

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS  
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA**

**HIURI SANTANA DE NORONHA**

**ANÁLISE DE TENSÕES E DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS PRODUZIDOS  
EM ARRANJO FOTOVOLTAICO APLICANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS**

Manaus  
2018

**HIURI SANTANA DE NORONHA**

**ANÁLISE DE TENSÕES E DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS PRODUZIDOS  
EM ARRANJO FOTOVOLTAICO APLICANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS**

Pesquisa desenvolvida durante a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II e apresentada à banca avaliadora do Curso de Engenharia Elétrica da Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Estado do Amazonas, como pré-requisito para a obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador:  
Cláudio Gonçalves, Dr.

Manaus  
2018

**Universidade do Estado do Amazonas – UEA**  
**Escola Superior de Tecnologia - EST**

*Reitor:*

***Cleinaldo de Almeida Costa***

*Vice-Reitor:*

***Cleto Cavalcante de Souza Leal***

*Diretor da Escola Superior de Tecnologia:*

***Roberto Higino Pereira da Silva***

*Coordenadora do Curso de Engenharia Elétrica:*

***Ingrid Sammyne Gadelha Figueiredo***

*Banca Avaliadora composta por:*

***Prof. Cláudio Gonçalves (Orientador)***

***Prof. Pierre Macedo***

***Prof. Arlindo Pires Lopes***

*Data da defesa: 12/12/2018.*

## **CIP – Catalogação na Publicação**

NORONHA, Hiuri Santana de

Análise de tensões e de campos eletromagnéticos produzidos em arranjo fotovoltaico aplicando o método dos elementos finitos / Hiuri Santana de Noronha; [orientado por] Cláudio Gonçalves. – Manaus: 2018.

79 p.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Elétrica). Universidade do Estado do Amazonas, 2018.

1. Método dos elementos finitos. 2. Modelagem de arranjos fotovoltaicos. 3. Geração fotovoltaica. I. GONÇALVES, Cláudio.

HIURI SANTANA DE NORONHA

ANÁLISE DE TENSÕES E DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS PRODUZIDOS EM  
ARRANJO FOTOVOLTAICO APLICANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Pesquisa desenvolvida durante a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II e apresentada à banca avaliadora do Curso de Engenharia Elétrica da Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Estado do Amazonas, como pré-requisito para a obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Nota obtida: \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_)

Aprovada em \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

Área de concentração: Processamento de Energia

BANCA EXAMINADORA

---

Orientador: Cláudio Gonçalves, Dr.

---

Avaliador: Pierre Macedo, Dr.

---

Avaliador: Arlindo Pires Lopes, Ph.D.

Manaus 2018

*Aos meus pais Marconde e Marcionília, aos meus irmãos Paula e Marlon e a minha companheira e amiga Amanda pelo amor, incentivo e apoio que sempre me dedicaram.*

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, a Deus pela iluminação e a todas as pessoas envolvidas durante o desenvolvimento deste trabalho que ajudaram direta ou indiretamente.

As pessoas com os quais convivi ao longo desses anos que sempre me deram apoio e incentivo, não somente no meio acadêmico, mas também nos desafios diários.

Agradecimento especial aos meus pais Marconde Noronha e Marcionília Noronha por todo o apoio e confiança.

Agradeço ao meu professor e orientador Prof. Dr. Cláudio Gonçalves pela paciência e orientação durante este trabalho e por me introduzir na fascinante área de Eletromagnetismo Avançado, Métodos Computacionais e de Sistemas Fotovoltaicos.

Agradeço também aos professores Pierre Macedo e Arlindo P. Lopes que contribuíram diretamente para a realização deste trabalho.

Agradeço a todos os professores da Universidade do Estado do Amazonas – Escola Superior de Tecnologia (UEA-EST) pela sabedoria e ensinamentos repassados neste processo de formação acadêmica.

*"A ignorância completamente consciente é o prelúdio de todo avanço real na ciência". (James C. Maxwell)*

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo realizar a modelagem de um arranjo fotovoltaico, aplicando o *FETD*, permitindo uma simulação computacional realística para determinar a distribuição dos campos eletromagnéticos e de tensões nas células fotovoltaicas e arranjos. É apresentado um algoritmo numérico eficiente e robusto para a análise de células fotovoltaicas, baseado em elementos finitos. Constatou-se que através dos experimentos realizados, o algoritmo proposto permite solucionar as equações de onda eletromagnética escalar, sendo capaz de efetuar simulações com pulsos ultracurtos e altas frequências, utilizando o método de Newmark- $\beta$  o algoritmo é incondicionalmente estável. Os principais objetivos foram alcançados no desenvolvimento desta pesquisa, dentre eles, a modelagem de um arranjo fotovoltaico, permitindo determinar a distribuição dos campos eletromagnéticos. Os resultados numéricos obtidos foram satisfatórios, mostrando concordância com os resultados obtidos analiticamente.

**Palavras-chave:** Método dos elementos finitos; Modelagem de arranjos fotovoltaicos; Geração fotovoltaica.

## ABSTRACT

The objective of this work is to perform the modeling of a photovoltaic arrangement, applying the FETD, allowing a realistic computational simulation to determine the distribution of the electromagnetic fields and of the voltages in the photovoltaic cells and arrangements. We present an efficient and robust numerical algorithm for the analysis of photovoltaic cells, based on finite elements. It was verified that through the experiments, the proposed algorithm solves the scalar electromagnetic wave equations, being able to perform simulations with ultrashort pulses and high frequencies, using the Newmark- $\beta$  method the algorithm is unconditionally stable. The main objectives were achieved in the development of this research, among them, the modeling of a photovoltaic arrangement, allowing to determine the distribution of the electromagnetic fields. The numerical results were satisfactory, showing agreement with the results obtained analytically.

**Key words:** Finite element method; Modeling of photovoltaic arrangements; PV Generation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Elemento triangular linear. ....	19
Figura 2 - Divisão do domínio por elementos triangulares. ....	19
Figura 3 - Onda incidente na interface da região 1 com a região 2. ....	25
Figura 4 - Domínio computacional truncado por <i>PMLs</i> . ....	26
Figura 5 - A técnica das <i>PMLs</i> proposto por Berenger. ....	26
Figura 6 – Comparação do coeficiente de reflexão entre o aumento abrupto e o aumento gradual da condutividade. ....	27
Figura 7 - Bandas de energia em condutores, semicondutores e isolantes. ....	28
Figura 8 - Condutividade dos materiais semicondutores tipo n e tipo p. ....	30
Figura 9 - Junção pn no escuro em equilíbrio térmico, mostrando a barreira de potencial, e as correntes de difusão e de deriva. ....	32
Figura 10 - Estrutura básica de uma célula fotovoltaica de silício. ....	33
Figura 11 - Circuito equivalente básico para uma célula fotovoltaica. ....	34
Figura 12 – Domínio $\Omega$ , caso 1. ....	44
Figura 13 - Fonte de excitação no tempo. ....	46
Figura 14 - Amplitude do campo elétrico em função do tempo, no ponto de observação. ....	46
Figura 15 - Evolução do campo elétrico no domínio computacional em (a) $n=50$ ....	47
Figura 16 – Domínio $\Omega$ , caso 2. ....	48
Figura 17 - Condutividade polinomial de grau 3. ....	49
Figura 18 - Campo elétrico incidente e refletido no ponto de observação da região de análise. ....	50
Figura 19 - Evolução do campo elétrico no domínio computacional em (a) $n=50$ ....	51
Figura 20 – Propagação da onda na região de análise. ....	53
Figura 21 - Fonte de excitação no tempo. ....	53
Figura 22 - Malha de elementos finitos do experimento proposto. ....	54
Figura 23 - Intensidade de campo elétrico e densidade de corrente elétrica em um material semiconductor. ....	55
Figura 24 – Campo elétrico $ Ez $ para $n = 50$ . ....	57
Figura 25 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 100$ . ....	57
Figura 26 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 150$ . ....	58
Figura 27 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 200$ . ....	58
Figura 28 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 225$ . ....	59

Figura 29 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 250$ . .....	59
Figura 30 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 275$ . .....	60
Figura 31 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 300$ . .....	60
Figura 32 - Resultados numéricos obtidos nos pontos de observação. ....	61
Figura 33 - Esquemático de uma célula solar convencional. ....	63
Figura 34 - Sinal gaussiano modulado. ....	64
Figura 35 - Espectro luminoso, em Hz e nanômetros. ....	64
Figura 36 - Fonte de excitação no tempo. ....	65
Figura 37 – Experimento numérico para simulação de célula fotovoltaica. ....	66
Figura 38 - Malha de elementos finitos do experimento. ....	67
Figura 39 – Campo elétrico $ Ez $ para $n = 25$ . ....	70
Figura 40 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 50$ . ....	70
Figura 41 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 75$ . ....	71
Figura 42 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 100$ . ....	71
Figura 43 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 125$ . ....	72
Figura 44 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 150$ . ....	72
Figura 45 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 175$ . ....	73
Figura 46 - Campo elétrico $ Ez $ para $n = 200$ . ....	73
Figura 47 - Resultados numéricos obtidos nos pontos de observação. ....	74

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABC	<i>Absorbing Boundary Condition</i>
FDTD	<i>Finite Difference in Time-Domain</i>
FETD	<i>Finite Element in Time-Domain</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>
FV	Fotovoltaico
GD	Geração Distribuída
GFV	Gerador Fotovoltaico
ODE	<i>Ordinary Differential Equation</i>
PDE	<i>Partial Differential Equation</i>
PEC	<i>Perfect Electrically Conductor</i>
PFV	Painel Fotovoltaico
PML	<i>Perfectly Matched Layer</i>
SFV	Sistema Fotovoltaico
SFCR	Sistema Fotovoltaico Conectado à Rede
SFVA	Sistema Fotovoltaico Autônomo

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	13
<b>1 REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	16
1.1 FUNDAMENTOS DO ELETROMAGNETISMO.....	16
1.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	18
1.3 ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	21
1.4 CAMADAS PERFEITAMENTE CASADAS ( <i>PML</i> ).....	22
1.5 MATERIAIS SEMICONDUTORES.....	27
1.6 CÉLULAS FOTOVOLTAICAS.....	31
<b>2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS BIDIMENSIONAIS NO DOMÍNIO DO TEMPO</b> .....	35
2.1 FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA ESCALAR BIDIMENSIONAL NO DOMÍNIO DO TEMPO COM AS <i>PMLs</i> .....	35
2.2 DISCRETIZAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO COM O MÉTODO DE NEWMARK- $\beta$ .....	40
2.3 EXPERIMENTOS E RESULTADOS.....	43
2.3.1 Propagação no Espaço Livre.....	43
2.3.2 Propagação no Espaço Livre com <i>PMLs</i> .....	48
<b>3 EXPERIMENTOS E RESULTADOS</b> .....	52
3.1 EXPERIMENTO EM MATERIAL SEMICONDUTOR.....	52
3.2 MODELAGEM DA CÉLULA FOTOVOLTAICA.....	62
3.3 EXPERIMENTO EM CÉLULA FOTOVOLTAICA.....	65
<b>CONCLUSÃO</b> .....	76
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	78

## INTRODUÇÃO

A geração distribuída (GD) vem crescendo ano a ano, constituindo-se em uma alternativa de fornecimento de energia elétrica, cuja fonte está próxima do consumidor final (ACKERMANN *et al*, 2001). Em geral, essa modalidade de geração, tem como base fontes energéticas renováveis, o que contempla um amplo consenso mundial no sentido de se utilizar fontes de energia de baixa emissão de carbono, promovendo a mitigação nos impactos ambientais (BOYLE, 2012). Dentre as fontes de energia renováveis utilizadas na GD, destaca-se o gerador fotovoltaico (GFV), o qual pode ser utilizado para prover geração elétrica para regiões isoladas ou para conexão à rede elétrica pública nos centros urbanos.

Um GFV pode ser formado por 01 (um) ou diversos módulos solares (ou painel solar), formando um arranjo fotovoltaico, conforme a necessidade de produção de tensão e corrente para o consumidor (ZILLES *et al*, 2012). Por outro lado, células fotovoltaicas são componentes fundamentais na formação do módulo solar. Neste contexto, é introduzida uma pesquisa para analisar as tensões produzidas e a distribuição de campos eletromagnéticos gerados nas células fotovoltaicas e no arranjo final de um gerador fotovoltaico aplicando o método dos elementos finitos no domínio do tempo (*FETD*).

Esse campo de pesquisa, aplicado na modelagem de estruturas eletromagnéticas, a exemplo de células fotovoltaicas com as distribuições de tensão e campos envolvidos. É recorrente na literatura técnica a utilização do *FETD* em outras áreas da engenharia, como a mecânica e civil.

A modelagem da célula fotovoltaica e do módulo é realizada na etapa de pré-dimensionamento da potência do GFV, utilizando o método dos elementos finitos. Arranjos de geradores fotovoltaicos são capazes de produzir tensões de até 1000V, em que é quase impossível calcular as influências de campos eletromagnéticos com soluções analíticas nas células fotovoltaicas desses arranjos. A utilização de modelos numéricos e computacionais utilizando o *FETD* torna possível o cálculo da distribuição dos campos eletromagnéticos e das tensões nas células fotovoltaicas e seus arranjos.

Neste trabalho é introduzido a modelagem de Células Fotovoltaicas, na qual tenta-se aproximar fenômenos de natureza contínua através de um modelo discreto utilizando recursos computacionais de tal forma que simulações de alta complexidade são realizadas com a modelagem da estrutura em algoritmo numérico, gerando um ambiente virtual próximo ao da realidade, com o objetivo de caracterizar e quantificar em diversas situações as tensões e campos eletromagnéticos, avaliando de que forma a onda eletromagnética imposta no meio

pode gerar tensões e correntes em relação ao conjunto de células fotovoltaicas com diferentes parâmetros construtivos. De forma particular, deve-se analisar as características das tensões fotogeradas em função das ondas eletromagnéticas irradiadas na célula fotovoltaica, utilizando o *FETD*, devendo-se incluir condições absorventes nas fronteiras do domínio. Desta forma, a análise no domínio do tempo pode demonstrar de forma eficiente a absorção dos diversos comprimentos de onda.

Em razão de uma geometria eletromagnética complexa e diversas variáveis, a exemplo da temperatura ambiente e da radiação solar, as distribuições de campos eletromagnéticos e de tensões em arranjos de células fotovoltaicas não podem ser determinadas facilmente através de soluções analíticas. A solução analítica somente é possível em problemas eletromagnéticos com geometrias simples e poucas variáveis envolvidas. Atualmente, poucas pesquisas relacionadas ao tema foram realizadas e, particularmente, a aplicação do *FETD* para a modelagem e determinação da solução numérica do problema em questão é pouco explorada na literatura técnica especializada.

Métodos numéricos são amplamente utilizados para solução de equações diferenciais parciais ou equações integrais, a exemplo de problemas de eletromagnetismo que envolvem estas equações. As equações diferenciais parciais são resolvidas em particular com o método dos elementos finitos, que é amplamente explorado neste trabalho para a solução do problema.

A simulação numérica adquire grande relevância no projeto de GFV, ampliando a possibilidade de conhecer-se a priori o seu comportamento dinâmico. Há a necessidade da modelagem de células fotovoltaicas para simular com precisão a produção energética do gerador fotovoltaico em ambientes virtuais. Em particular, a modelagem da célula fotovoltaica através de elementos finitos possibilita a obtenção de gráficos para análise dos parâmetros elétricos no domínio do tempo.

O objetivo deste trabalho é realizar a modelagem de um arranjo fotovoltaico, aplicando o *FETD* e, assim, permitindo uma simulação computacional realística para determinar a distribuição dos campos eletromagnéticos e de tensões nas células fotovoltaicas em arranjos.

Este trabalho está dividido em capítulos, conforme a seguir. O capítulo 1 é dedicado ao Referencial Teórico, no qual são apresentados os principais conceitos e equações dos fenômenos eletromagnéticos e do método dos elementos finitos em duas dimensões, demonstrando como é realizada a interpolação de funções de base e discretização do domínio, bem como da demonstração da aplicação deste método nos fenômenos eletromagnéticos e a

solução das limitações computacionais através de condições de contorno absorventes utilizando camadas perfeitamente casadas (*PML*), e demonstra-se fenômenos dos materiais semicondutores e das células fotovoltaicas. No capítulo 2 é apresentada a formulação do algoritmo desenvolvido para a aplicação do *FETD* em uma propagação de onda eletromagnética. Os códigos computacionais foram validados com aplicação na análise do comportamento de materiais semicondutores. Os Resultados e Discussões dos experimentos numéricos são apresentados no capítulo 3. Por fim são apresentadas as conclusões deste trabalho e são apontadas sugestões para trabalhos futuros.

## 1 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo são introduzidos conceitos e fundamentos importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Com enfoque em conceitos de eletromagnetismo avançado, método dos elementos finitos e aplicações no eletromagnetismo, materiais semicondutores e células fotovoltaicas: princípios de funcionamento e características construtivas.

### 1.1 FUNDAMENTOS DO ELETROMAGNETISMO

As relações e variações de campos elétricos e magnéticos, cargas e correntes associadas com ondas eletromagnéticas são governadas por leis físicas, conhecidas por equações de Maxwell (BALANIS, 1989). Estas são utilizadas para descrever e relacionar os campos vetoriais, densidades de corrente e densidades de carga em qualquer ponto do espaço a qualquer tempo.

Em 1864, James C. Maxwell introduziu o seu trabalho “*A dynamic theory of the electromagnetic field*”, e revelou as equações que governam todos os fenômenos em eletricidade e magnetismo. Na forma diferencial, as equações de Maxwell podem ser descritas como (MAXWELL, 1864; BALANIS, 1989),

$$\nabla \times E = -M_i - \frac{\partial B}{\partial t} = -M_i - M_d = -M_t \quad (1)$$

$$\nabla \times H = J_i + J_c + \frac{\partial D}{\partial t} = J_{ic} + J_d = J_t \quad (2)$$

$$\nabla \cdot D = q_{ev} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot B = q_{mv} \quad (4)$$

onde todas essas quantidades de campo  $E, H, D, B, J, M$ , e  $q_v$  são variantes no tempo e cada um é função do espaço e do tempo, isto é,  $f = f(x, y, z; t)$ .

Materiais contém partículas carregadas, na qual quando estes materiais estão sujeitos a campos eletromagnéticos, suas partículas carregadas interagem com o campo eletromagnético, produzindo correntes e modificando as ondas eletromagnéticas propagadas nestes meios comparadas ao espaço livre (BALANIS, 1989).

Um dos parâmetros construtivos relaciona no domínio do tempo a densidade de fluxo elétrico  $D$  e a intensidade de campo elétrico  $E$ , dado pela expressão (BALANIS, 1989; KRAUS, 1984),

$$D = \hat{\epsilon} * E \quad (5)$$

onde  $\hat{\epsilon}$  é a permissividade elétrica do meio variante no tempo dado em *farads/metro*. Para o espaço livre, tem-se  $\hat{\epsilon} = \epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} = 10^{-9} / 36\pi$  (*farads/metro*), e a equação (5) é reduzida para um produto.

Outra relação igualmente importante relaciona a densidade de fluxo magnético no domínio do tempo  $B$  e a intensidade de campo magnético  $H$ , dado por

$$B = \hat{\mu} * H \quad (6)$$

onde  $\hat{\mu}$  é a permeabilidade magnética do meio variante no tempo dado em *henries/metro*. Para o espaço livre, tem-se  $\hat{\mu} = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  (*henries/metro*), e a equação (6) é reduzida para um produto.

Por fim, tem-se a relação da densidade de corrente de condução  $J_c$  no domínio do tempo com a intensidade de campo elétrico  $E$ , dado por

$$J_c = \hat{\sigma} * E \quad (7)$$

onde  $\hat{\sigma}$  é a condutividade do meio variante no tempo dado em *siemens/metro*. Para o espaço livre (sem perdas) a condutividade é igual a zero. Os parâmetros construtivos são usados para caracterizar as propriedades elétricas do material, estes materiais são caracterizados como dielétricos (isolantes), magnéticos e condutores dependendo se a polarização, magnetização ou condução é o fenômeno predominante. Outra classe de materiais são os semicondutores, na qual está no intervalo entre dielétricos e condutores, na qual em geral nem a corrente de deslocamento nem a de condução são predominantes (BALANIS, 1989).

As equações de Maxwell (1) e (2) estão representadas na forma diferencial, como equações de primeira ordem e estão acopladas entre si, isto é, ambas são quantidades desconhecidas de campo vetorial ( $E$  e  $H$ ) (MAXWELL, 1864). É desejável desacoplar estas equações, ao custo de aumentar a ordem dessas equações, isto é, tornando-as de segunda ordem, na qual são bem conhecidas como equações de onda. Portanto os campos elétricos e magnéticos para um dado problema limitado podem ser obtidos resolvendo as equações de Maxwell ou as equações de onda (BALANIS, 1989).

Desta forma as equações de onda vetoriais podem ser obtidas, aplicando o rotacional em (1) e (2) conforme demonstrado nas equações abaixo:

$$\nabla \times \nabla \times E = -\nabla \times M_i - \mu \nabla \times \frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \times M_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times H) \quad (8)$$

$$\nabla \times \nabla \times H = \nabla \times J_i + \nabla \times J_c + \epsilon \nabla \times \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \times J_i + \sigma \nabla \times E + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E) \quad (9)$$

Substituindo-se (2) em (8) e (1) em (9), tem-se

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times E &= -\nabla \times M_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( J_i + \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \nabla \times E &= -\nabla \times M_i - \mu \frac{\partial J_i}{\partial t} - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times H &= \nabla \times J_i + \sigma \nabla \times E + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -M_i - \mu \frac{\partial H}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \nabla \times H &= \nabla \times J_i + \sigma \nabla \times E - \varepsilon \frac{\partial M_i}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (11)$$

na qual (10) e (11) representam as equações de onda em que os campos elétrico e magnético variam no espaço e no tempo.

Estas equações são fundamentais e suficientes para o desenvolvimento deste trabalho, diversas variações e conceitos devem ser aplicados para as solucionar. Uma simplificação muito usual, são para meios livres sem fonte, obtendo-se,

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times H) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\quad (12)$$

$$\mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times E = 0\quad (13)$$

$$\nabla \times \nabla \times H = \sigma \nabla \times E + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E) = \sigma \left( -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \nabla \times H = -\mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\quad (14)$$

$$\mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times H = 0\quad (15)$$

desta forma, as equações (13) e (15) representam as equações de onda vetoriais no meio sem fonte.

## 1.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Por uma questão de simplicidade, o elemento triangular linear é empregado nesta seção, além disso este elemento é amplamente explorado no desenvolvimento deste trabalho, outros elementos mais sofisticados estão demonstrados na literatura e podem ser determinados por modelos matemáticos semelhantes aos abordados nesta seção.

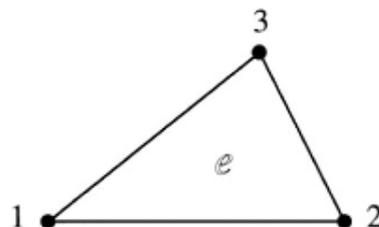
O método dos elementos finitos (*FEM*) é um método numérico utilizado para resolução de equações diferenciais parciais em domínios finitos, através de uma discretização de domínios contínuos do problema físico obtém-se os sistemas de equações lineares

(ESQUERRE, 2003; JIN, 2014). Uma malha de elementos finitos é a representação discreta do domínio contínuo através de elementos menores e mais simples, por exemplo em duas dimensões tem-se os triângulos e quadriláteros (SAKAMOTO, 2007).

