAL?

- () SÓ SEI QUE EXISTE
- () SEI CALCULAR PERIMETRO DE ALGUNS FRACTAIS
- () SEI CALCULAR ÁREA DE ALGUNS FRACTAIS
- () CONHEÇO ALGUMAS APLICAÇÕES
- () CONHEÇO A HISTÓRIA
- () OUTRO

3. DEFINA GEOMETRIA FRACTAL COM SUAS PALAVRAS

4. DESENHE UM FRACTAL