O primeiro passo para uma análise em elementos finitos é dividir a área do domínio  $\Omega$  em um número de elementos bidimensionais. Um requisito básico da discretização é que não deve haver sobreposição nem lacunas entre os elementos. Além disso, os elementos devem ser conectados através de seus vértices, um vértice de um elemento só pode ser conectado no vértice de seus elementos vizinhos.

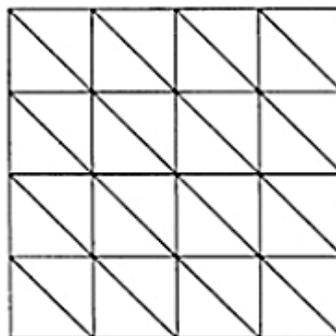
Nenhum vértice de um elemento pode ser interno ao lado de outro. Os elementos e nós podem ser rotulados em conjuntos separados de inteiros para identificação, desta forma, cada elemento está relacionado a vários nós, em um caso particular utilizando-se o elemento triangular, tem-se três nós, um nó pode ser atribuído a um rótulo local no elemento associado, além do seu rótulo global relativo a todo o sistema (JIN, 2014). Uma matriz de conectividade deve ser definida, assim como uma matriz semelhante que relaciona os segmentos coincidentes com seus nós. A figura 1 demonstra o elemento triangular e a figura 2 demonstra a discretização de um domínio por elementos triangulares.

Figura 1 - Elemento triangular linear.



Fonte: Jin, 2014.

Figura 2 - Divisão do domínio por elementos triangulares.



Fonte: Jin, 2014.

Uma vez que é efetuada a discretização de um domínio, é necessário aproximar a função desconhecida dentro de cada elemento, para o elemento triangular linear a função desconhecida  $\phi$  pode ser aproximada conforme demonstrado na equação (16) (JIN, 2014),

$$\phi^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y \quad (16)$$

na qual  $a^e$ ,  $b^e$  e  $c^e$  são coeficientes a serem determinados e  $e$  é referente a identificação do elemento. Para o elemento triangular linear, há três nós para cada vértice do triângulo (figura 1). Desta forma, para nós numerados no sentido anti-horário com os números 1, 2 e 3, com os correspondentes valores de  $\phi$ , pode-se obter através da equação (16), as equações (17), (18) e (19).

$$\phi_1^e = a^e + b^e x_1^e + c^e y_1^e \quad (17)$$

$$\phi_2^e = a^e + b^e x_2^e + c^e y_2^e \quad (18)$$

$$\phi_3^e = a^e + b^e x_3^e + c^e y_3^e \quad (19).$$

Onde  $x_j^e$  e  $y_j^e$  para  $j$  de 1 a 3, denota os valores das coordenadas do  $j$ -ésimo nó no elemento  $e$ .

Desta forma, a equação (20) demonstra a função arbitrária  $\phi^e$  relacionado aos coeficientes constantes  $a^e$ ,  $b^e$  e  $c^e$  em termos de  $\phi_j^e$  (JIN, 2014).

$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) \phi_j^e \quad (20)$$

Em que  $N_j^e(x, y)$  representa as funções de base ou de interpolação, e são determinadas conforme a equação (21):

$$N_j^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y), \quad j = 1, 2, 3 \quad (21)$$

onde  $A^e$  é a área do elemento  $e$ . Através do determinante da equação (22) obtém-se a área do elemento  $e$ .

$$A^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} \quad (22)$$

Pode-se demonstrar que as funções de interpolação podem ser descritas conforme a equação demonstrada a seguir:

$$N_j^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (23)$$

na qual obtém-se como resultado, no nó  $i$ ,  $\phi^e$  na equação (20) reduz-se ao valor nodal  $\phi_i^e$ . Uma característica importante das funções de interpolação  $N_j^e(x, y)$  é que elas desaparecem quando o ponto de observação  $(x, y)$  está sobre o lado oposto ao nó  $j$ . Portanto, os valores de

$\phi^e$ , sobre um lado do elemento não estão diretamente relacionados ao valor de  $\phi$  sobre o nó oposto, com isso, são determinados pelos valores nos dois nós que estão associados ao lado (ESQUERRE, 2003).

### 1.3 ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Vários trabalhos científicos foram publicados com o objetivo de simular a propagação de pulsos eletromagnéticos no domínio do tempo utilizando o método das diferenças finitas no domínio do tempo (*FDTD*). A desvantagem desse método é a dificuldade de modelar situações nas quais o domínio não é retangular ou quando precisa-se refinar a malha em regiões com pequenos contornos (ESQUERRE, 2003). Em 1997, Lee *et al* através da publicação “*Time domain finite element methods*” introduziu o *FETD*. A utilização dos elementos finitos apresenta vantagens sobre o método *FDTD* principalmente com relação a discretização dos domínios, sobretudo pode-se obter a quantidade arbitrária em qualquer ponto através das interpolações dos elementos finitos. Nesta seção é abordado o método dos elementos finitos em duas dimensões no domínio do tempo.

Considerando a abordagem efetuada na equação (10), para o caso bidimensional, tem-se uma superfície  $S$  e um contorno  $C$ , o campo eletromagnético gerado por uma corrente elétrica  $J_i$  satisfaz as equações de Maxwell (1) a (4) (JIN, 2014). Dado estas considerações, partindo de (1) desconsiderando a fonte de densidade de corrente magnética  $M_i$ , tem-se

$$\nabla \times E(r, t) = -\frac{\partial B(r, t)}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H(r, t)}{\partial t} \quad (24)$$

$$\mu^{-1} \nabla \times E(r, t) = -\frac{\partial H(r, t)}{\partial t} \quad (25)$$

aplicando-se o rotacional para elevar a ordem da equação, tem-se

$$\nabla \times [\mu^{-1} \nabla \times E(r, t)] = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times H(r, t)] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ J_i(r, t) + \sigma E(r, t) + \varepsilon \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} \right] \quad (26)$$

$$\nabla \times [\mu^{-1} \nabla \times E(r, t)] + \varepsilon \frac{\partial^2 E(r, t)}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_i(r, t)}{\partial t}, \quad \forall r \in S \quad (27)$$

desta forma, obtém-se a equação da onda eletromagnética vetorial. Adota-se neste trabalho uma simplificação para o sistema bidimensional, na qual a componente do modo transversal é similar a equação de Helmholtz e pode ser resolvida utilizando o método dos elementos finitos, esta solução é amplamente utilizada e está demonstrada em maiores detalhes no capítulo 2.

No domínio do tempo, a corrente de condução e de deslocamento devem ser tratadas

separadamente (JIN, 2014). Para o sistema ser limitado é necessário considerar as condições de borda, assumindo a condição de borda em  $C$ , descrita como

$$\hat{n} \times [\mu^{-1} \nabla \times E(r, t)] + Y_c \hat{n} \times \left[ \hat{n} \times \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} \right] = U(r, t), \quad \forall r \in C \quad (28)$$

na qual  $Y_c$  é denominado por admitância da borda,  $\hat{n}$  representa o vetor normal ao contorno e  $U(r, t)$  é a fonte aplicada na borda. Desta forma, aplicando uma integral de superfície (JIN, 2014), o sistema é dado por

$$\begin{aligned} \iint_S \left\{ \mu^{-1} [\nabla \times N_i(r)] \cdot [\nabla \times E(r, t)] + \varepsilon N_i(r) \cdot \frac{\partial^2 E(r, t)}{\partial t^2} + \sigma_e N_i(r) \cdot \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} \right. \\ \left. + N_i(r) \frac{\partial J_i(r, t)}{\partial t} \right\} dS \\ + \oint_C \left\{ Y_s [\hat{n} \times N_i(r)] \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\hat{n} \times E(r, t) + N_i(r) \cdot U(r, t)] \right\} dl = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

na qual o campo elétrico é expandido pela função base, como

$$E(r, t) = \sum_{j=1}^N E_j(t) N_j(r) \quad (30)$$

em que  $N$  denota o número total de desconhecidos, portanto a forma final da equação do *FETD* é dada por (JIN, 2014)

$$[T] \frac{\partial^2 \{E\}}{\partial t^2} + [T_\sigma] \frac{\partial \{E\}}{\partial t} + [S] \{E\} = \{b\} \quad (31)$$

onde  $[S]$  corresponde ao primeiro termo dentro da primeira integral de superfície,  $[T_\sigma]$  representa os termos que estão acompanhados da derivação no tempo de primeira ordem,  $[T]$  corresponde ao terceiro termo da primeira integral de superfície, e  $b$  corresponde aos termos da fonte.

#### 1.4 CAMADAS PERFEITAMENTE CASADAS (*PML*)

Dado que a memória computacional é limitada, não há possibilidade de simular as ondas eletromagnéticas propagando-se em um espaço infinito, desta forma, as condições de fronteira absorventes são aplicadas para simular em um espaço fechado finito a propagação da onda sem que haja reflexão no contorno do domínio, de forma equivalente ao espaço infinito. Ao utilizar técnicas para truncar o domínio de análise, torna possível a simulação de métodos numéricos, pois o sistema computacional terá condições para armazenar a quantidade de dados limitada (JIN, 2014).

A utilização das camadas perfeitamente casadas (*PML*), foi pioneiramente introduzida por Berenger em 1994, para truncar domínios bidimensionais usando *FDTD*) a formulação proposta é baseada em um modelo puramente matemático, como um meio não físico, permitindo que ondas eletromagnéticas com diferentes ângulos de incidência, polarização e frequência fossem absorvidas pelo meio (BERENGER, 1994). A vantagem das *PMLs* com respeito às demais técnicas é que as camadas podem ser ajustadas de forma a serem perfeitamente casadas em um meio contínuo com características ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ) de forma que as ondas incidentes sobre estas não sofram reflexão na interface e também devido a condutividade finita, atenua a onda propagante em seu interior (ESQUERRE, 2003).

As *PMLs* de Berenger foram inicialmente implementadas para o método *FDTD*. Chew e Weedon modificaram a implementação para o *FETD*, com a realização das coordenadas estendidas (*coordinate stretching*) no domínio da frequência.

Para implementar as *PMLs* as equações de Maxwell no domínio da frequência são modificadas, conforme demonstrado a seguir:

$$\nabla_s \times E = -j\omega\mu H \quad (32)$$

$$\nabla_s \times H = j\omega\epsilon E \quad (33)$$

$$\nabla_s \cdot (\epsilon E) = 0 \quad (34)$$

$$\nabla_s \cdot (\mu H) = 0 \quad (35).$$

Onde  $\nabla_s$  é definido conforme a equação (36):

$$\nabla_s = \hat{x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (36).$$

Desta forma,  $\nabla_s$  pode ser considerado como um operador padrão como  $\nabla$  é um operador nas coordenadas cartesianas, em que x, y e z são ponderados por fatores  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$ , respectivamente. Especificamente, tem-se,  $s_x = s_x(x)$ ,  $s_y = s_y(y)$  e  $s_z = s_z(z)$ . Com isso, a determinação do campo elétrico e do campo magnético na onda plana estão demonstrados nas equações (37) e (38) (JIN, 2014).

$$E = E_0 e^{-jk \cdot r} = E_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (37)$$

$$H = H_0 e^{-jk \cdot r} = H_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (38).$$

Substituindo  $E$  e  $H$  nas equações de Maxwell (32) a (35), tem-se as equações (39) a (42).

$$\mathbf{k}_s \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H} \quad (39)$$

$$\mathbf{k}_s \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (40)$$

$$\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (41)$$

$$\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (42)$$

Onde  $\mathbf{k}_s$  é determinado pela equação (43).

$$\mathbf{k}_s = \hat{x} \frac{k_x}{s_x} + \hat{y} \frac{k_y}{s_y} + \hat{z} \frac{k_z}{s_z} \quad (43)$$

Desta forma, aplicando o produto vetorial com  $\mathbf{k}_s$  em (39), obtém-se a equação (44) e (45).

$$\mathbf{k}_s \times (\mathbf{k}_s \times \mathbf{E}) = \omega\mu\mathbf{k}_s \times \mathbf{E} = -\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} \quad (44)$$

Aplicando o vetor identidade e a equação (41), (44) torna-se:

$$(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{k}_s)\mathbf{E} = \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} \quad (45)$$

Desta forma, a relação de dispersão (JIN, 2014), é dada por:

$$\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{k}_s = \omega^2\mu\varepsilon = \kappa^2 \quad (46)$$

ou,

$$\left(\frac{k_x}{s_x}\right)^2 + \left(\frac{k_y}{s_y}\right)^2 + \left(\frac{k_z}{s_z}\right)^2 = \kappa^2 \quad (47)$$

A solução desta equação é dada por:

$$k_x = \kappa s_x \sin \theta \cos \varphi \quad (48)$$

$$k_y = \kappa s_y \sin \theta \cos \varphi \quad (49)$$

$$k_z = \kappa s_z \cos \theta \quad (50)$$

na qual aparentemente, quando  $s_x$  é um número complexo, a onda é atenuada na direção x, e o mesmo ocorre para as demais direções (y e z). A impedância da onda é dada por (JIN, 2014):

$$\eta = \frac{|E|}{|H|} = \frac{|\mathbf{k}_s|}{\omega\varepsilon} = \frac{\omega\mu}{|\mathbf{k}_s|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (51)$$

observa-se que a impedância intrínseca do meio não é afetada pela modificação no operador  $\nabla$ . Considerando a reflexão de uma onda plana em uma superfície. Para o caso  $TE_z$  os campos da incidência, reflexão e transmissão pode ser escrito como (JIN, 2014):

$$\mathbf{E}^i = E_0 e^{-jk^i \cdot \mathbf{r}} \quad (52)$$

$$\mathbf{E}^r = R^{TE} E_0 e^{-jk^r \cdot \mathbf{r}} \quad (53)$$

$$\mathbf{E}^t = T^{TE} E_0 e^{-jk^t \cdot \mathbf{r}} \quad (54)$$

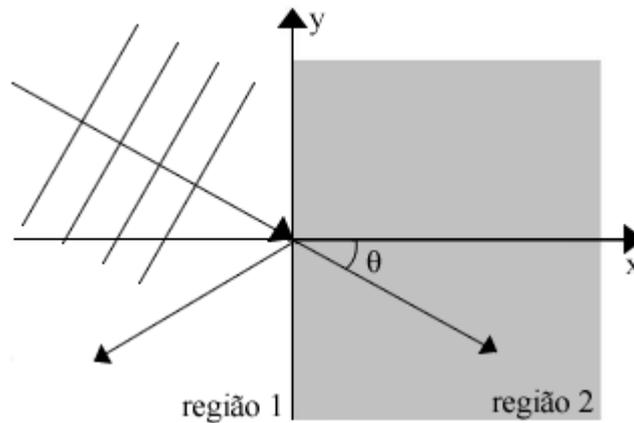
onde  $E_0$  é o vetor constante perpendicular a  $\hat{z}$ ,  $R^{TE}$  e  $T^{TE}$  denotam os coeficientes de reflexão e transmissão.

Para a correspondência de fase e condições de continuidade tangencial para  $E$  e  $H$ , obtém-se:

$$R^{TE} = \frac{k_{1z}s_{2z}\mu_2 - k_{2z}s_{1z}\mu_1}{k_{1z}s_{2z}\mu_2 + k_{2z}s_{1z}\mu_1} \quad (55)$$

na qual o subscrito 1 denota os parâmetros da região 1 do espaço e o subscrito 2 corresponde à região 2, conforme ilustra a figura 3.

Figura 3 - Onda incidente na interface da região 1 com a região 2.



Fonte: Próprio autor.

De forma similar, pode-se encontrar o coeficiente de reflexão para o caso  $TM_z$  conforme equação (56).

$$R_{TM} = \frac{k_{1z}s_{2z}\varepsilon_2 - k_{2z}s_{1z}\varepsilon_1}{k_{1z}s_{2z}\varepsilon_2 + k_{2z}s_{1z}\varepsilon_1} \quad (56)$$

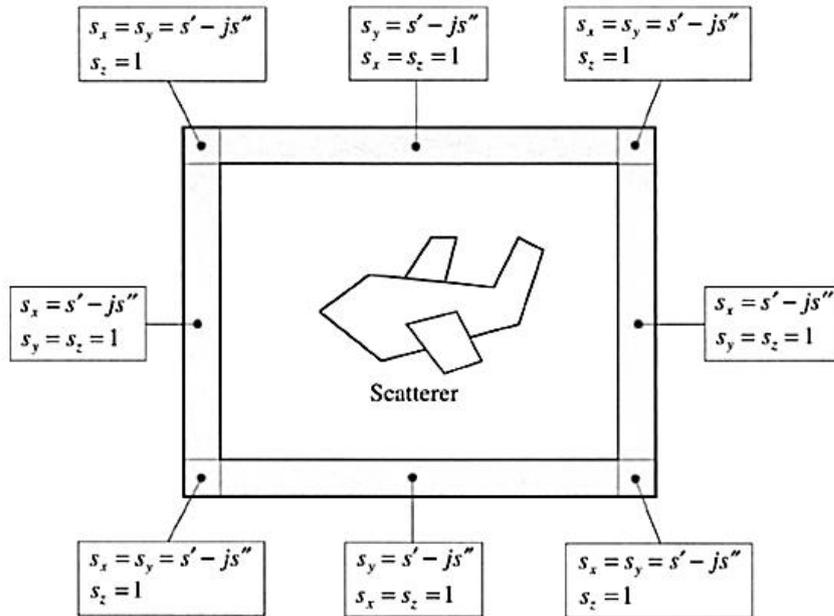
Para as condições de fase,  $k_{1x} = k_{2x}$  e  $k_{1y} = k_{2y}$ , obtém-se as equações a seguir:

$$\kappa_1 s_{1x} \sin \theta_1 \cos \varphi_1 = \kappa_2 s_{2x} \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \quad (57)$$

$$\kappa_1 s_{1y} \sin \theta_1 \sin \varphi_1 = \kappa_2 s_{2y} \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \quad (58)$$

Através de uma análise rápida, observa-se que para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $s_{1x} = s_{2x}$  e  $s_{1y} = s_{2y}$ , obtém-se:  $\theta_1 = \theta_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2$ , e conseqüentemente,  $R^{TE} = 0$  e  $R_{TM} = 0$ . Na qual permanece verdadeiro independente da escolha de  $s_{1z}$  e  $s_{2z}$ , do ângulo de incidência e da frequência (JIN, 2014). A figura 4 mostra a configuração e valores de  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  para o domínio computacional.

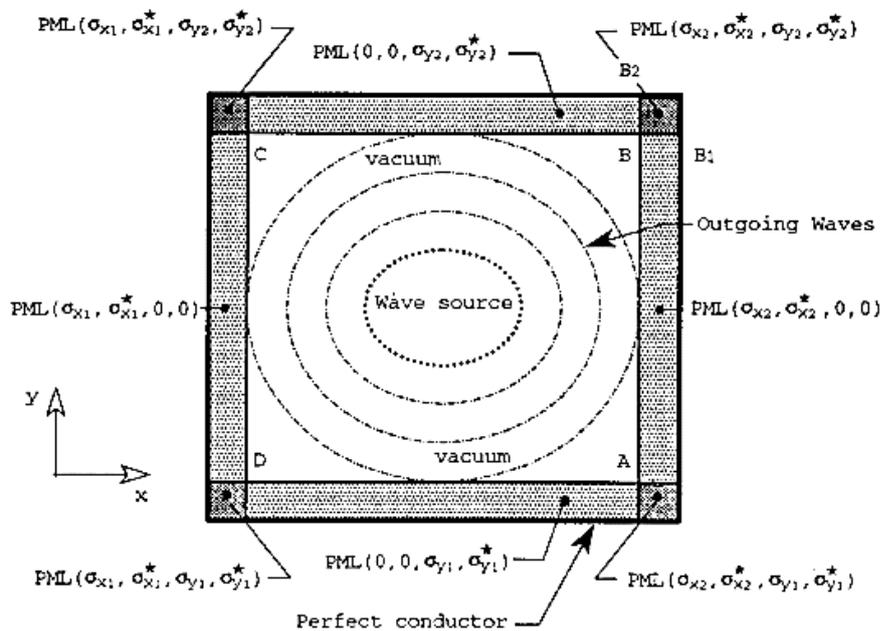
Figura 4 - Domínio computacional truncado por *PMLs*.



Fonte: Jin, 2014.

O problema de elementos finitos para ondas eletromagnéticas pode ser reformulado considerando as camadas perfeitamente casadas (*PMLs*) como condição absorvedora, na qual a borda é um condutor eletricamente perfeito (*PEC*), conforme proposto inicialmente por Berenger em 1994, ilustrado na figura 5.

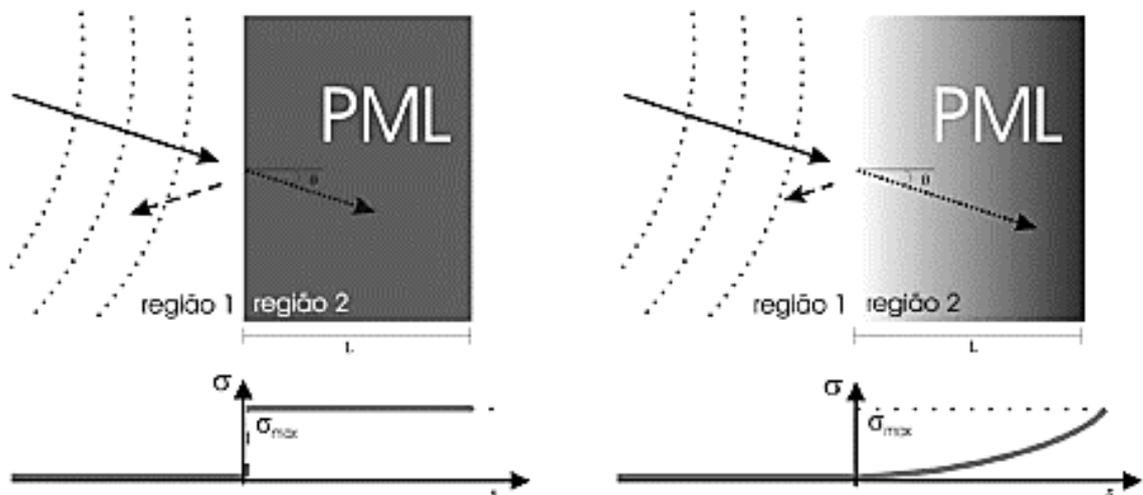
Figura 5 - A técnica das *PMLs* proposto por Berenger.



Fonte: Berenger, 1994.

No método *FETD*, ou em qualquer outra formulação numérica das equações de Maxwell, aparecem erros numéricos devido à amostragem espacial finita, conseqüentemente, ao implementar o meio *PML* como uma única descontinuidade de  $\sigma$  na malha, leva a reflexões espúrias notáveis de ondas na superfície do meio *PML* (SOUZA, 2008), conforme demonstra a figura 6. Para reduzir o erro, Berenger propôs que as perdas do meio *PML* ao longo da direção normal à interface aumente gradualmente, assumindo a variação gradual, o meio *PML* permanece casado.

Figura 6 – Comparação do coeficiente de reflexão entre o aumento abrupto e o aumento gradual da condutividade.



Fonte: Souza, 2008.

Assumindo a condutividade variando em  $x$ , isto é, tem-se a condutividade como uma função  $\sigma = \sigma(\rho)$ , que considera a espessura total  $\delta$ , e termina com a condição *PEC*, desta forma, o fator de reflexão é dado por (BERENGER, 1994):

$$R(\theta) = e^{-2\eta \cos \theta \int_0^\delta \sigma(\rho) d\rho} \quad (59)$$

## 1.5 MATERIAIS SEMICONDUTORES

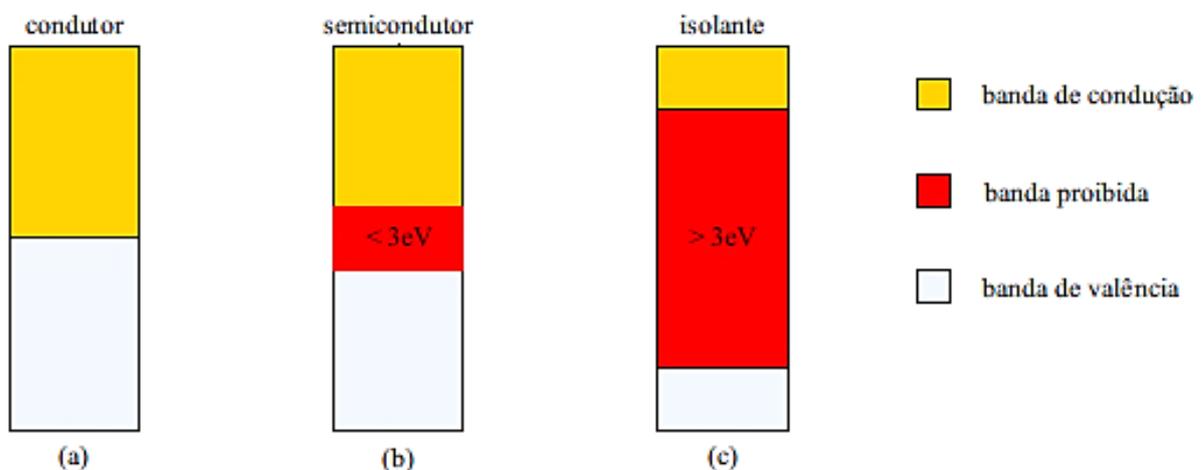
Os semicondutores intrínsecos são materiais cujas condutividades preenchem o espaço entre os materiais dielétricos e os condutores, com a condutividade destes materiais iniciando em  $10^{-3}$  até a unidade. Dois desses materiais intrínsecos são significativamente importantes para a engenharia elétrica, o germânio e o silício. Nos semicondutores intrínsecos existem dois portadores comuns, os elétrons livres e as lacunas. Com o aumento da temperatura, a

mobilidade do material semiconductor diminui, porém, a densidade de carga aumenta mais rapidamente. Os aumentos na densidade de carga compensam as diminuições nas mobilidades, resultando em um aumento geral na condutividade do material semiconductor com o aumento da temperatura. Esta é uma das diferentes características entre os semicondutores intrínsecos e os condutores metálicos (BALANIS, 1989).

A condutividade dos semicondutores pode ser aumentada adicionando impurezas, este processo é conhecido como dopagem. Algumas impurezas como o fósforo são chamadas de doadoras porque adiciona elétrons e forma o material semiconductor do tipo n, com os elétrons sendo os portadores majoritários. As impurezas como o boro são chamadas de aceitadoras, porque estes materiais adicionam lacunas e formam o material semiconductor do tipo p, com as lacunas sendo os portadores predominantes. Em temperaturas próximas do zero absoluto, os elétrons da camada de valência da camada externa do material semiconductor não estão livres para se deslocar. Assim, o material se comporta como um isolante sob estas condições. À medida que a temperatura aumenta, a vibração térmica da estrutura do material semiconductor aumenta, e alguns elétrons ganham energia térmica suficiente para ir da banda de valência para a banda de condução se tornando elétrons livres semelhantes aos de um condutor metálico (BALANIS, 1989).

Os elétrons de valência de qualquer material semiconductor devem ganhar energia suficiente para permitir a passagem da banda de valência para a banda de condução, pulando sobre a banda proibida, como mostrado na figura 7.

Figura 7 - Bandas de energia em condutores, semicondutores e isolantes.



Fonte: Pinho e Galdino, 2014.

Para o silício o valor de portadores intrínsecos citado pela literatura é de  $1,45 \times 10^{10} / \text{cm}^3$  na temperatura de 300 K. A concentração pode ser expressa pelas expressões (60) e (61) (PINHO; GALDINO, 2014).

$$n_i^2 \cong B \times e^{-\frac{E_g}{k.T}} \quad (60)$$

$$n = p = n_i \quad (61).$$

Onde  $n_i$  corresponde a concentração de portadores intrínsecos,  $n$  é a concentração de portadores negativos (elétrons),  $p$  é a concentração de portadores positivos (lacunas),  $k$  é a constante de Boltzmann ( $1,381 \times 10^{-23} \text{J/K}$ ),  $E_g$  corresponde a energia da banda proibida ( $1,12 \text{ eV}$  para o silício),  $T$  é a temperatura absoluta em  $K$  (Kelvin) e  $B$  é a constante aproximada para os semicondutores (aproximadamente  $10^{39} \text{ cm}^{-6}$ ).

Os elétrons que ganham energia suficiente para se libertar dos seus átomos, passando da banda de valência para a banda de condução, criam vagas que são denominadas de lacunas, as quais se movem de forma aleatória. Desta forma, quando os materiais semicondutores não estão sujeitos ao campo elétrico, a corrente dos elétrons e das lacunas é zero, pois a velocidade de deriva da rede destes portadores é zero, desde que o movimento seja aleatório. Quando um campo elétrico é aplicado, os elétrons se movem com uma velocidade de deriva ( $v_{de}$ ) diferente de zero na direção oposta do campo elétrico aplicado, enquanto que as lacunas se movem com a velocidade de deriva ( $v_{dh}$ ) diferente de zero, na direção do campo elétrico aplicado, criando uma corrente diferente de zero. Desta forma, pode-se determinar a densidade de corrente de condução para os dois portadores, elétrons e lacunas (BALANIS, 1989), conforme as equações demonstradas abaixo:

$$J_c = q_{ve}v_{de} + q_{vh}v_{dh} \quad (62)$$

$$J_c = q_{ve}(-\mu_e E) + q_{vh}(\mu_h E) \quad (63)$$

$$J_c = (-q_{ve}\mu_e + q_{vh}\mu_h)E \quad (64)$$

$$J_c = (\sigma_{se} + \sigma_{sh})E \quad (65)$$

$$J_c = \sigma_s E \quad (66)$$

na qual  $q_{ve}$  é a densidade de elétrons no volume dado em  $C/m^3$ ,  $q_{vh}$  corresponde a densidade de lacunas no volume dado em  $C/m^3$ ,  $\mu_e$  é a mobilidade dos elétrons em  $m^2/(V.s)$ ,  $\mu_h$  é a mobilidade das lacunas em  $m^2/(V.s)$ ,  $\sigma_{se}$  corresponde a condutividade estática devido a elétrons  $S/m$  e  $\sigma_{sh}$  é a condutividade estática devido a lacunas  $S/m$ .

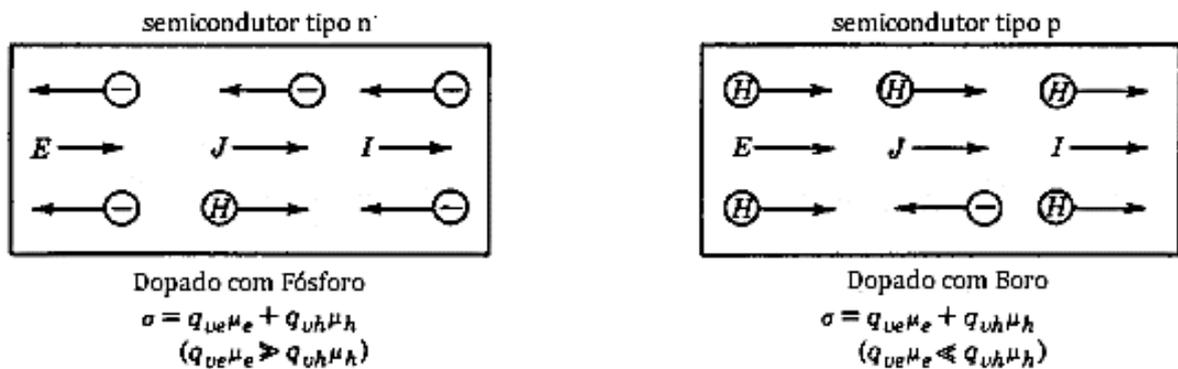
As condutividades estáticas devido aos elétrons e as lacunas podem ser definidas, conforme as equações (BALANIS, 1989):

$$\sigma_{se} = -q_{ve} \cdot \mu_e = -N_e \cdot q_e \cdot \mu_e = N_e \cdot |q_e| \cdot \mu_e \quad (67)$$

$$\sigma_{sh} = q_{vh} \cdot \mu_h = N_h \cdot q_h \cdot \mu_h = N_h \cdot |q_h| \cdot \mu_h = N_h \cdot |q_e| \cdot \mu_h \quad (68)$$

Onde  $N_e$  é a densidade de elétrons livres (*elétrons/m<sup>3</sup>*),  $N_h$  é a densidade de lacunas (*lacunas/m<sup>3</sup>*) e  $q_e$  é a carga elementar do elétron ( $1,6 \times 10^{-19}C$ ), na qual,  $q_h$  a carga elementar da lacuna é igual a  $q_e$ . A figura 8 ilustra o movimento das cargas nos materiais semicondutores tipo n e tipo p e os portadores majoritários para cada material semicondutor.

Figura 8 - Condutividade dos materiais semicondutores tipo n e tipo p.



Fonte: Kraus, 1984.

A variação de temperatura gera uma variação da condutividade e da mobilidade no germânio, silício e arseneto de gálio. As equações a seguir quantificam este fenômeno (BALANIS, 1989).

Para o silício:

$$\mu_e = (2,1 \pm 0,2) \times 10^5 \cdot T^{-2,5 \pm 0,1}, -113^\circ C \leq T \leq 127^\circ C \quad (69)$$

$$\mu_h = (2,3 \pm 0,1) \times 10^5 \cdot T^{-2,7 \pm 0,1}, -123^\circ C \leq T \leq 127^\circ C \quad (70)$$

Para o germânio:

$$\mu_e = 4,9 \times 10^3 \cdot T^{-1,66}, -173^\circ C \leq T \leq 27^\circ C \quad (71)$$

$$\mu_h = 1,05 \times 10^5 \cdot T^{-2,33}, -148^\circ C \leq T \leq 27^\circ C \quad (72)$$

Para o arseneto de gálio:

$$\mu_e = 0,310 \cdot \left(\frac{300}{T}\right)^{0,15} \quad (73)$$

$$\mu_h = 0,032 \cdot \left(\frac{300}{T}\right)^{2,2} \quad (74)$$

## 1.6 CÉLULAS FOTOVOLTAICAS

Existe a possibilidade de gerar portadores por meio da ionização por impacto, através da energia cinética das partículas (prótons, nêutrons etc.) quando atingem o material semiconductor. A principal característica que permite que células fotovoltaicas gerem pares elétron-lacuna é a incidência de fótons no material com a energia superior à da banda proibida, conforme demonstrado na figura 7. Os elétrons fotogerados podem se mover dentro do material e aumentar a condutividade elétrica, este fenômeno é conhecido por efeito fotocondutivo. Desta forma, para aproveitar a densidade de corrente fotogerada e tensão elétrica é necessário aplicar um campo elétrico para separar os portadores, isto só é possível com a criação da camada de depleção do material semiconductor, a junção pn. Para construí-la é necessário que se introduzam impurezas no material semiconductor, processo denominado de dopagem, que consiste na introdução de pequenas quantidades de outros elementos, denominados de impurezas, que mudam as propriedades elétricas do material intrínseco (DIMROTH; KURTZ, 2007).

Na interface entre os dois tipos de dopagem o excesso de elétrons da região n se difunde para região p, dando origem a uma região com cargas elétricas positivas fixas no lado n, que são íons  $P^+$ , pois os átomos de Fósforo perdem um elétron. Os elétrons que passam do lado n para o lado p encontram as lacunas, fazendo com que a região fique com cargas negativas fixas, que são íons  $B^-$ , pois os átomos de B recebem um elétron. Estas correntes de difusão de portadores de carga não continuam indefinidamente, porque o excesso de cargas positivas e negativas na junção das regiões n e p produz um campo elétrico que impede a passagem de elétrons do lado n para o lado p, assim como impede a passagem de lacunas da região p para a n (PINHO; GALDINO, 2014). Com isso se estabelece um equilíbrio, formando uma zona com elétrons e lacunas, denominada de zona de depleção, onde há um campo elétrico na junção e uma diferença de potencial. A zona de depleção é caracterizada por teoricamente não existirem portadores ( $p \cong 0$  e  $n \cong 0$ ).

Existe uma corrente de portadores gerados termicamente que se anula, num estado de equilíbrio dinâmico, caracterizado pela movimentação aleatória dos pares elétrons-lacunas, através da junção pn no escuro e sem tensão externa de polarização. Há a corrente de deriva que é a corrente de portadores que se movem por efeito do campo elétrico da região em que são minoritários para as regiões em que são majoritários. A corrente de deriva é composta por duas componentes: a corrente de lacunas que se movem do lado n para o lado p ( $I_{Dp}$ ) e a corrente de elétrons que se movem do lado p para o lado n ( $I_{Dn}$ ). A corrente de difusão ( $i_d$ ) é

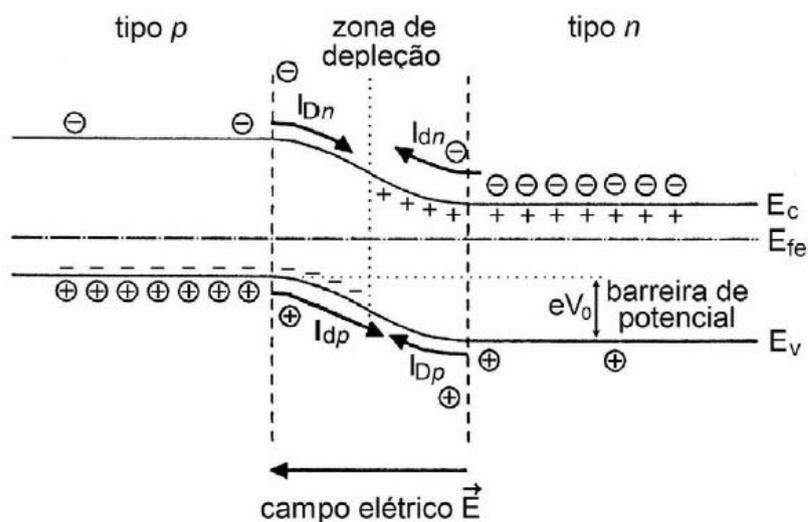
resultante da diferença das concentrações de elétrons e lacunas nos dois lados da junção pn. Esta corrente é composta por duas componentes: corrente de lacunas do lado p para o lado n ( $i_{dp}$ ) e a corrente de elétrons do lado n para o lado p ( $i_{dn}$ ). Estes portadores se deslocam por difusão das regiões em que são majoritários para as em que são minoritários, onde se recombinam. Como mostrado nas equações (75), (76) e (77) (PINHO; GALDINO, 2014) e ilustrado na figura 9.

$$i_D = i_{Dp} + i_{Dn} \quad (75)$$

$$i_d = i_{dn} + i_{dp} \quad (76)$$

$$i = i_D = i_d = 0 \quad (77)$$

Figura 9 - Junção pn no escuro em equilíbrio térmico, mostrando a barreira de potencial, e as correntes de difusão e de deriva.



Fonte: Oldenburg, 1994.

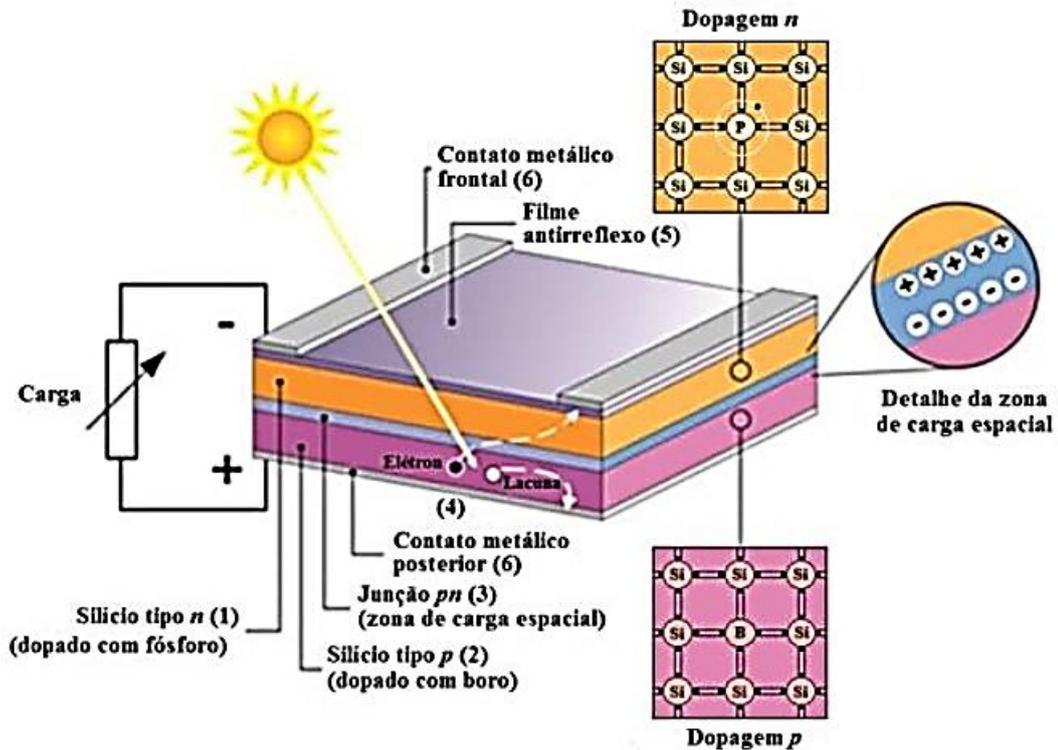
A diferença de potencial entre as regiões p e n pode ser entendida como resultado das diferenças no nível de Fermi ( $E_{FE}$ ) nos dois materiais. Quando estes materiais entram em contato, a situação de equilíbrio é alcançada quando os níveis de Fermi se igualam, o que ocorre pelo fluxo inicial de portadores e pelo estabelecimento do campo elétrico e da diferença de potencial, que é a responsável por impelir a corrente fotogerada.

A diferença de potencial na junção pn sem polarização externa e em equilíbrio, em função da temperatura, pode ser calculada pela equação (78) (LUQUE; HEGEDUS, 2003).

$$V_0(T) \cong \frac{k \cdot T}{q} \ln \left( \frac{N_d \cdot N_a}{n_i^2} \right) \quad (78)$$

Onde  $V_0$  é a diferença de potência na junção em função da temperatura  $T$ ,  $N_d$  corresponde a concentração de dopante tipo n,  $N_a$  corresponde a concentração de dopante do tipo p,  $q$  é a carga elementar do elétron ( $1,6 \times 10^{-16} C$ ). Na figura 10 é demonstrado a estrutura de uma célula fotovoltaica de camada única.

Figura 10 - Estrutura básica de uma célula fotovoltaica de silício.



Fonte: Moehlecke e Zanesco, 2005.

A corrente elétrica resultante em uma célula fotovoltaica é composta pela soma da corrente de uma junção pn no escuro (corrente de saturação reversa) com a corrente gerada pelos fótons absorvidos da radiação solar com energia maior que a energia da banda proibida. Esta equação da corrente é derivada da equação de *Schockley* do diodo ideal, conforme a equação (79) (PINHO; GALDINO, 2014).

$$I = I_L - I_0 \left[ \exp\left(\frac{qV}{nkT}\right) - 1 \right] \quad (79).$$

Na qual  $I_L$  é a corrente fotogerada dada em  $A$ ,  $I_0$  é a corrente de saturação reversa dada em  $A$  e  $n$  é o fator de idealidade do diodo. A corrente de saturação reversa pode ser calculada pela equação (80), a partir de propriedades do material e detalhes da construção da junção pn (LUQUE; HEGEDUS, 2003).

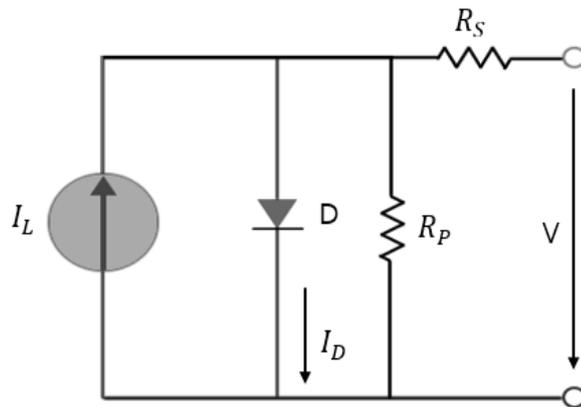
$$I_0 = q \cdot A \cdot n_i^2 \cdot \left( \frac{D_p}{L_p \cdot N_d} + \frac{D_n}{L_n \cdot N_a} \right) \quad (80).$$

Onde  $A$  corresponde a área da seção reta da junção  $pn$ ,  $D_p$  e  $D_n$  são os coeficientes de difusão de elétrons e lacunas no material,  $L_p$  e  $L_n$  são os comprimentos de difusão de elétrons e lacunas.

Pinho e Galdino (2014) afirmam que em uma célula fotovoltaica há resistência em série devido a: junção metal-semicondutor, malhas metálicas, regiões dopadas etc., assim como resistências em paralelo devido a pontos de curto-circuito na junção  $pn$ . A equação (81) determina a curva característica de uma célula fotovoltaica e a figura 11 ilustra o circuito equivalente.

$$I = I_L + I_0 \left[ \exp \left( \frac{q(V + IR_S)}{nkT} \right) - 1 \right] - \frac{V + IR_S}{R_p} \quad (81)$$

Figura 11 - Circuito equivalente básico para uma célula fotovoltaica.



Fonte: Próprio autor.

## 2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS BIDIMENSIONAIS NO DOMÍNIO DO TEMPO

O *FETD* discretiza o espaço através de elementos finitos determinados, que permitem a modelagem de estruturas geométricas genéricas. O domínio computacional deve ser fechado, podendo ser solucionado no domínio do tempo ou da frequência. A vantagem de utilizar o *FETD* é a possibilidade da convergência da simulação em uma ampla faixa de frequência e de haver métodos incondicionalmente estáveis para a discretização do tempo (JIAO; JIN, 2002).

O método *FDTD* discretiza o domínio computacional através de malha estruturada, podendo ser meios não homogêneos e o domínio computacional deve ser fechado, resolvendo o problema no domínio do tempo. Este método resulta em sistema de equações lineares explícitos, o método apresenta limitação do valor máximo do passo de tempo. Nesse aspecto, o *FETD* apresenta vantagem sobre o *FDTD* com relação ao passo de tempo, outra vantagem, é que através da interpolação dos elementos finitos, pode ser obtido a quantidade do campo vetorial em qualquer ponto do domínio computacional.

Simulações numéricas da propagação de ondas eletromagnéticas com base em equações diferenciais parciais (*PDE*) necessitam de condições de borda absorventes (*ABC*) para truncar o domínio computacional. As *PMLs* podem ser formuladas por divisão do campo (*field splitting*), coordenada estendida (*coordinate stretching*), ou por construção dos tensores anisotrópicos da permissividade e permeabilidade (JIAO; JIN, 2002). Neste capítulo é abordado a utilização das *PMLs* como condição de absorção e do *PEC* para truncar o domínio computacional utilizando coordenadas estendidas.

### 2.1 FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA ESCALAR BIDIMENSIONAL NO DOMÍNIO DO TEMPO COM AS *PMLs*

Desde que James C. Maxwell em 1864 introduziu a Teoria Dinâmica do Campo Eletromagnético, o estudo do eletromagnetismo tornou-se indispensável em pesquisas relacionadas à tecnologia moderna. As análises são realizadas desde os campos estáticos até os campos com altas frequências, como por exemplo, do espectro da luz visível com frequências da ordem de  $10^{14}$  Hz. Desta forma o uso dos métodos computacionais tornou-se fundamental para o desenvolvimento e otimização de dispositivos eletromagnéticos, que podem variar da escala em metros até escalas atômicas (GONÇALVES, 2007).

Em coordenadas cartesianas, o campo elétrico  $\vec{E}$  é dado por  $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$ , com isso, para introduzir as *PMLs*, partindo das equações de Maxwell modificadas, tem-se

$$\nabla_s \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \therefore \frac{1}{\mu} \nabla_s \times E = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (82)$$

aplicando o rotacional na equação (82), tem-se portanto

$$\nabla_s \times \frac{1}{\mu} \nabla_s \times E = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla_s \times H \quad (83)$$

onde,

$$\nabla_s \times H = J_i + \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad (84)$$

substituindo-se a equação (84) em (83), fica dado pela equação (85).

$$\nabla_s \times \frac{1}{\mu} \nabla_s \times E + \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma_e \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial J_i}{\partial t} \quad (85)$$

Conforme visto anteriormente no capítulo 1, o operador nabla das coordenadas estendidas é escrito como (CHEW; WEEDON, 1994):

$$\nabla_s = \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} \quad (86)$$

na qual  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são os vetores unitários associados as coordenadas  $x$  e  $y$ , para o caso bidimensional. Os parâmetros  $s_x$  e  $s_y$  são os parâmetros associados a *PML*, em que são dados por (PEKEL; MITTRA, 1995):

$$s_{x,y} = 1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \quad (87)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular e  $\sigma$  é a condutividade. Considerando as variações polinomiais no perfil de condutividade conforme proposto por Berenger, levam a *PMLs* com eficiência superior (ESQUERRE, 2003). A graduação polinomial é dada por (BERENGER, 1994):

$$\sigma(\rho) = \sigma_m \left( \frac{\rho}{L} \right)^n \quad (88)$$

na qual  $\sigma_m$  corresponde a condutividade de referência,  $n$  corresponde ao grau do polinômio,  $\rho$  é a distância em que se encontra o ponto dentro da região da *PML* e  $L$  é a largura da região *PML*. Para a condutividade com graduação polinomial, o coeficiente de reflexão fica dado por (BERENGER, 1994):

$$R(\theta) = e^{-\left(\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{\sigma_m \delta}{\varepsilon c}\right) \cos(\theta)} \quad (89)$$

onde  $\delta$  é a largura da camada *PML*, aplicando o logaritmo neperiano em  $R^{-1}(\theta)$  da equação (89), tem-se

$$\ln\left(\frac{1}{R(\theta)}\right) = \frac{2}{n+1} \frac{\sigma_m \delta}{\varepsilon c} \cos(\theta) \quad (90)$$

rearranjando a equação (90), obtém-se a condutividade em função da reflexão teórica, conforme demonstrado a seguir:

$$\sigma = \frac{(n+1)\varepsilon c}{2\delta} \cos^{-1}(\theta) \ln\left(\frac{1}{R(\theta)}\right) \quad (91)$$

substituindo (91) em (87), obtém-se o parâmetro  $s_{x,y}$  da *PML*, determinado por:

$$s_{x,y} = 1 - j \frac{(n+1)c}{2\omega\delta} \left(\frac{\rho}{\delta}\right) \ln\left(\frac{1}{R(\theta)}\right) \quad (92)$$

considerando que,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}, \quad \mu_r = 1 \quad (93)$$

substituindo a relação (93) na equação (92), tem-se finalmente,

$$s_{x,y} = 1 - j \frac{(n+1)c_0}{2\omega\sqrt{\varepsilon_r}\delta} \left(\frac{\rho}{\delta}\right) \ln\left(\frac{1}{R(\theta)}\right) \quad (94)$$

considerando a utilização do polinômio de grau  $n = 2$ , a equação (94) fica dada por (ESQUERRE, 2003):

$$s_{x,y} = 1 - j \frac{3c_0}{2\omega\sqrt{\varepsilon_r}\delta} \left(\frac{\rho}{\delta}\right) \ln\left(\frac{1}{R(\theta)}\right) \quad (95).$$

Com os parâmetros da *PML* definidos, pode-se avaliar a equação de onda, considerando a equação (85) e desenvolvendo o primeiro termo do lado direito da equação, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla_s \times \frac{1}{\mu} \nabla_s \times E = & \left[ \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y}{s_x \partial x} \right) - \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{s_y \partial y} \right) \right] \hat{x} + \\ & \left[ \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{s_y \partial y} \right) - \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y}{s_x \partial x} \right) \right] \hat{y} + \\ & \left[ -\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{s_x \partial x} \right) - \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{s_y \partial y} \right) \right] \hat{z} \end{aligned} \quad (96)$$

substituindo a equação (96) em (85), obtém-se três equações escalares, uma para cada coordenada, observa-se que na equação (96), na coordenada  $\hat{z}$ , tem-se uma equação que depende apenas do campo  $E_z$ , podendo ser resolvida independentemente das demais. Desta forma, para a componente  $\hat{z}$ , tem-se

$$-\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{s_x \partial x} \right) - \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{s_y \partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \sigma_e \frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{\partial J_i}{\partial t} \quad (97)$$

na qual a equação (97) é conhecida como sendo a equação escalar de Helmholtz, que descreve

o comportamento temporal e espacial do domínio eletromagnético. Considerando que,

$$s_x = s_y = s \quad (98)$$

pode-se assumir valores fixados para cada região da *PML*, conforme demonstrado na figura 4.

A tabela 1 demonstra estes valores de  $s'_x$  e  $s'_y$  (ESQUERRE, 2003; JIN, 2014).

Tabela 1 - Valores dos parâmetros  $s'_x$  e  $s'_y$ .

	$s'_x$	$s'_y$
$\perp \hat{x}$	1	$s$
$\perp \hat{y}$	$s$	1
$\perp \hat{x}, \hat{y}$	1	1

Na região de propagação os valores de  $s$ ,  $s'_x$  e  $s'_y$  são unitários, permitindo a propagação da onda eletromagnética no meio. Desta forma, a equação (97) pode ser reescrita como:

$$-\frac{s'_x}{s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{s'_x}{s} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{s'_y}{s} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{s'_y}{s} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \sigma_e \frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{\partial J_i}{\partial t} \quad (99).$$

Nos casos de óptica, comumente não há interesse em casos nos quais há cargas livres ou densidades de correntes, portanto, para este trabalho em específico, considera-se a fonte de densidade de corrente  $J_i$  igual a zero. Desta forma, a equação (99) fica dada por:

$$-\frac{s'_x}{s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{s'_x}{s} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{s'_y}{s} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{s'_y}{s} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \sigma_e \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad (100).$$

Para obter a solução com o método dos elementos finitos, é necessário aplicar o método de Galerkin (JIN, 2014), portanto, deve-se inicialmente obter o resíduo da equação (100), conforme demonstrado abaixo:

$$-\frac{s'_x}{s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{s'_x}{s} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{s'_y}{s} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{s'_y}{s} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \sigma_e \frac{\partial E_z}{\partial t} = r \quad (101)$$

e assim, o resíduo ponderado para o domínio computacional fica dado por (JIN, 2014):

$$R = \iint_{\Omega} r \, d\Omega, \quad i = 1, 2, 3. \quad (102).$$

Aplicando o resíduo (101) na equação (102) e considerando que o domínio é truncado por *PEC*, tem-se:

$$R = \iint_{\Omega} \left[ -\frac{s'_x}{s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{s'_x}{s} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{s'_y}{s} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{s'_y}{s} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \sigma_e \frac{\partial E_z}{\partial t} \right] dx \, dy \quad (103).$$

Com o domínio discretizado, o campo elétrico fica dado em função do somatório dos campos elétricos individuais de cada elemento, conforme demonstrado a seguir:

$$E_z = \sum_{i=1}^N E_{z_i} N_i^e \quad (104)$$

onde  $E_{z_i}$  é o campo elétrico dos elementos finitos triangulares,  $N_i^e$  é a função de base  $i$  do elemento finito  $e$  conforme descrito na equação (21) e  $N$  é a quantidade de elementos finitos no domínio computacional. Conforme demonstrado na equação (20), o campo elétrico do elemento finito triangular é dado por:

$$E_{z_i} = \sum_{j=1}^3 E_{z_j} N_j^e \quad (105)$$

em que  $E_{z_j}$  corresponde ao campo elétrico dos nós dos elementos finitos triangulares e  $N_j^e$  é a função de base  $j$  do elemento  $e$ , portanto,  $E_z$  é definido como:

$$E_z = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 E_{z_j} N_i^e N_j^e \quad (106).$$

Substituindo a equação (106) na equação (103), é obtido então uma equação integral equivalente do sistema dado pelo método de Galerkin, assim:

$$R = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega^e} \left[ -\frac{s'_x}{s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{s'_x}{s} \frac{\partial E_{z_j} N_i^e N_j^e}{\partial x} \right) - \frac{s'_y}{s} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{s'_y}{s} \frac{\partial E_{z_j} N_i^e N_j^e}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 E_{z_j} N_i^e N_j^e}{\partial t^2} + \sigma_e \frac{\partial E_{z_j} N_i^e N_j^e}{\partial t} \right] dx dy \quad (107).$$

Efetuando a integração por partes da equação (107), para reescrever as integrais que tem segunda derivada espacial, em integrais de derivadas de primeira ordem, e efetuando o somatório, obtém-se como resultado uma equação diferencial ordinária (*ODE*) matricial característica do método *FETD*, conforme demonstrado na equação (31), assim (JIAO; JIN, 2002):

$$[T] \frac{\partial^2 \{E\}}{\partial t^2} + [T_\sigma] \frac{\partial \{E\}}{\partial t} + [S] \{E\} = 0 \quad (108)$$

onde nesta equação,  $\{E\}$  é dado por

$$\{E\} = [E_{z_1}, E_{z_2}, \dots, E_{z_N}]^T \quad (109)$$

e as matrizes  $[T]$ ,  $[T_\sigma]$  e  $[S]$  são matrizes quadradas, simétricas e esparsas, dadas por:

$$T_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \varepsilon N_i^e N_j^e dx dy \quad (110),$$

$$T_{\sigma ij}^e = \iint_{\Omega^e} \sigma_e N_i^e N_j^e dx dy \quad (111),$$

$$S_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \frac{1}{\mu} \left[ \frac{s_x'^2}{s^2} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{s_y'^2}{s^2} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] dx dy \quad (112).$$

Os parâmetros  $s'_x$ ,  $s'_y$  e  $s$  estão dados pela tabela 1 e pela equação (94), respectivamente, e também demonstrados na figura 4.

## 2.2 DISCRETIZAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO COM O MÉTODO DE NEWMARK- $\beta$

Para efetuar a discretização no domínio do tempo, a variável de tempo  $t$ , pode ser escrita como:

$$t = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad (113)$$

onde  $\Delta t$  é comumente chamado de intervalo do passo de tempo e  $n$  corresponde ao passo de tempo. O intervalo do passo de tempo  $\Delta t$ , pode ser determinado por:

$$\Delta t = \frac{t_f - t_0}{f_s} \quad (114)$$

na qual,  $t_f$  e  $t_0$  são o tempo final e inicial, respectivamente, e  $f_s$  é correspondente a frequência de amostragem do sinal.

No decorrer deste tópico, por uma questão de simplicidade, o campo elétrico no domínio do tempo é dado por:

$$E(n\Delta t) = E^n \quad (115)$$

em que o sobrescrito  $n$  representa o passo de tempo.

No método das diferenças frontais (*Forward Difference*), a função  $u(t + \Delta t)$  fica dada pela expansão da série de Taylor com relação a  $t$  por (JIN, 2014):

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + O[\Delta t^3] \quad (116)$$

onde  $O[\Delta t^3]$  denota a soma de todos os termos remanescentes que contém  $\Delta t^p$  com  $p \geq 3$ .

Considerando a equação (116), tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} + O[\Delta t] \quad (117)$$

desconsiderando a soma dos termos remanescentes  $O[\Delta t]$ , a equação (117) fica dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \quad (118)$$

na qual, esta aproximação é chamada de representação das diferenças frontais (JIN, 2014). Ao aplicar a diferença frontal em  $\partial u/\partial t$ , obtém-se a representação da diferença frontal da segunda derivada temporal, assim:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx -\frac{1}{\Delta t^2}(u^{n+1} - u^n) + \frac{1}{\Delta t^2}u^{n+2} - \frac{1}{\Delta t^2}u^{n+1} \approx \frac{u^{n+2} - 2u^{n+1} + u^n}{\Delta t^2} \quad (119)$$

na qual é chamado de precisão de primeira ordem (JIN, 2014). Aplicando a equação (119) e (99) na equação (108), tem-se

$$\frac{1}{\Delta t^2}[T]\{E\}^{n+1} = \left\{ \frac{2}{\Delta t^2}[T] - \frac{1}{\Delta t}[T_\sigma] \right\} \{E\}^n - \left\{ \frac{1}{\Delta t^2}[T] - \frac{1}{\Delta t}[T_\sigma] + [S] \right\} \{E\}^{n-1} \quad (120).$$

Observa-se que para este sistema, é necessário efetuar uma entrada  $\{E\}^0$  e  $\{E\}^1$ , para então o sistema ser resolvido, obtendo-se  $\{E\}^2$ , este processo é comumente chamado de *time stepping*. O método das diferenças frontais é condicionalmente estável.

Um método semelhante ao método das diferenças frontais, é o método de Newmark introduzido em 1959, tem por objetivo efetuar a discretização no domínio temporal, é um método de integração direta muito útil, em que originalmente foi desenvolvido para utilização em dinâmica estrutural (NEWMARK, 1959). Neste método, a função  $u(t)$  e suas derivadas no tempo ficam dadas por:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \frac{\partial u(t)}{\partial t} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + \beta \Delta t^2 \frac{\partial^2 u(t + \Delta t)}{\partial t^2} \quad (121)$$

e,

$$\frac{\partial u(t + \Delta t)}{\partial t} = \frac{\partial u(t)}{\partial t} + (1 - \gamma) \Delta t \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + \gamma \Delta t \frac{\partial^2 u(t + \Delta t)}{\partial t^2} \quad (122)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são dois parâmetros que devem ser escolhidos para controlar a precisão e estabilidade do tempo de integração. Utilizando as equações (121) e (122) pode-se chegar na equação diferencial de segunda ordem. Desta forma, aplicando o método de Newmark para discretizar a equação (108), tem-se

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\Delta t^2}[T] + \frac{\gamma}{\Delta t}[R] + \beta[S] \right\} \{E\}^{n+1} &= \left\{ \frac{2}{\Delta t^2}[T] - \frac{(1 - 2\gamma)}{\Delta t}[T_\sigma] - \left( \frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right)[S] \right\} \{E\}^n \\ &- \left\{ \frac{1}{\Delta t^2}[T] - \frac{(1 - \gamma)}{\Delta t}[T_\sigma] + \left( \frac{1}{2} - \gamma + \beta \right)[S] \right\} \{E\}^{n-1} \end{aligned} \quad (123).$$

A versão mais usual do método de Newmark é dada pela escolha de  $\gamma = 1/2$ , na qual, este método é conhecido como método de Newmark- $\beta$  (JIN, 2014). Desta forma, a equação

(123) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} [T] + \frac{1}{2\Delta t} [T_\sigma] + \beta [S] \right\} \{E\}^{n+1} &= \left\{ \frac{2}{\Delta t^2} [T] - (1 - 2\beta) [S] \right\} \{E\}^n \\ &- \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} [T] - \frac{1}{2\Delta t} [T_\sigma] + \beta [S] \right\} \{E\}^{n-1} \end{aligned} \quad (124).$$

Uma escolha ótima para o valor de  $\beta$ , é dada por todo  $\beta \geq 1/4$ , assim o sistema se torna incondicionalmente estável (JIN, 2014). Desta forma a equação (124) pode ser dada por:

$$[M^0] \{E\}^{n+1} = -[M^1] \{E\}^n - [M^2] \{E\}^{n-1} \quad (125)$$

na qual,

$$[M^0] = \frac{1}{\Delta t^2} [T] + \frac{1}{2\Delta t} [T_\sigma] + \frac{1}{4} [S] \quad (126)$$

$$[M^1] = -\frac{2}{\Delta t^2} [T] + \frac{1}{2} [S] \quad (127)$$

$$[M^2] = \frac{1}{\Delta t^2} [T] - \frac{1}{2\Delta t} [T_\sigma] + \frac{1}{4} [S] \quad (128).$$

Considerando o sistema matricial demonstrado na equação (124) para um meio sem perdas, ou seja,  $[T_\sigma] = [0]$ , e sabendo que os meios com perdas não alteram o efeito da condição de estabilidade (JIN, 2014), a equação (124) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} [T] + \beta [S] \right\} \{E\}^{n+2} - \left\{ \frac{2}{\Delta t^2} [T] - (1 - 2\beta) [S] \right\} \{E\}^{n+1} \\ + \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} [T] + \beta [S] \right\} \{E\}^n = 0 \end{aligned} \quad (125)$$

em que transformada-z correspondente da equação (125) está demonstrada a seguir:

$$\left\{ \frac{1}{\Delta t^2} [T] + \beta [S] \right\} z^2 \{E\} - \left\{ \frac{2}{\Delta t^2} [T] - (1 - 2\beta) [S] \right\} z \{E\} + \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} [T] + \beta [S] \right\} \{E\} = 0 \quad (126).$$

Para o sistema matricial usando o método de Newmark- $\beta$ , a equação característica é dada por (JIN, 2014):

$$(z - 1)^2 + \lambda [\beta z^2 + (1 - 2\beta)z + \beta] = 0 \quad (127)$$

onde  $\lambda$  é o autovalor da equação (126) em um meio sem perda. Quando  $\beta \geq 1/4$ , as raízes da equação característica (127) estão sempre dentro do círculo unitário, assim, o método Newmark- $\beta$  com  $\beta \geq 1/4$  é incondicionalmente estável conforme afirmado anteriormente (JIN, 2014).

## 2.3 EXPERIMENTOS E RESULTADOS

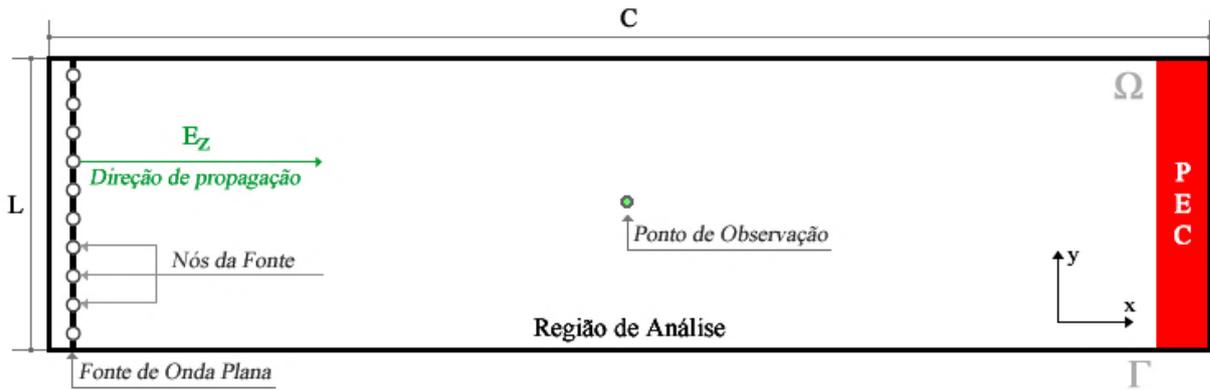
Nas seções anteriores, está demonstrado um algoritmo para a simulação da propagação de ondas eletromagnéticas no domínio do tempo utilizando o *FETD* com *PMLs* como condições absorvedoras com a fronteira do domínio computacional truncada por um *PEC*. Através do método Newmark- $\beta$  a segunda derivada temporal é considerada, com isso, obtém-se a possibilidade de simular a propagação de pulsos de alta frequência, e conforme demonstrado, o método é incondicionalmente estável para  $\beta \geq 1/4$ , sendo possível a utilização de passos de tempo maiores. Sendo assim, nesta seção, o algoritmo desenvolvido é validado, aplicando-se o método para casos específicos, com o intuito de demonstrar computacionalmente os fenômenos eletromagnéticos e comparar os resultados numéricos obtidos com os analíticos. Os resultados demonstrados nesta seção, estão limitados pelo ambiente de simulação com as especificações demonstradas na tabela 2.

Tabela 2 - Características do ambiente de simulação.

<b>Processador</b>	Intel Core i5-7400
<b>Clock</b>	3.5 GHz
<b>Memória RAM</b>	8 GB
<b>Sistema Operacional</b>	Windows 10 Pro 64 bits
<b>MATLAB</b>	R2018

### 2.3.1 Propagação no Espaço Livre

O primeiro problema proposto, é para validar a propagação da onda eletromagnética no espaço livre, isto é, em um meio sem perdas, excitando o campo elétrico  $E_z$  através de uma fonte de onda plana em direção a borda condutora eletricamente perfeita. A figura 12 ilustra o caso 1, onde tem-se a fonte de onda plana em uma extremidade e o *PEC* em outra extremidade, no centro do domínio  $\Omega$  há um ponto de observação para efetuar a medição dos resultados numéricos. Este domínio tem dimensões  $L$  e  $C$  referentes a largura e comprimento, respectivamente.

Figura 12 – Domínio  $\Omega$ , caso 1.

Fonte: Próprio autor.

Considerando uma onda plana a uma frequência de 10 GHz propagando-se no espaço livre (vácuo), sem perdas, incidente a uma superfície plana *PEC*, isto é,  $\sigma_2 \rightarrow \infty$ . Tem-se que

$$\lim_{\sigma_2 \rightarrow \infty} \frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_0} = \infty \gg 1 \quad (128)$$

na qual a relação (128) indica que a região *PEC* é perfeitamente condutora para qualquer frequência. Para bons condutores a constante de atenuação  $\alpha$  e a constante de fase  $\beta$ , ficam dados por:

$$\alpha_2 = \beta_2 = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma_2}{2}} \quad (129)$$

portanto, o ângulo de transmissão fica dado por (BALANIS, 1989):

$$\sin \theta_t = \frac{j\beta_1}{\alpha_2 + j\beta_2} \sin \theta_i = \frac{j\beta_1}{\sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma_2}{2}} (1 + j)} \sin \theta_i \quad (130)$$

aplicando o limite em (130) com  $\sigma_2$  tendendo ao infinito, tem-se

$$\lim_{\sigma_2 \rightarrow \infty} \sin \theta_t = \lim_{\sigma_2 \rightarrow \infty} \frac{j\beta_1}{\sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma_2}{2}} (1 + j)} \sin \theta_i = 0 \therefore \theta_t = 0 \quad (131).$$

Do ângulo de transmissão  $\theta_t = 0$ , o coeficiente de reflexão para polarização perpendicular pode ser reduzido para:

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1} = \frac{\cos \theta_i - \eta_1/\eta_2}{\cos \theta_i + \eta_1/\eta_2} \quad (132).$$

Para o espaço livre, a impedância intrínseca  $\eta_1$  é dada por:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (133)$$

e para o *PEC*, a impedância intrínseca  $\eta_2$  fica dada pela equação (134).

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma_2 + j\omega\varepsilon_0}} \quad (134)$$

Efetuada a relação  $\eta_1/\eta_2$ , tem-se

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}{\sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma_2 + j\omega\varepsilon_0}}} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{j\omega\varepsilon_0} + 1} \approx \sqrt{\frac{\sigma_2}{j\omega\varepsilon_0}} \quad (135)$$

onde

$$\lim_{\sigma_2 \rightarrow \infty} \frac{\eta_1}{\eta_2} = \lim_{\sigma_2 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sigma_2}{j\omega\varepsilon_0}} = \infty \gg 1 \geq \cos \theta_i \quad (136).$$

Substituindo a relação (135) na equação (132), tem-se

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\sigma_2/j\omega\varepsilon_0}}{\cos \theta_i + \sqrt{\sigma_2/j\omega\varepsilon_0}} \quad (137)$$

considerando o ângulo de incidência  $\theta_i = 0$  e a relação (136), o coeficiente de reflexão para polarização perpendicular fica dado por:

$$\Gamma_{\perp} = \frac{-\sqrt{\sigma_2/j\omega\varepsilon_0}}{\sqrt{\sigma_2/j\omega\varepsilon_0}} \cong -1 \quad (138)$$

assim para condutores muito bons, o ângulo de refração se aproxima de zero e a magnitude da reflexão para polarização perpendicular se aproxima da unidade, independentemente do ângulo de incidência. Portanto o campo elétrico refletido a ser observado, fica dado por:

$$E_r = \Gamma_{\perp} E_f \quad (139)$$

onde  $E_f$  corresponde ao campo elétrico da fonte. Considerando que o campo elétrico da fonte é um pulso senoidal, conforme descrito abaixo:

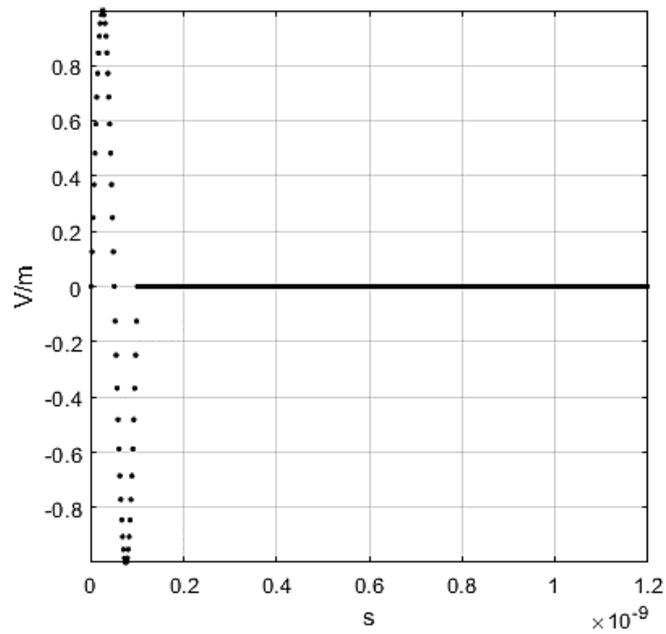
$$E_f = \sin(2\pi f_0 n \Delta t) \quad (140)$$

o campo elétrico refletido, fica dado por:

$$E_r = -\sin(2\pi f_0 n \Delta t) \quad (141).$$

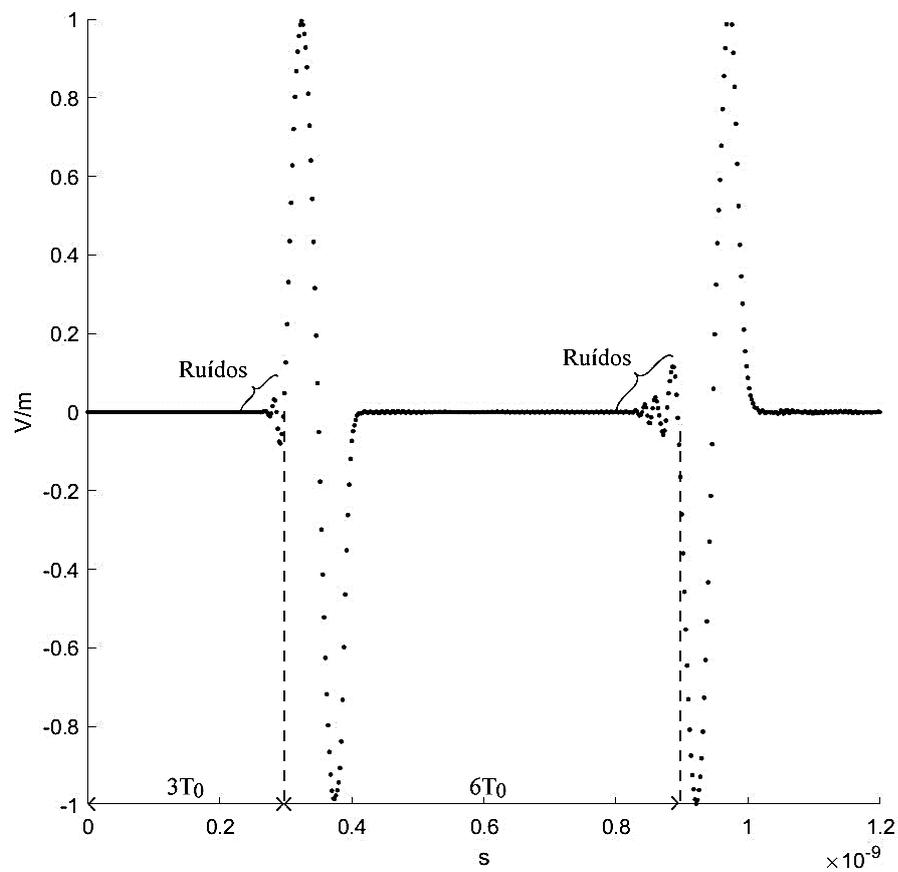
Para a simulação utilizando o *FETD*, utilizou-se um pulso senoidal com duração de 0,1ns, com 600 passos de tempo no total, o domínio computacional com uma largura de  $1\lambda$  e um comprimento de  $6\lambda$ . Para o domínio computacional com o comprimento de  $6\lambda$  a onda deve viajar 3 ciclos para chegar ao ponto de medição e mais 6 ciclos para retornar devido a reflexão, conforme a figura 14 demonstra. A malha contém 8150 elementos finitos triangulares, 4251 nós, sendo que 29 são nós da fonte e 29 são nós do *PEC*. O tempo de observação é de 1,2ns. A figura 13 demonstra a discretização da fonte de excitação.

Figura 13 - Fonte de excitação no tempo.



Fonte: Próprio autor.

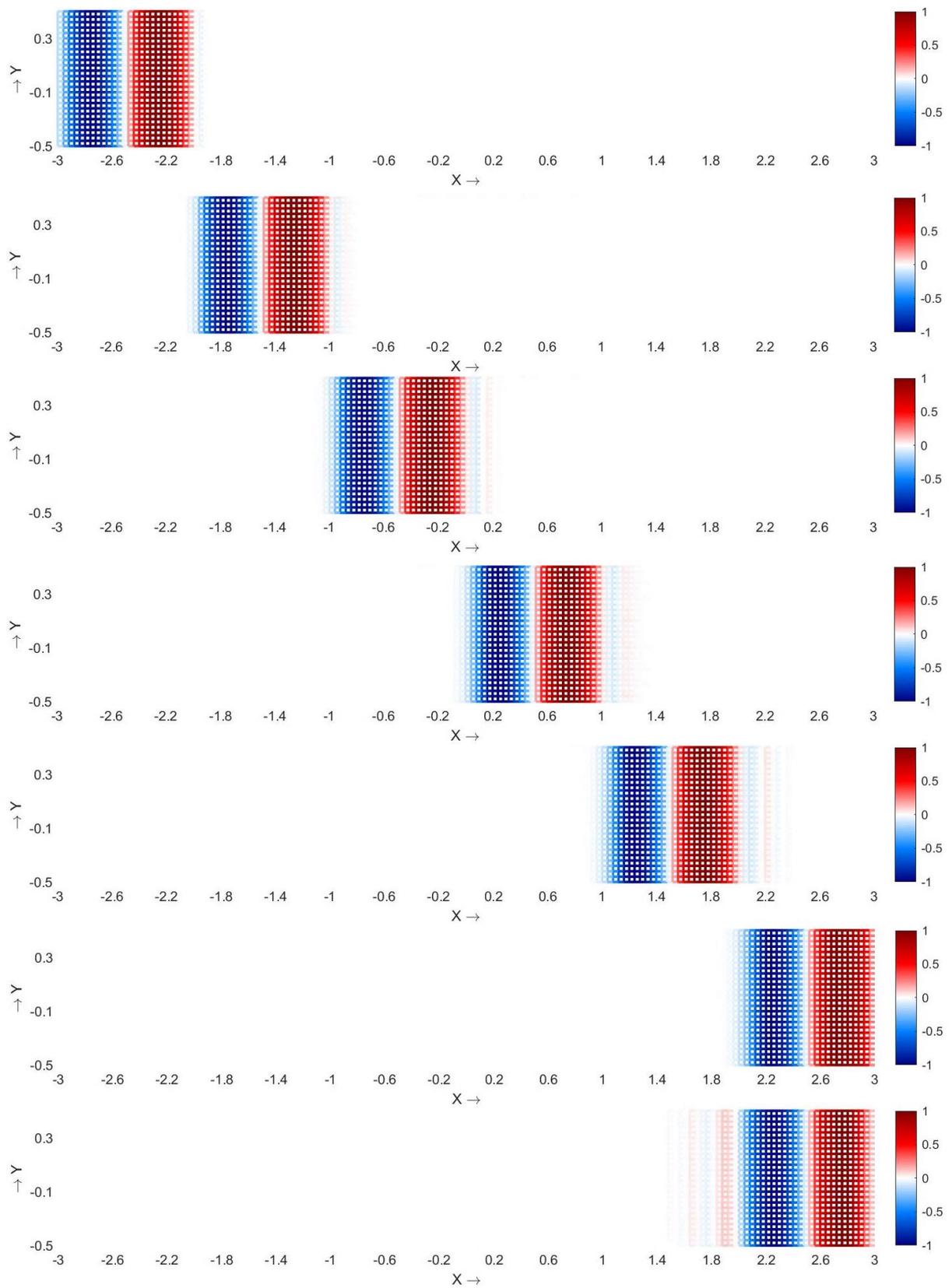
Figura 14 - Amplitude do campo elétrico em função do tempo, no ponto de observação.



Fonte: Próprio autor.

A figura 15 apresenta a evolução no tempo do pulso senoidal ao longo da direção de propagação para cada 50 passos de tempo, até a reflexão total (350 passos de tempo).

Figura 15 - Evolução do campo elétrico no domínio computacional em (a)  $n=50$  (b)  $n=100$  (c)  $n=150$  (d)  $n=200$  (e)  $n=250$  (f)  $n=300$  (g)  $n=350$ .



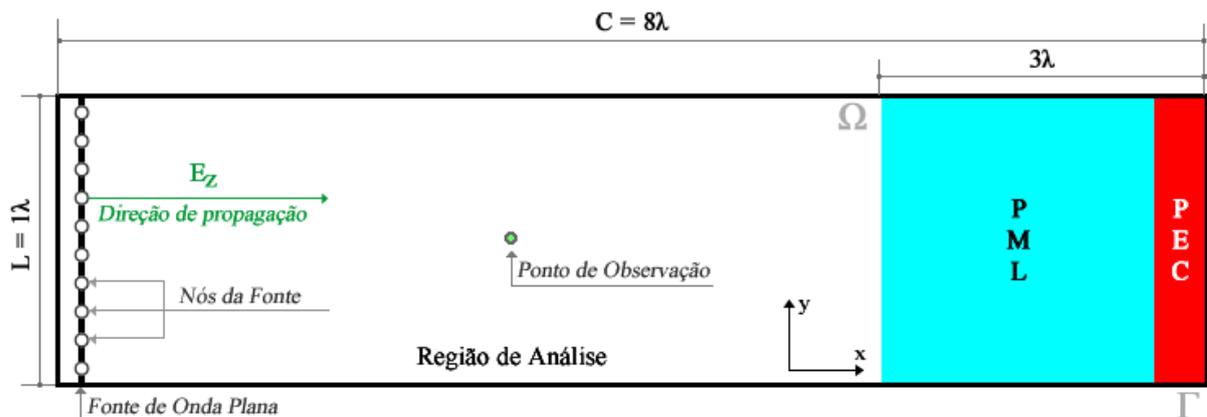
Fonte: Próprio autor.

Na figura 14 e 15, nota-se que ocorre a reflexão total, com o campo refletido defasado de  $180^\circ$  do sinal da fonte, conforme previsto teoricamente. Nota-se também na figura 14, que ocorrem ruídos que antecedem a onda propagante, devido a discretização do domínio espacial, na figura 15 é perceptível graficamente estes ruídos.

### 2.3.2 Propagação no Espaço Livre com *PMLs*

Para o segundo problema proposto, aplica-se o algoritmo desenvolvido para analisar o desempenho das *PMLs* através da propagação da onda eletromagnética no espaço livre com condições absorventes. Similar ao primeiro problema proposto, excita-se o campo elétrico  $E_z$  através de uma fonte de onda plana em direção as *PMLs* com o domínio computacional truncado por uma região *PEC*. Na figura 16 o segundo problema proposto está demonstrado. A posição da fonte de onda plana encontra-se na extremidade esquerda do domínio e as *PMLs* com a região *PEC* na extremidade direita, na região de análise há um ponto de observação para efetuar as medições do campo elétrico.

Figura 16 – Domínio  $\Omega$ , caso 2.



Fonte: Próprio autor.

Conforme demonstração teórica, as *PMLs* têm por objetivo atenuar a onda propagante de forma a não se obter reflexões na interface com a região de análise, desta forma, conforme denominação, serem perfeitamente casadas com o meio. Porém, devido a discretização do domínio espacial observa-se através de simulações que há reflexões residuais.

No algoritmo desenvolvido, utilizou-se um pulso senoidal com duração de 0,1ns, com 600 passos de tempo no total, idêntico ao demonstrado na figura 13. A malha contém 10236 elementos finitos triangulares, 5336 nós, sendo que 28 são nós da fonte, 27 são nós do *PEC*, e

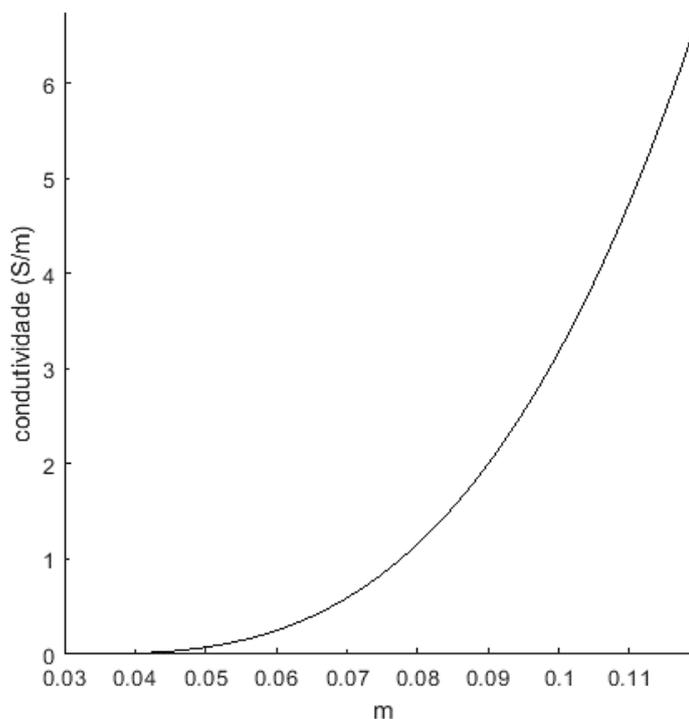
1847 nós pertencem a região da *PML*, contendo 3836 elementos finitos, na qual corresponde a 71 camadas perfeitamente casadas. O tempo de observação utilizado é de 1,2ns.

Considerando o perfil de condutividade polinomial de grau 3, dado por:

$$\sigma(\rho) = \sigma_m \left( \frac{\rho}{C_{PML}} \right)^3 \quad (142)$$

na qual  $C_{PML}$  corresponde ao comprimento da região *PML* igual a  $3\lambda$  e  $\sigma_m$  igual a  $6,7461 \text{ S/m}$ , tem-se o perfil de condutividade demonstrado na figura 17.

Figura 17 - Condutividade polinomial de grau 3.



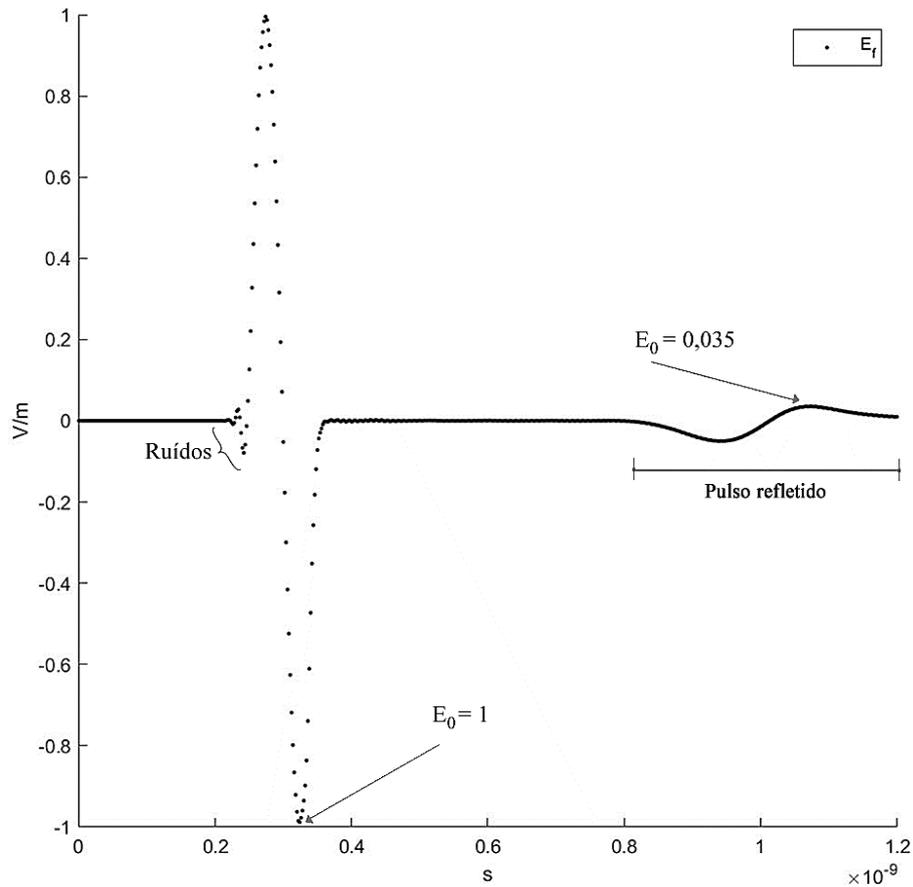
Fonte: Próprio autor.

Desta forma, a reflexão teórica, conforme equação (89), é dada pela expressão a seguir:

$$R(0) = e^{-\left(\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{\sigma m \delta}{\epsilon c}\right) \cos(\theta)} = e^{-\left(\frac{2}{3+1}\right)\left(\frac{\sigma m \delta}{\epsilon_0 c_0}\right)} \quad (143).$$

A fim de mensurar a eficiência obtida pela *PML* para a frequência de 10 GHz, é necessário observar o campo elétrico refletido e comparar com o campo elétrico incidente. A figura 18 demonstra os campos elétricos obtidos no tempo de observação.

Figura 18 - Campo elétrico incidente e refletido no ponto de observação da região de análise.



Fonte: Próprio autor.

O pulso positivo da fonte é acompanhado de ruídos, conforme demonstrado anteriormente, estes ruídos refletidos se somam com a reflexão do pulso positivo aumentando a reflexão numérica, observada no pico negativo do pulso refletido. Por este motivo, considera-se o pico positivo do pulso refletido, que corresponde ao pico negativo da fonte.

A amplitude numérica no ponto de observação do pico negativo da fonte é dada por:

$$E_{pn} = 0,99494 \text{ [V/m]} \quad (144)$$

e a amplitude do pico positivo refletido é da ordem de:

$$E_{pr} = 0,0355 \text{ [V/m]} \quad (145)$$

relacionando os picos obtidos, tem-se o coeficiente de reflexão de:

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i} = \frac{E_{pr}}{E_{pn}} = \frac{0,0355}{0,99494} \cong 0,0357 \quad (146)$$

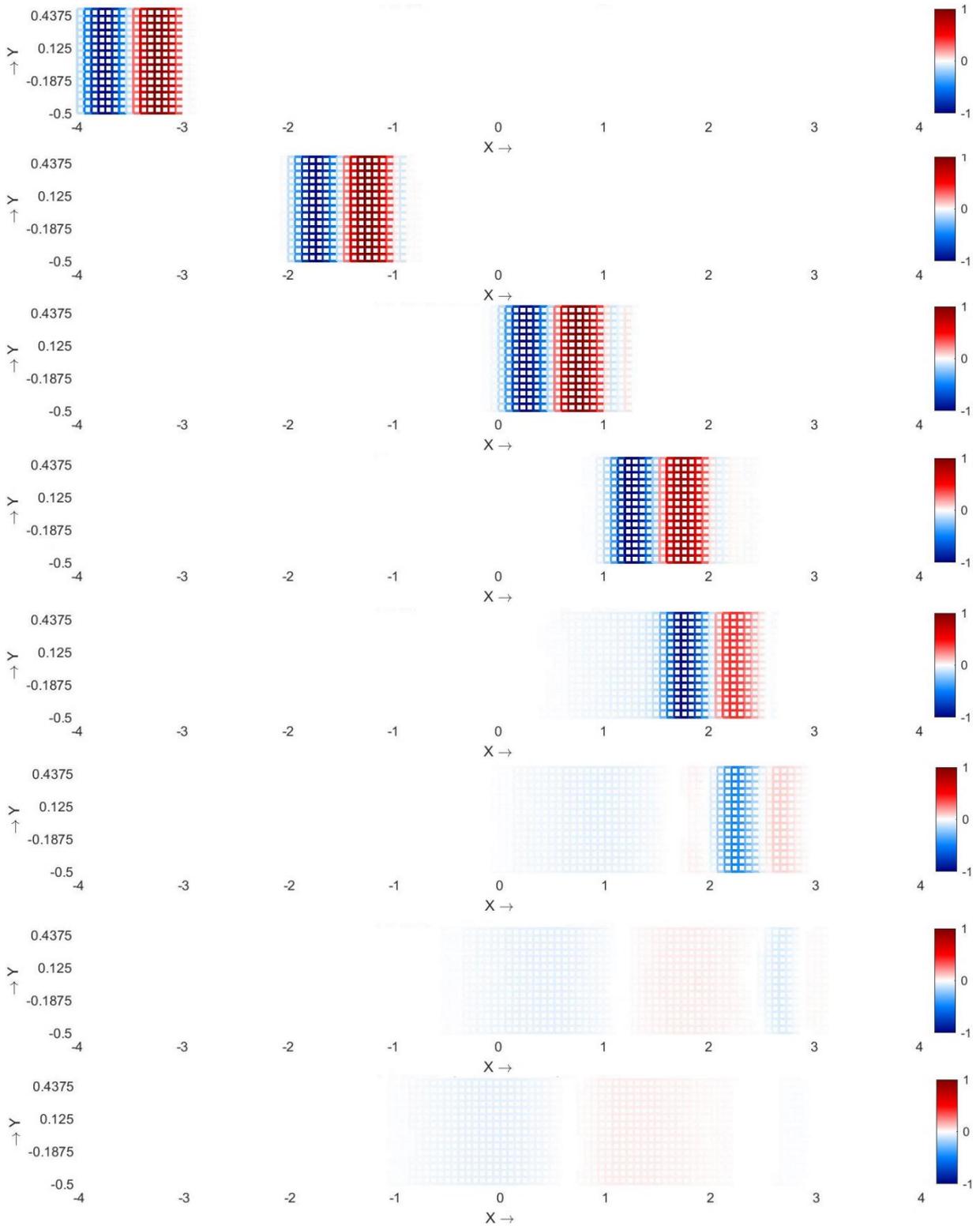
em dB, tem-se

$$\Gamma(\text{dB}) = 20 \log_{10} |\Gamma| \quad (147)$$

resultando em um coeficiente de reflexão de  $\Gamma_{dB} = -28,95 \text{ dB}$ . O coeficiente de reflexão obtido é perfeitamente coerente com a natureza reflexiva da *PML*, utilizando o perfil de

condutividade de grau 3. A figura 19 demonstra a evolução do campo elétrico no domínio computacional.

Figura 19 - Evolução do campo elétrico no domínio computacional em (a)  $n=50$  (b)  $n=150$  (c)  $n=250$  (d)  $n=300$  (e)  $n=325$  (f)  $n=350$  (g)  $n=375$  (h)  $n=400$ .



Fonte: Próprio autor.

### 3 EXPERIMENTOS E RESULTADOS

O capítulo anterior demonstrou o desenvolvimento das equações de onda escalar bidimensional para o campo elétrico que descreve o comportamento da onda eletromagnética, na qual o meio é descrito pelos parâmetros construtivos ( $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$ ). Para solucionar a equação característica é necessário discretizar o domínio espacial e temporal, de tal forma que o sistema é transformado em um conjunto de equações matriciais recursivas que formam a base do *FETD*.

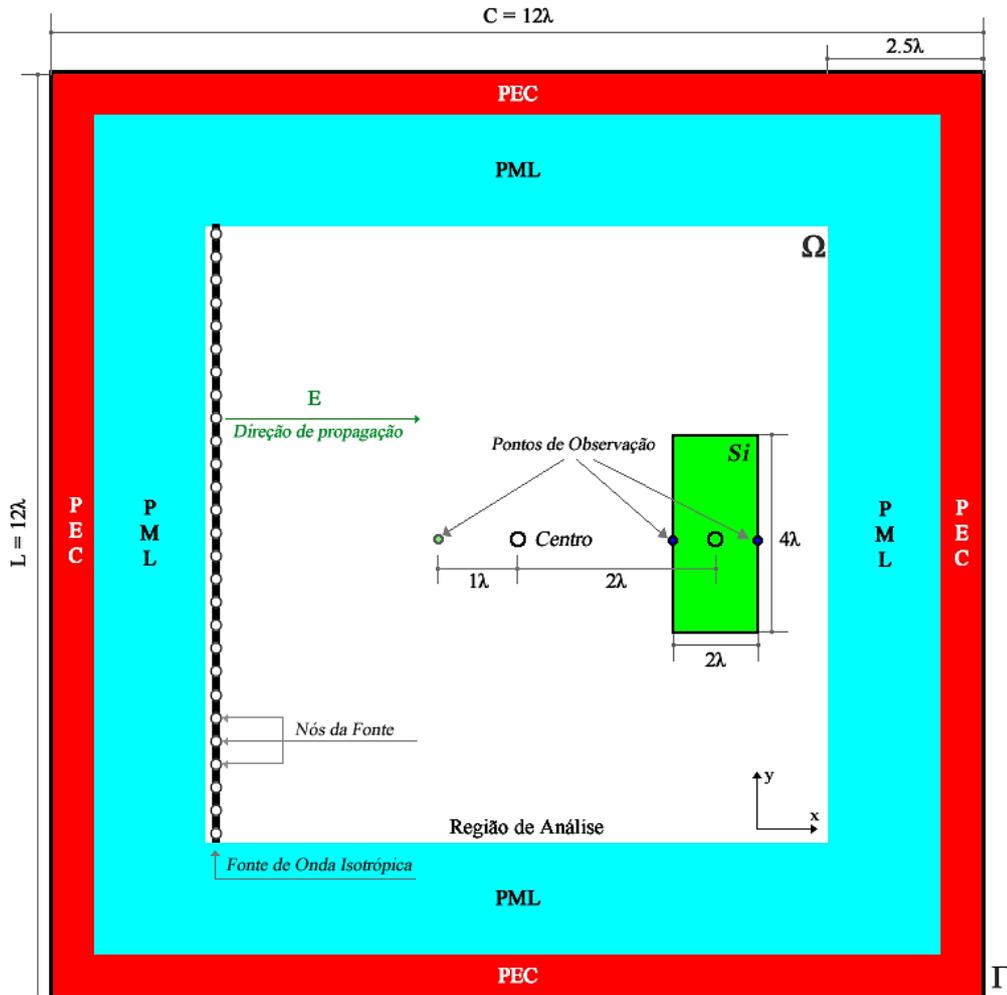
Este capítulo apresenta a solução da equação de onda aplicada a células fotovoltaicas utilizando o *FETD*, com o objetivo de demonstrar a distribuição e a absorção do campo elétrico no interior da célula fotovoltaica, e obter a tensão elétrica nos terminais. A primeira parte deste capítulo apresenta a solução da equação de onda aplicada a um material semicondutor, comparando os resultados analíticos com os resultados numéricos obtidos. A segunda parte apresenta a modelagem da célula fotovoltaica convencional e a modelagem do espectro luminoso. A terceira parte mostra a simulação e resultados obtidos para o experimento proposto utilizando o algoritmo numérico desenvolvido.

#### 3.1 EXPERIMENTO EM MATERIAL SEMICONDUTOR

O experimento proposto é para observar o comportamento da propagação da onda eletromagnética no espaço livre, excitando o campo elétrico  $E_z$  através de uma fonte isotrópica em direção a um material semicondutor. A figura 20 demonstra o experimento, onde tem-se a fonte isotrópica em uma extremidade e o material semicondutor em outra extremidade, o material tem  $4\lambda$  de largura e  $2\lambda$  de comprimento, no centro do domínio  $\Omega$  e nas extremidades do material há pontos de observação para efetuar as medições dos resultados numéricos. Este domínio tem dimensões  $L = 12\lambda$  e  $C = 12\lambda$  referentes a largura e comprimento, respectivamente.

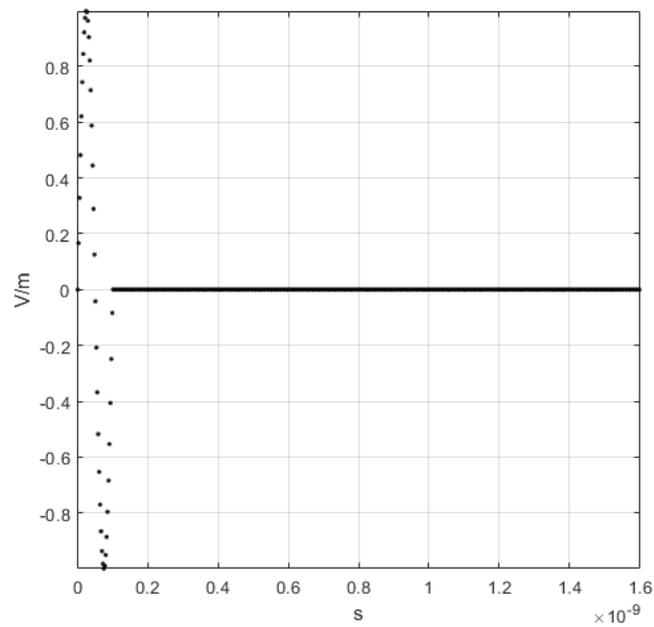
No algoritmo desenvolvido, utilizou-se um pulso senoidal com frequência de 10 GHz correspondente a duração de 0,1ns, com 600 passos de tempo no total, conforme demonstrado na figura 21. A malha contém 13621 elementos finitos triangulares, 6978 nós, sendo que 50 são nós da fonte, 333 são nós do *PEC*, e 4520 nós pertencem a região da *PML*, na qual corresponde a 16 camadas perfeitamente casadas. O tempo de observação utilizado é de 1,6ns.

Figura 20 – Propagação da onda na região de análise.



Fonte: Próprio autor.

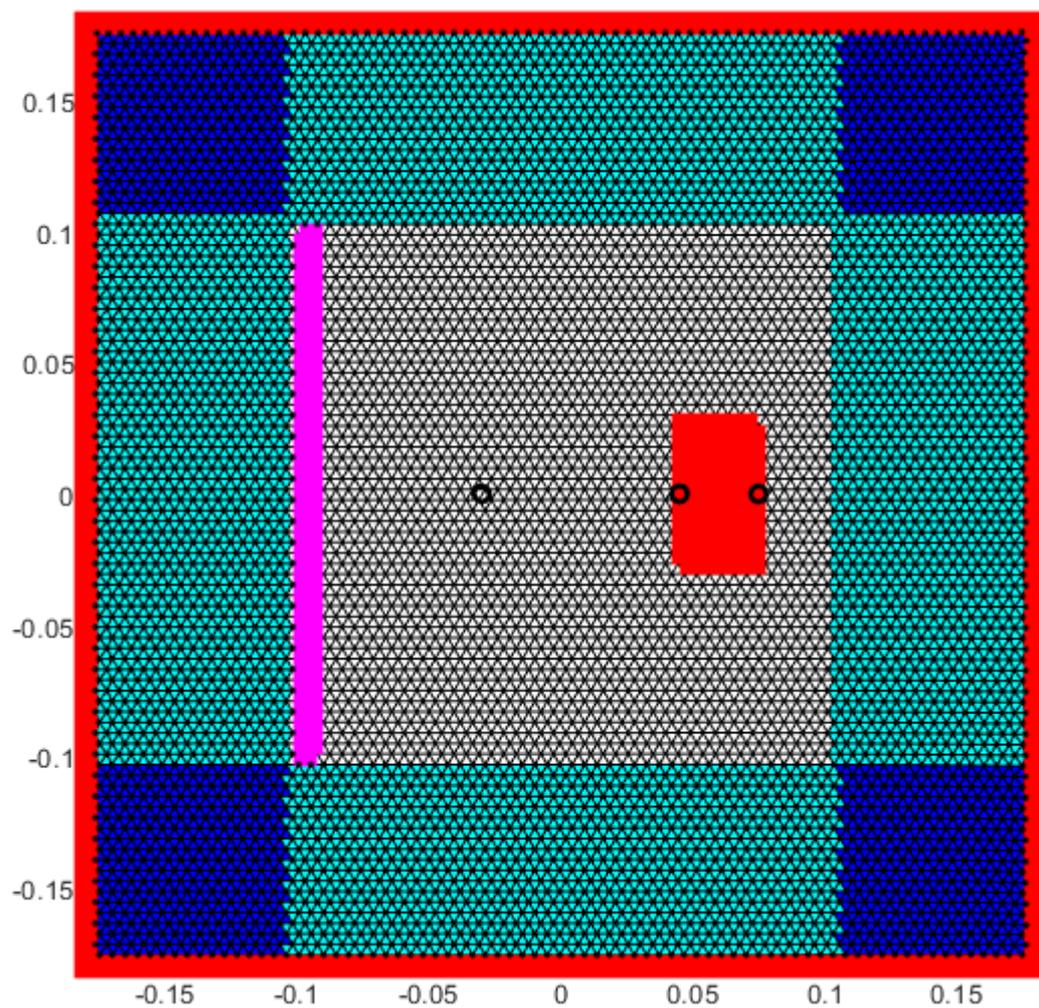
Figura 21 - Fonte de excitação no tempo.



Fonte: Próprio autor.

A malha de elementos finitos está demonstrada na figura 22, na qual os elementos em vermelho na região de contorno  $\Gamma$  correspondem a região *PEC*, a região com cores azuis correspondem as *PMLs*, o material semiconductor no domínio  $\Omega$  está representado pelo retângulo em vermelho, a fonte está representada pela região em magenta, e por fim, os círculos na cor preta são os pontos de observação. A escala demonstrada na figura está em metros.

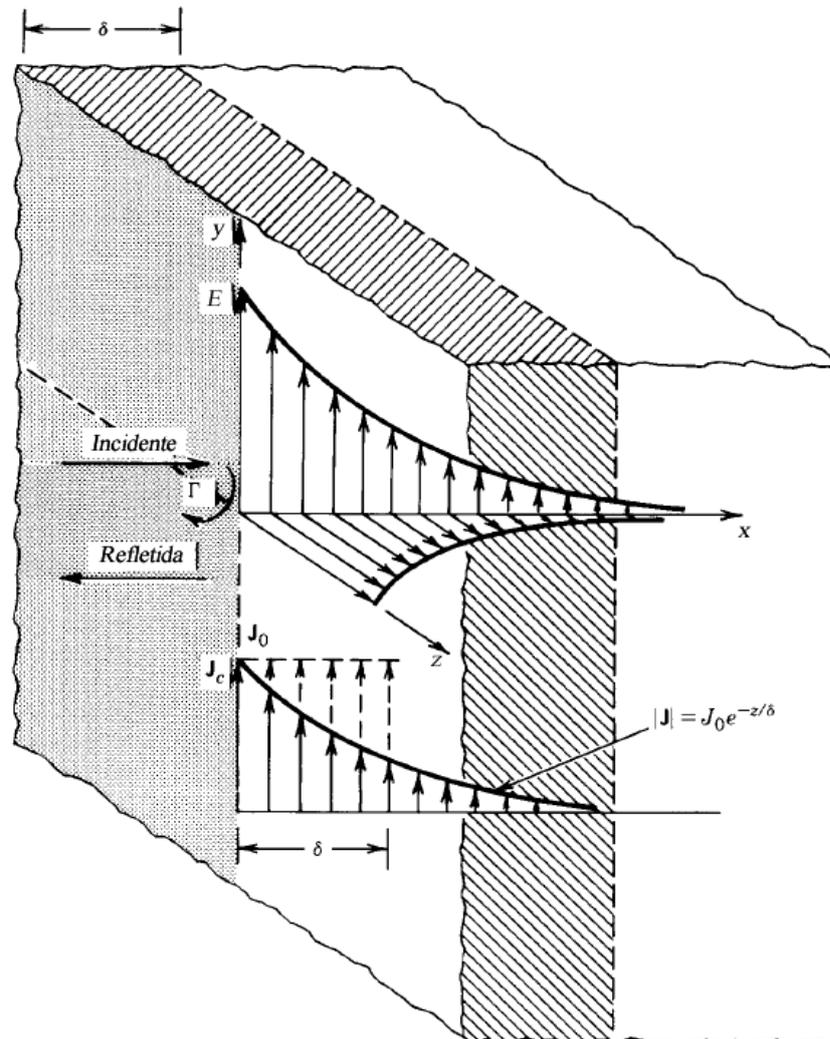
Figura 22 - Malha de elementos finitos do experimento proposto.



Fonte: Próprio autor.

Considerando uma fonte de onda isotrópica, na qual o material semiconductor está suficientemente afastado para considerar como sendo uma onda plana, tem-se o fenômeno eletromagnético demonstrado na figura 23.

Figura 23 - Intensidade de campo elétrico e densidade de corrente elétrica em um material semicondutor.



Fonte: Balanis, 1989.

Desta forma, assumindo que o material semicondutor é o Silício (*Si*) os parâmetros construtivos são dados por:  $\epsilon_2 = 11,4\epsilon_0$ ,  $\mu_2 = \mu_0$  e  $\sigma_2 = 0,439 \times 10^{-3} \text{ S/m}$  (BALANIS, 1989). A partir da equação (128), para a frequência da onda incidente de 10 GHz, obtém-se

$$\frac{\sigma_2}{\omega\epsilon_2} = \frac{0,439 \times 10^{-3}}{2\pi \times 10 \times 10^9 (11,4 \times 8,854 \times 10^{-12})} = 69,22 \times 10^{-6} \ll 1$$

o resultado obtido demonstra que o Silício para esta frequência se comporta como um dielétrico excelente. Assim, para dielétricos o coeficiente de reflexão pode ser obtido a partir da expressão (BALANIS, 1989):

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (148)$$

na qual, a impedância intrínseca do meio 1 é igual a impedância intrínseca do ar, isto é,  $\eta_1 =$

$\eta_0$ , obtendo-se

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_0}{\eta_2 + \eta_0} \quad (149).$$

A partir da equação (133), para um caso geral, as impedâncias intrínsecas de materiais dielétricos, fica dada por:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (150)$$

desta forma,

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \quad (151),$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (152)$$

substituindo a equação (151) e (152) em (149), obtém-se o coeficiente de reflexão  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \quad (153),$$

agora, considerando os dados característicos do Silício, tem-se como resultado o coeficiente de reflexão  $\Gamma = -0,543$ . Desta forma, o fenômeno eletromagnético predominante na simulação a ser observada deve ser a reflexão com 54,3% da onda incidente refletida para a frequência de 10 GHz. O campo elétrico transmitido para o meio semiconductor decai exponencialmente, conforme a expressão a seguir:

$$E_t = (1 - |\Gamma|)E_i e^{-\alpha x} \quad (154)$$

na qual o  $\alpha$  é a constante de atenuação do meio. A partir da expressão:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (155)$$

onde, para  $x = \delta$  tem-se o ponto de decaimento de 36,79% do campo elétrico transmitido, denominado de *skin depth*. Para dielétricos a *skin depth*  $\delta$  fica dada por (BALANIS, 1989):

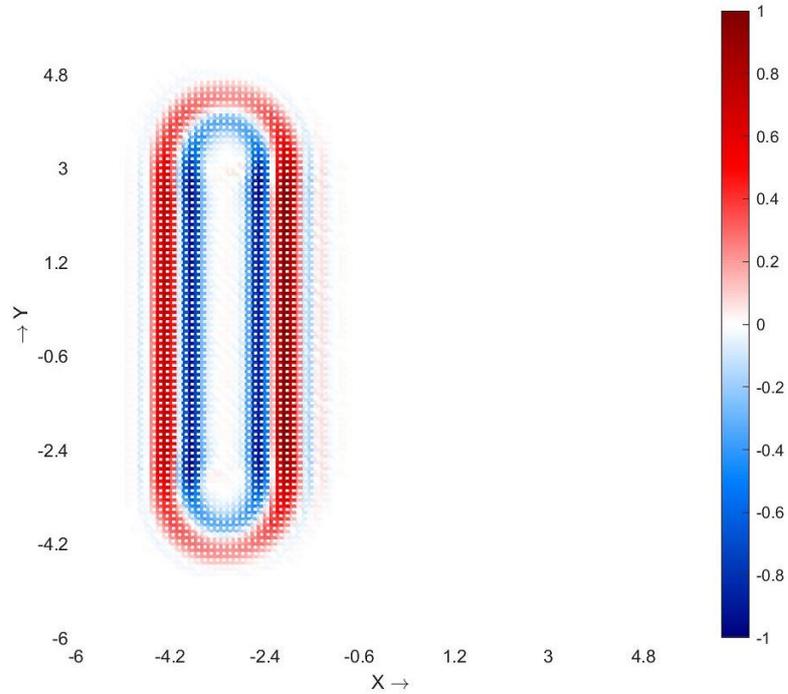
$$\delta = \frac{2}{\sigma_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \quad (156)$$

substituindo os valores para o material de Silício, tem-se  $\delta = 40,83 \text{ m}$ , isto significa que para a largura de  $2\lambda \cong 6 \text{ cm}$  da placa de Silício, praticamente o campo elétrico transmitido não é absorvido. Assim, o campo elétrico transmitido obtido fica:

$$E_t = 0,457E_i e^{-x/\delta}.$$

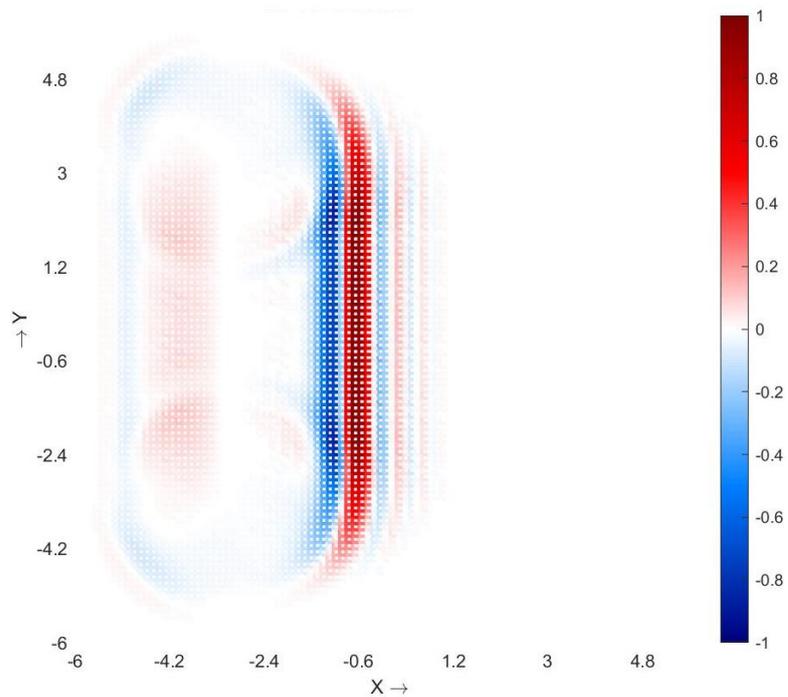
Para o experimento realizado, as figuras 24 a 31 mostram a propagação da onda eletromagnética incidente a uma placa semicondutora de Silício.

Figura 24 – Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 50$ .

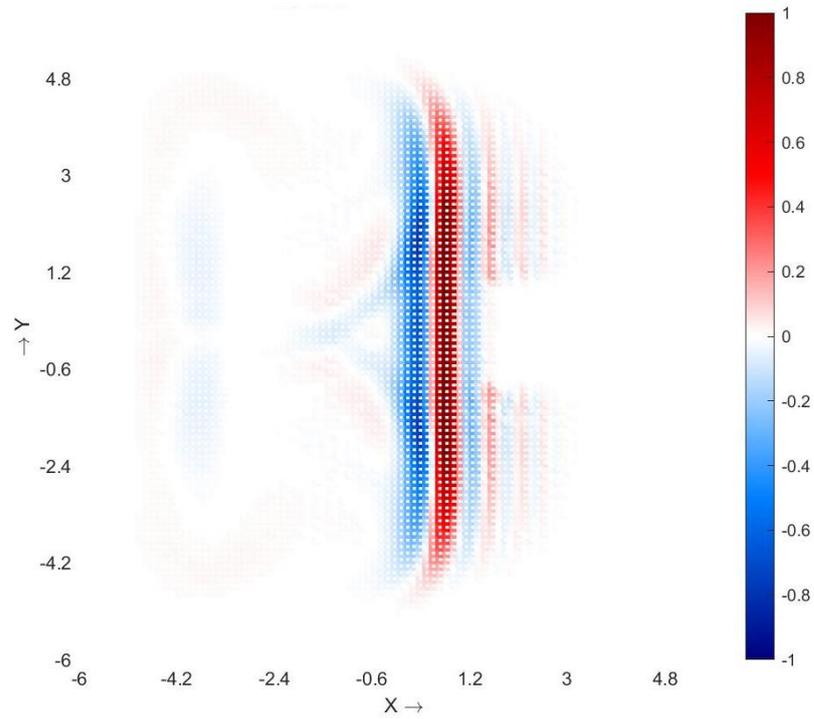


Fonte: Próprio autor.

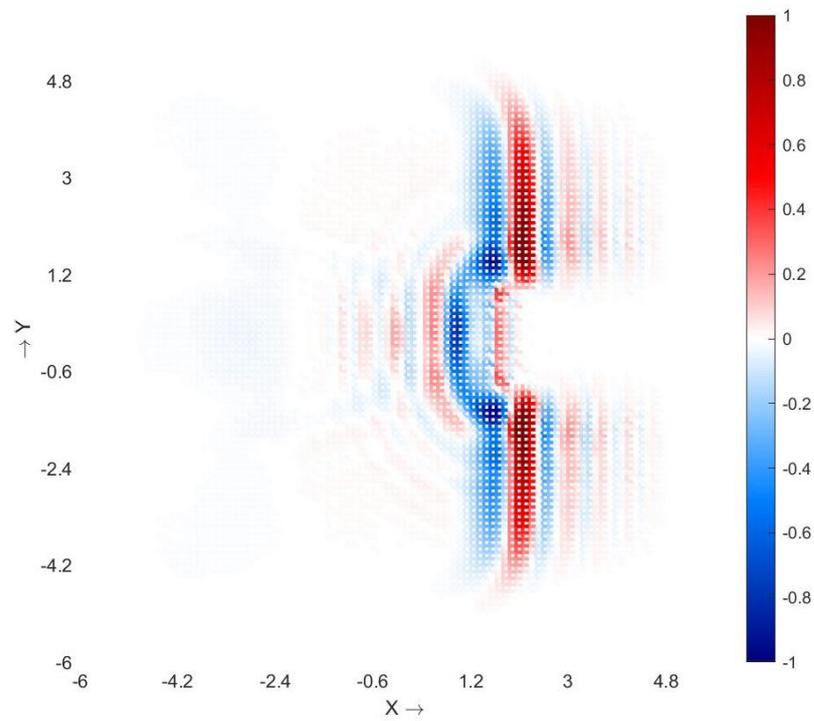
Figura 25 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 100$ .



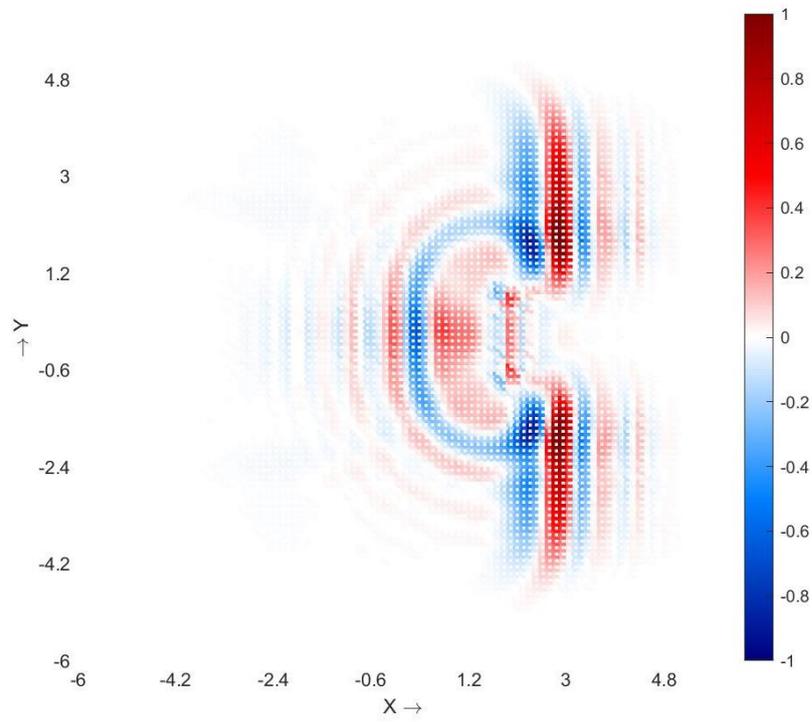
Fonte: Próprio autor.

Figura 26 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 150$ .

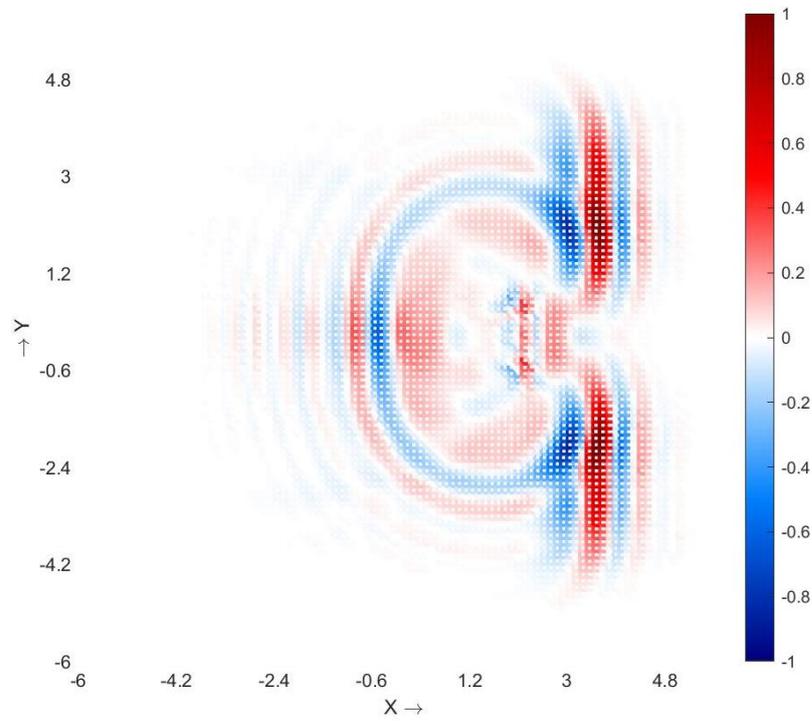
Fonte: Próprio autor.

Figura 27 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 200$ .

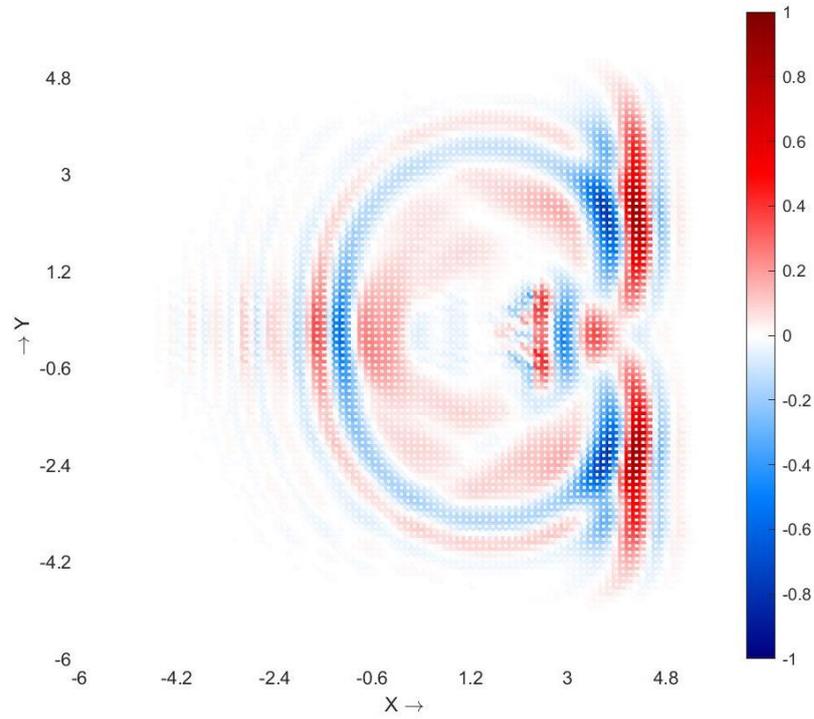
Fonte: Próprio autor.

Figura 28 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 225$ .

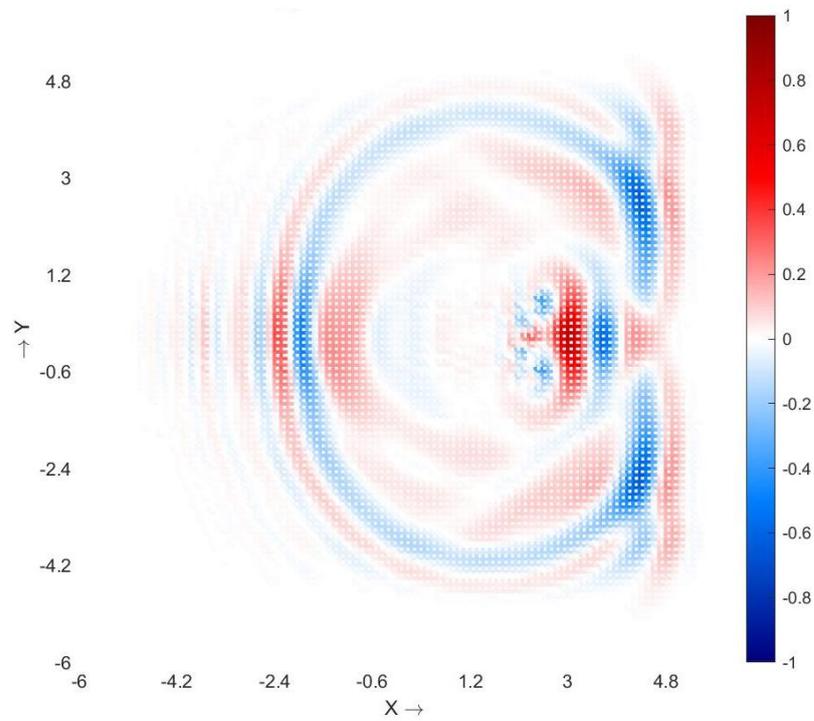
Fonte: Próprio autor.

Figura 29 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 250$ .

Fonte: Próprio autor.

Figura 30 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 275$ .

Fonte: Próprio autor.

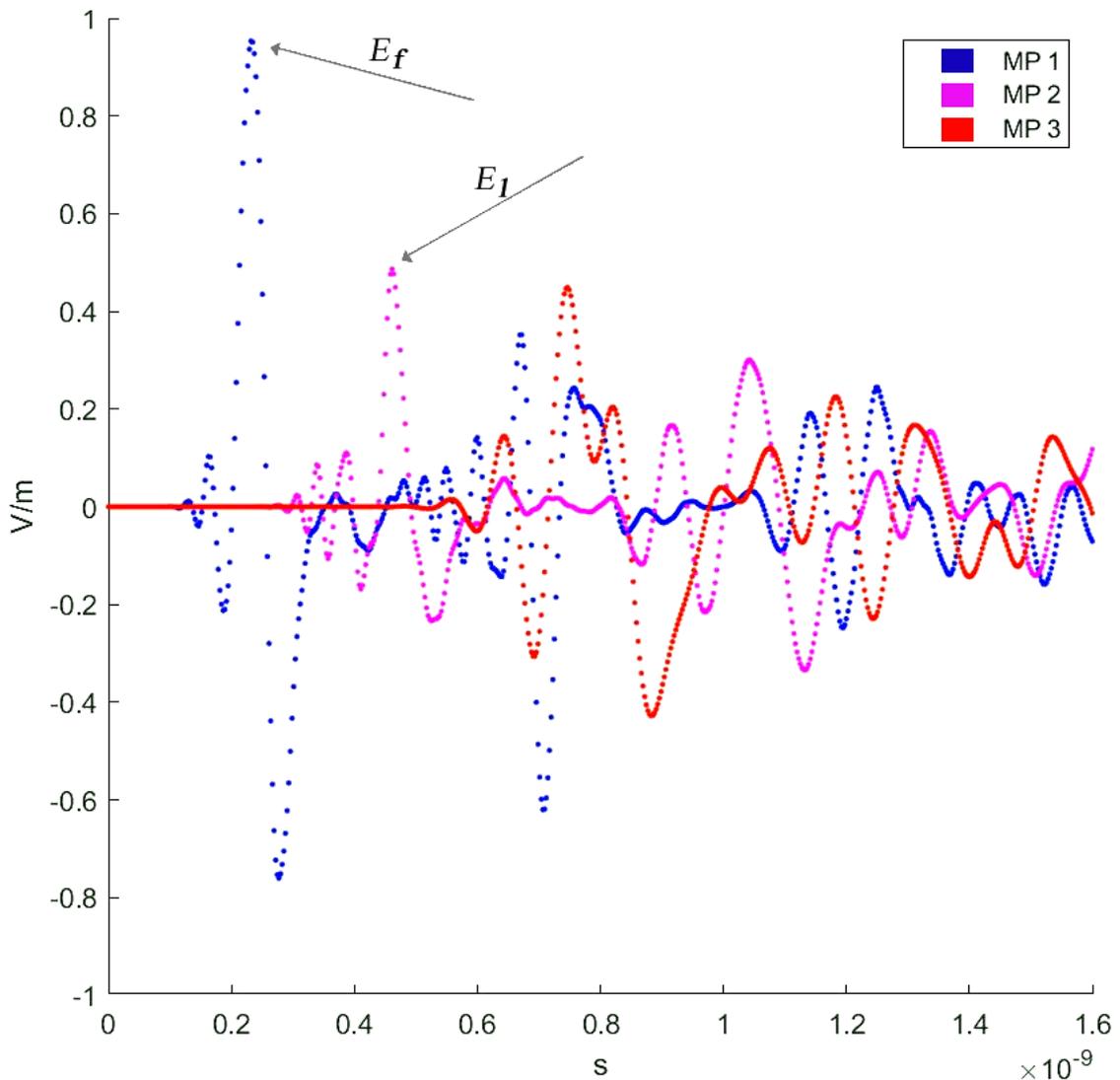
Figura 31 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 300$ .

Fonte: Próprio autor.

Observa-se nas imagens da simulação o fenômeno da reflexão eletromagnética, gerado na interface do meio com o material semiconductor (figura 27), e ainda a natureza dielétrica do material semiconductor de Silício com a permissividade relativa de 11,4 que causa um atraso na propagação da onda transmitida (figura 28). Na região das *PMLs* a onda é absorvida restando uma pequena reflexão devido a discretização espacial.

Os campos elétricos  $E_z$  obtidos nos pontos de observação *MP* são mostrados na figura 32. O ponto de observação 1 denominado de *MP1* está localizado a  $-1\lambda$  do centro do domínio  $\Omega$  entre a fonte e o material semiconductor representado pela cor azul, o ponto de observação 2 (*MP2*) está localizado na parte frontal do material semiconductor representado pela cor magenta, e o ponto de observação 3 (*MP3*) encontra-se na costa do material semiconductor.

Figura 32 - Resultados numéricos obtidos nos pontos de observação.



Fonte: Próprio autor.

A amplitude medida do campo elétrico vindo da fonte é de  $E_f = 0,95325 \text{ V/m}$ , e a amplitude medida do campo elétrico resultante em *MP2* é da ordem de  $E_1 = 0,48688 \text{ V/m}$ , assim a relação fica

$$|\Gamma_{num}| = \frac{E_1}{E_f} \quad (157)$$

onde tem-se que o coeficiente de reflexão numérica  $|\Gamma_{num}|$  igual a 0,51076. Para obter a quantidade de erro numérico obtido na simulação, utiliza-se a expressão abaixo:

$$erro = 1 - \frac{|\Gamma_{num}|}{|\Gamma|} \times 100 [\%] = \frac{|\Gamma| - |\Gamma_{num}|}{|\Gamma|} \times 100 [\%] \quad (158)$$

com isso, obtém-se um erro de 5,94%. Conforme mencionado e demonstrado no capítulo 2, erros e ruídos são obtidos de acordo com a discretização do domínio espacial, uma vez que a quantidade de elementos finitos é elevada, obtém-se resultados mais confiáveis.

### 3.2 MODELAGEM DA CÉLULA FOTOVOLTAICA

As células solares semicondutoras são dispositivos relativamente simples, em que os materiais semicondutores possuem a capacidade de absorver a luz e converter parte da energia absorvida dos fótons para densidade de corrente elétrica, dado por elétrons e lacunas. Neste contexto, a célula solar é basicamente um diodo semicondutor que é construído especificamente para absorver e converter a energia da luz vinda do sol em energia elétrica (LUQUE; HEGEDUS, 2003).

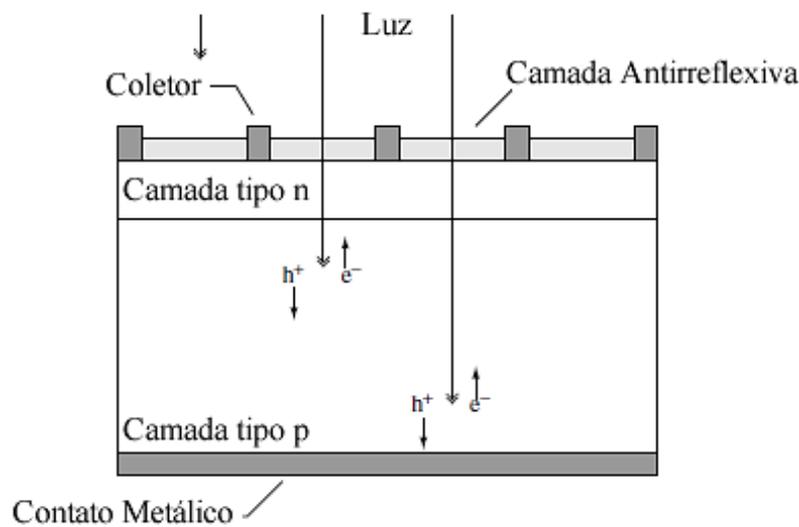
A radiação eletromagnética, inclusive a luz do sol, é composta de partículas chamadas de fótons, na qual carregam uma quantidade específica de energia determinada pelas propriedades espectrais da fonte. Os fótons exibem um caráter ondulatório com o comprimento de onda  $\lambda$  relacionado com a energia do fóton, conforme relação (LUQUE; HEGEDUS, 2003):

$$E_\lambda = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (159)$$

na qual  $h$  é a constante de Plank,  $c$  é a velocidade da luz no meio e  $f$  é a frequência da onda eletromagnética. Conforme mencionado nos itens 1.5 e 1.6, somente fótons com energia suficiente podem gerar um par elétron-lacuna, ou seja, devem possuir energia maior que a energia de banda proibida ( $E_G$ ) do material semicondutor, mostrada na figura 7. Assim, a natureza espectral das ondas eletromagnéticas são considerações importantes para o desenvolvimento de células solares.

Uma estrutura simples para simulações a ser considerada está demonstrada na figura 33. Onde a luz é incidente a partir do topo na frente da célula solar, uma grade metálica forma um dos contatos elétricos do diodo absorvendo elétrons, a camada antirreflexiva entre as linhas de grade aumenta a quantidade de luz transmitida para os materiais semicondutores, e o outro contato elétrico do diodo é formado por uma camada metálica na costa da célula solar (LUQUE; HEGEDUS, 2003).

Figura 33 - Esquemático de uma célula solar convencional.



Fonte: Luque e Hegedus, 2003.

A partir da função gaussiana modulada, dada pela expressão (JIN, 2014):

$$f(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right] \sin \omega_0 t \quad (160)$$

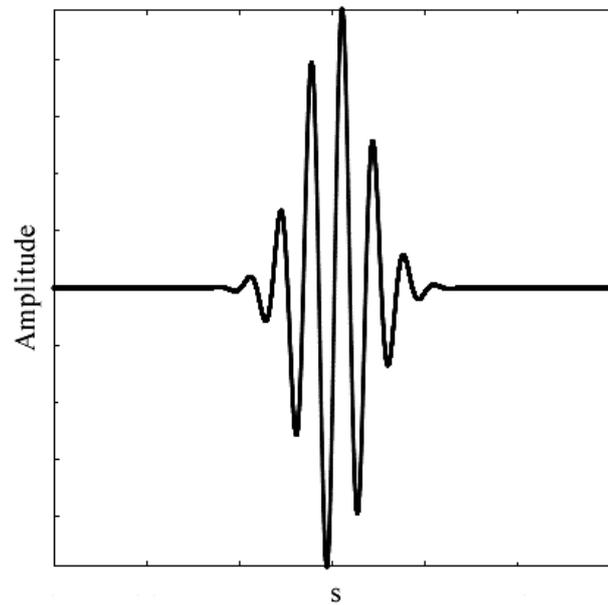
onde  $\omega_0$  representa a frequência central e  $\tau$  pode ser selecionado de acordo com a banda de frequência desejada.

Assim, obtém-se a solução de uma frequência mínima até uma frequência máxima, permitindo a modelagem espectral da luz visível. O espectro de frequência é dado pela equação a seguir (JIN, 2014):

$$f(\omega) = j\tau \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\omega + \omega_0)\tau]^2\right\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\omega - \omega_0)\tau]^2\right\} \right] \quad (161).$$

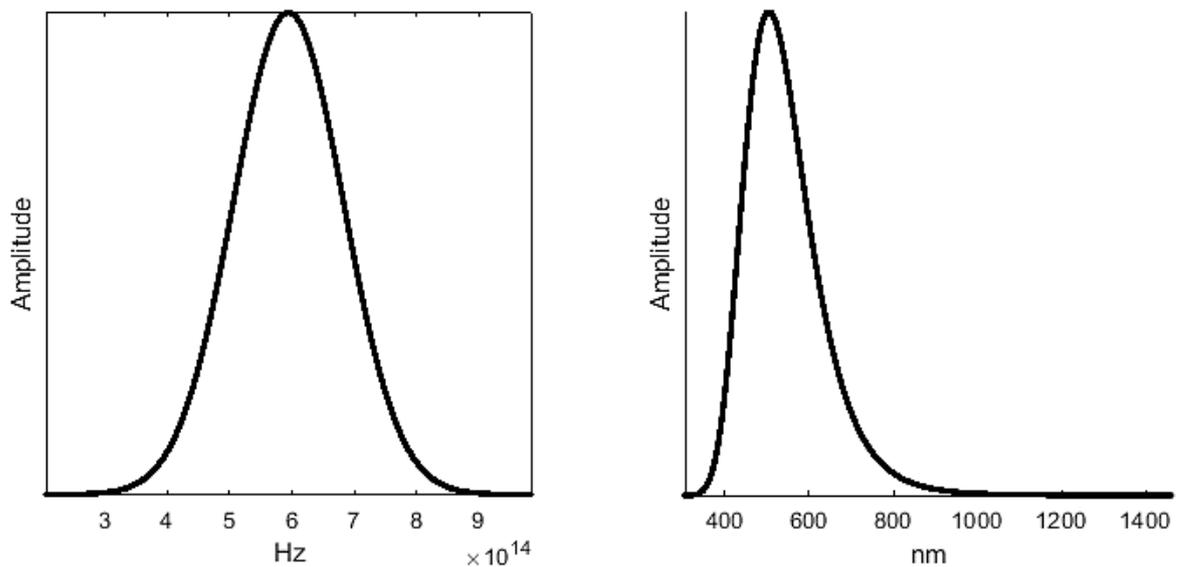
As figuras 34 e 35 mostram a função gaussiana modulada e o espectro luminoso em Hz e nanômetros, respectivamente. Onde  $\tau$  é igual a  $1,8 \times 10^{-15}$  e a frequência central ( $f_c$ ) está dada por  $5,94 \times 10^{14}$  Hz.

Figura 34 - Sinal gaussiano modulado.



Fonte: Próprio autor.

Figura 35 - Espectro luminoso, em Hz e nanômetros.



Fonte: Próprio autor.

Para efeito de simulações, comumente o interesse está em frequências puras, considerando-se nestes casos a frequência central, podendo avaliar de que forma a onda eletromagnética para a frequência de interesse se propaga na célula fotovoltaica.

Convertendo a frequência central para comprimento de onda pela expressão abaixo:

$$c = \lambda f \therefore \lambda = \frac{c}{f} \rightarrow \lambda = \frac{c_0/f}{\sqrt{\epsilon_r}}, \quad \mu_r = 1 \quad (162)$$

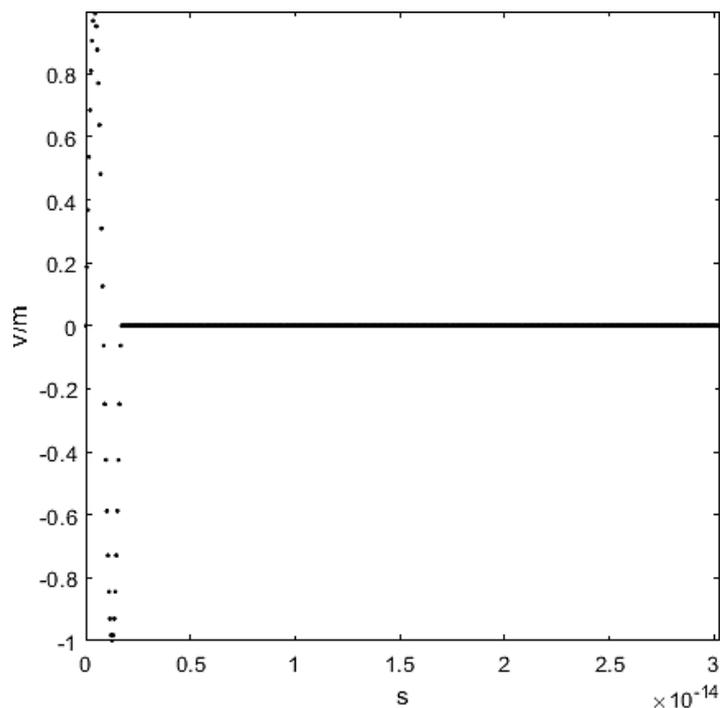
tem-se o comprimento de onda central  $\lambda_c$  igual a 504,425 nm.

### 3.3 EXPERIMENTO EM CÉLULA FOTOVOLTAICA

O experimento proposto tem por objetivo observar a reflexão dada pela interface da célula fotovoltaica modelada, observando de que forma a onda eletromagnética é transmitida para o meio semicondutor, medindo o campo elétrico a partir de pontos de observação obtém-se a tensão elétrica no material semicondutor.

A excitação é dada por uma fonte isotrópica, utilizando-se de um pulso senoidal com amplitude normalizada e frequência igual a frequência central ( $f_c$ ) de  $5,94 \times 10^{14}$  Hz do espectro luminoso mostrado na figura 35. Desta forma, o comprimento de onda  $\lambda$  é igual ao comprimento de onda central  $\lambda_c$  igual a 504,425 nm. Este pulso senoidal tem duração aproximada de 1,68 fs (femtosegundo) ou  $1,68 \times 10^{-15}$  s, com 600 discretizações do tempo de observação dado por 30,3 fs (correspondente a 18 ciclos), conforme ilustrado na figura 36.

Figura 36 - Fonte de excitação no tempo.

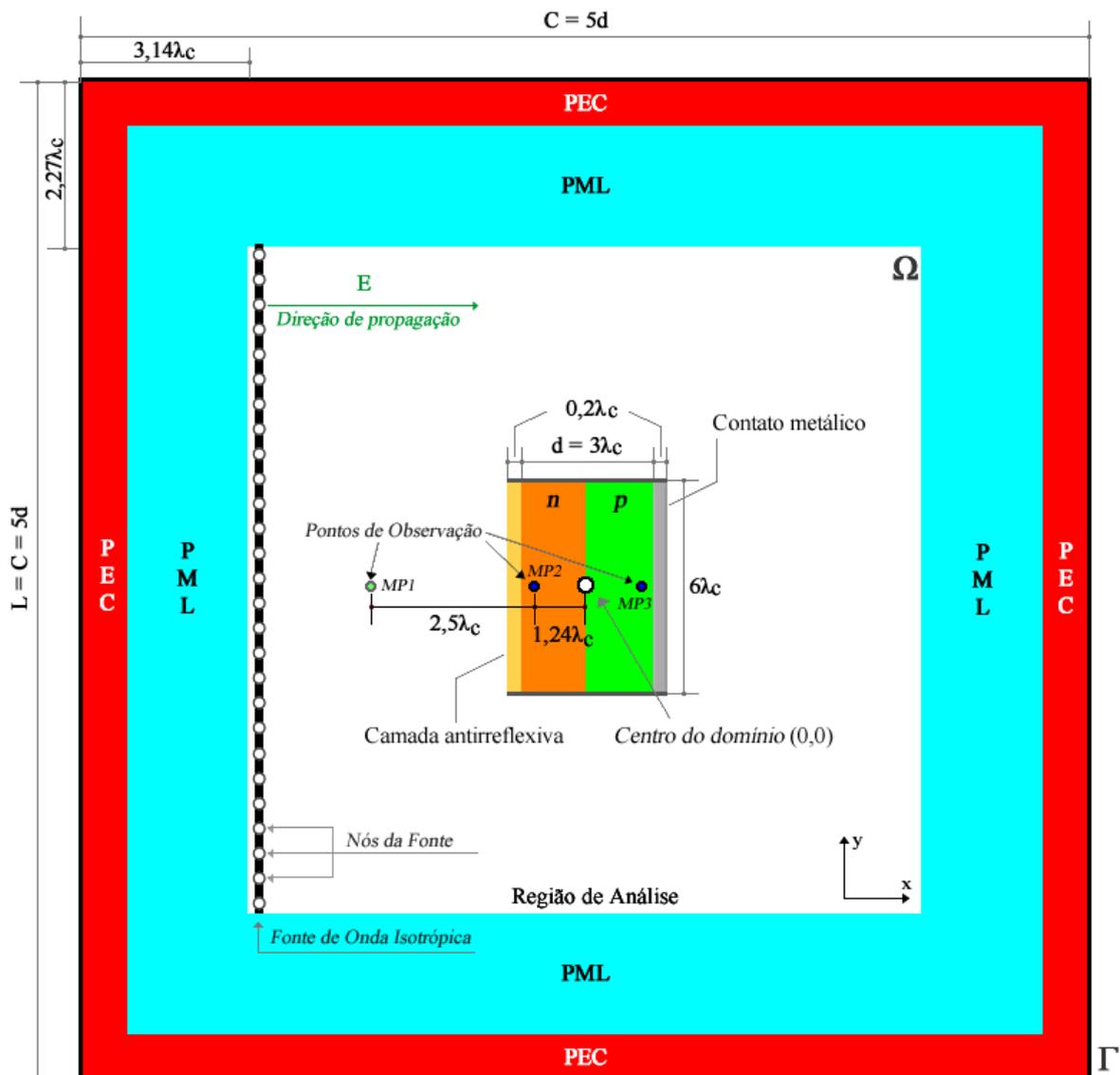


Fonte: Próprio autor.

Para este experimento um modelo simplificado é considerado, negligenciando os coletores frontais com o intuito de reduzir a complexidade do modelo 2D, obtendo-se como resultado o campo elétrico refletido pela interface do meio com a camada antirreflexiva, e o campo elétrico transmitido à célula fotovoltaica.

A figura 37 ilustra o experimento proposto, onde tem-se a fonte isotrópica do lado esquerdo logo após as *PMLs* e a célula fotovoltaica localizada no centro do domínio computacional  $\Omega$ . A célula fotovoltaica tem um comprimento  $d = 3\lambda_c = 1,513 \mu\text{m}$  e largura de  $6\lambda_c = 3,026 \mu\text{m}$ . Nas extremidades da célula fotovoltaica há pontos de observação para efetuar as medições dos campos elétricos, localizados a uma distância de  $1,24\lambda_c$  do centro. Este domínio computacional  $\Omega$  tem dimensões  $L = C = 5d = 7,566 \mu\text{m}$ .

Figura 37 – Experimento numérico para simulação de célula fotovoltaica.

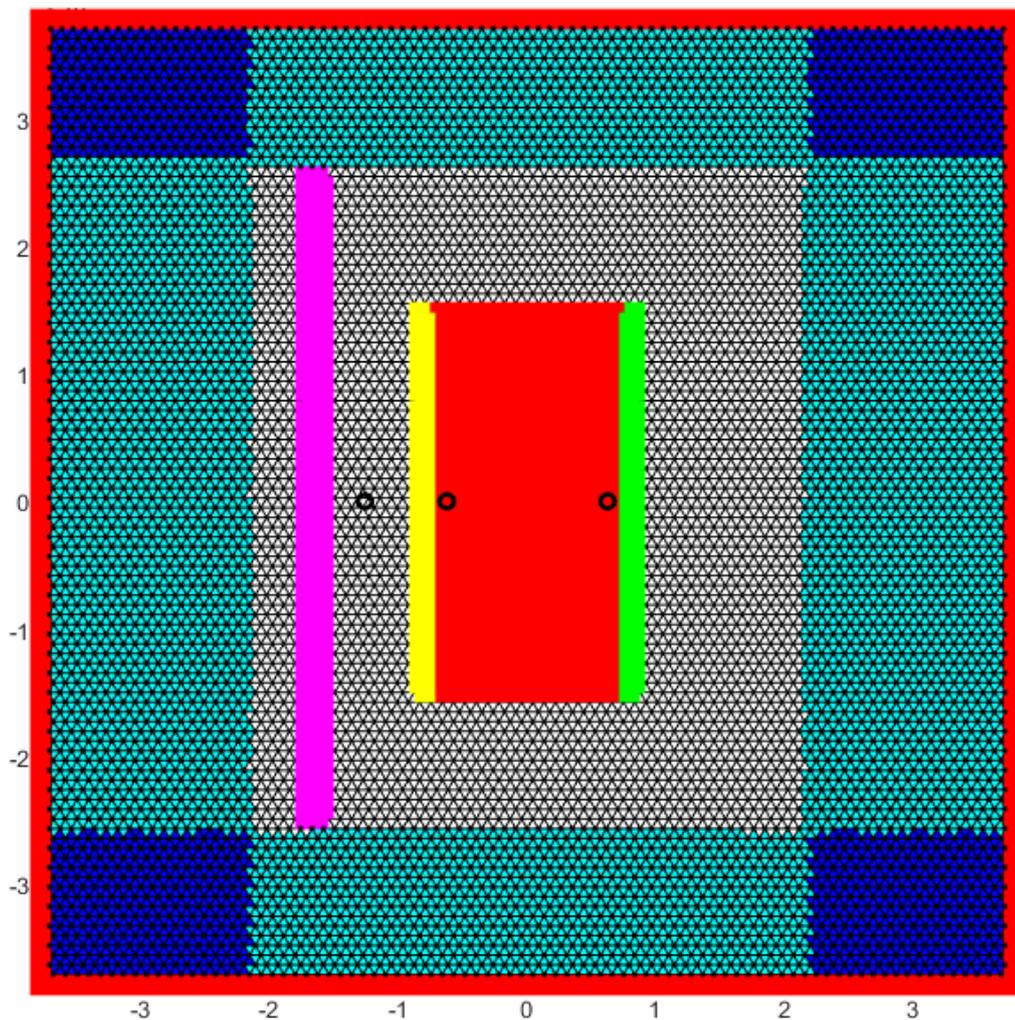


Fonte: Próprio autor.

Para simular o experimento no algoritmo desenvolvido, determinou-se a malha com 16931 elementos finitos triangulares, 8652 nós, onde 134 nós pertencem a fonte, 371 nós pertencem a *PEC*, e 5098 nós pertencem a região da *PML*, onde a quantidade de camadas perfeitamente casadas nas bordas esquerda e direita é igual a 18, e para as bordas superior e inferior tem-se 13 camadas.

A malha de elementos finitos está demonstrada na figura 38, na qual os elementos em vermelho pertencentes ao contorno  $\Gamma$  correspondem a região *PEC*, a fonte isotrópica está representada pela região em magenta, os círculos com cor preta são os pontos de observação, a célula fotovoltaica está destacada no centro do domínio  $\Omega$ , com a região de materiais semicondutores do tipo *n* e *p* representados pela cor vermelha, a região representada por amarelo é a camada antirreflexiva e a região em verde é a região de contato metálico. A escala da figura demonstrada está em micrômetros.

Figura 38 - Malha de elementos finitos do experimento.



Fonte: Próprio autor.

A tabela 3 descreve os parâmetros construtivos dos materiais utilizados no experimento.

Tabela 3 – Parâmetros construtivos dos materiais.

	Permissividade relativa $\epsilon_r$	Permeabilidade relativa $\mu_r$	Condutividade $\sigma$ (S/m)
<b>Material semiconductor tipo n e p</b>	11,4	1	1
<b>Camada antirreflexiva</b>	9	1	$1 \times 10^{-11}$
<b>Contato metálico</b>	1	1	$3,8 \times 10^7$

A reflexão teórica obtida na célula fotovoltaica, é determinada pela interface do ar com a camada antirreflexiva. Assumindo que a camada antirreflexiva é dada por um material arbitrário com parâmetros construtivos dados por:  $\epsilon_v = 9\epsilon_0$ ,  $\mu_v = \mu_0$  e  $\sigma_v = 1 \times 10^{-11}$  S/m, conforme tabela 3, e considerando que este material tem comportamento dielétrico, a impedância intrínseca fica dada por:

$$\eta_v = \sqrt{\frac{\mu_v}{\epsilon_v}} \quad (163).$$

Com isso o coeficiente de reflexão na interface  $\Gamma_1$  pode ser obtido a partir da expressão (148), dado por:

$$\Gamma_1 = \frac{\eta_v - \eta_0}{\eta_v + \eta_0} \quad (164)$$

substituindo a equação (163) em (164), tem-se o coeficiente de reflexão  $\Gamma_1$  dado pela expressão abaixo:

$$\Gamma_1 = \frac{\sqrt{\frac{\mu_v}{\epsilon_v}} - 1}{\sqrt{\frac{\mu_v}{\epsilon_v}} + 1} \quad (165)$$

aplicando os valores, o coeficiente de reflexão teórico nesta interface é igual a  $-0,5$ . A partir do coeficiente de reflexão da interface, obtém-se o coeficiente de transmissão  $T_1$  do campo elétrico para a camada antirreflexiva, dado pela expressão abaixo:

$$T_1 = 1 - |\Gamma_1| \quad (166)$$

na qual, aplicando os valores tem-se  $T_1 = 0,5$ . Há ainda uma reflexão causada pela interface da camada antirreflexiva com o material semiconductor do tipo  $n$ , dado pelo coeficiente de

reflexão  $\Gamma_2$ , conforme equação abaixo:

$$\Gamma_2 = \frac{\eta_{sc} - \eta_v}{\eta_{sc} + \eta_v} \quad (167)$$

onde,  $\eta_{sc}$  é a impedância intrínseca do material semiconductor do tipo  $n$ .

A relação  $\sigma/\omega\epsilon$  para o material semiconductor da célula fotovoltaica é igual a  $2,65 \times 10^{-6}$ , sendo muito menor que 1, desta forma, a impedância intrínseca do material semiconductor de tipo  $n$ , é dado por:

$$\eta_{sc} = \sqrt{\frac{\mu_{sc}}{\epsilon_{sc}}} \quad (168).$$

Considerando a equação (167) e substituindo as equações (163) e (168), o coeficiente de reflexão  $\Gamma_2$ , pode ser reescrito como:

$$\Gamma_2 = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{sc}}{\epsilon_{sc}}} - \sqrt{\frac{\mu_v}{\epsilon_v}}}{\sqrt{\frac{\mu_{sc}}{\epsilon_{sc}}} + \sqrt{\frac{\mu_v}{\epsilon_v}}} \quad (169)$$

substituindo os parâmetros construtivos na equação (169), tem-se como resultado  $\Gamma_2 = -0,059$ . Assim, pode-se determinar o coeficiente de transmissão resultante, dado pela expressão abaixo:

$$T_R = (1 - |\Gamma_2|)(1 - |\Gamma_1|) \quad (170)$$

obtendo-se  $T_R$  igual a 0,4705.

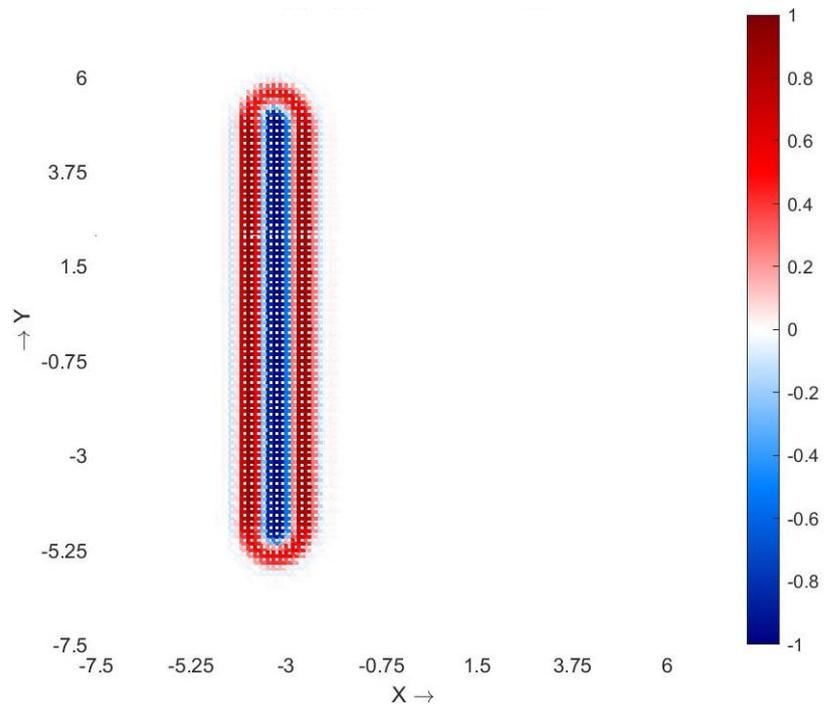
A tensão elétrica na célula fotovoltaica pode ser determinada pela diferença dos campos elétricos  $E_2$  e  $E_3$  correspondente aos pontos de observação  $MP2$  e  $MP3$ , somado a tensão elétrica da junção em função da temperatura, conforme expressão abaixo:

$$V = V_0(T) + (E_2 - E_3)d \quad (171)$$

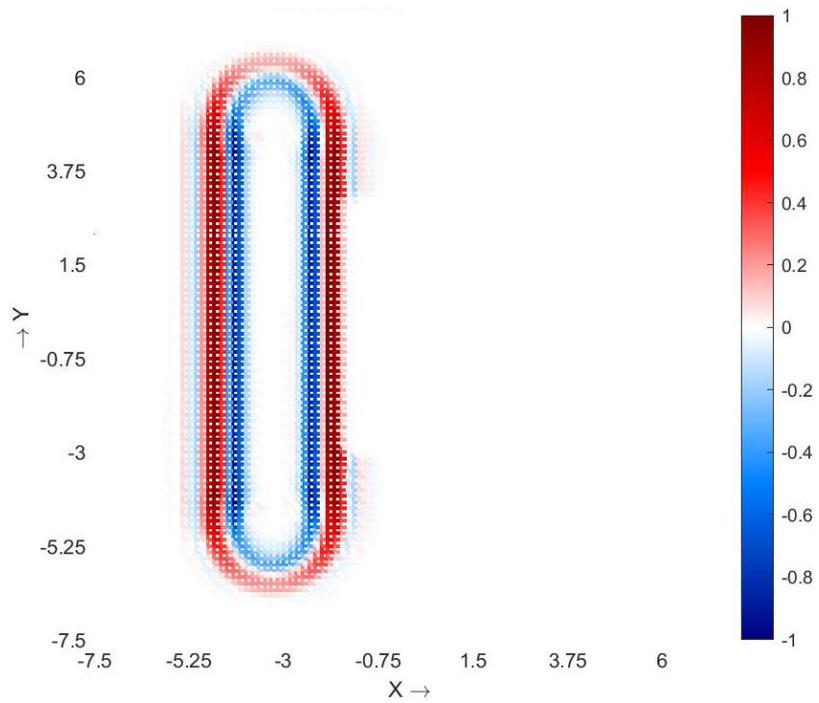
substituindo a distância  $d$  igual a  $3\lambda_c$  correspondente ao comprimento do material semiconductor da célula fotovoltaica, tem-se:

$$V = V_0(T) + (E_2 - E_3)3\lambda_c \quad (172).$$

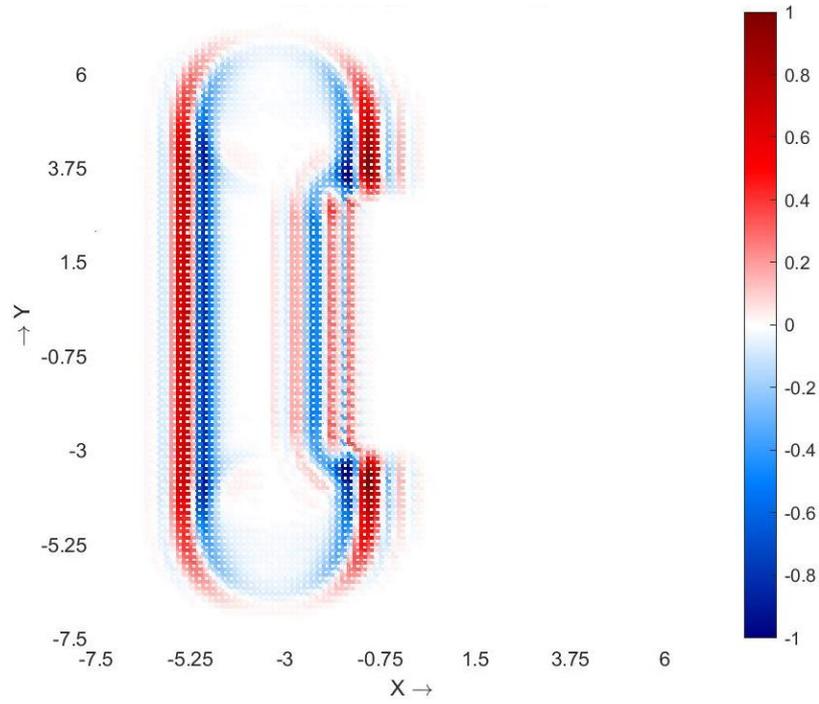
Para o experimento realizado, as figuras 39 a 46 mostram a evolução do campo elétrico incidente a célula fotovoltaica modelada.

Figura 39 – Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 25$ .

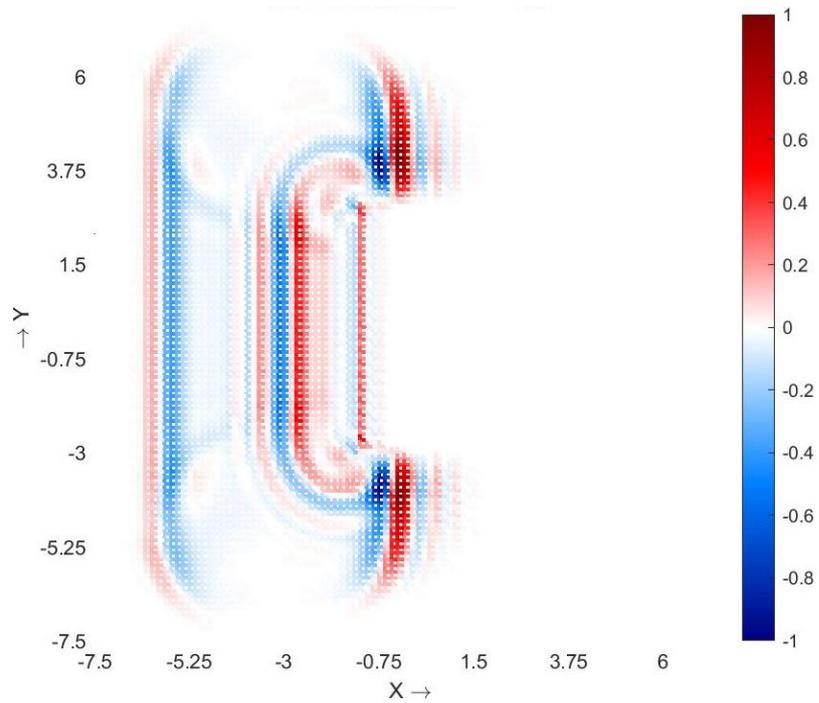
Fonte: Próprio autor.

Figura 40 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 50$ .

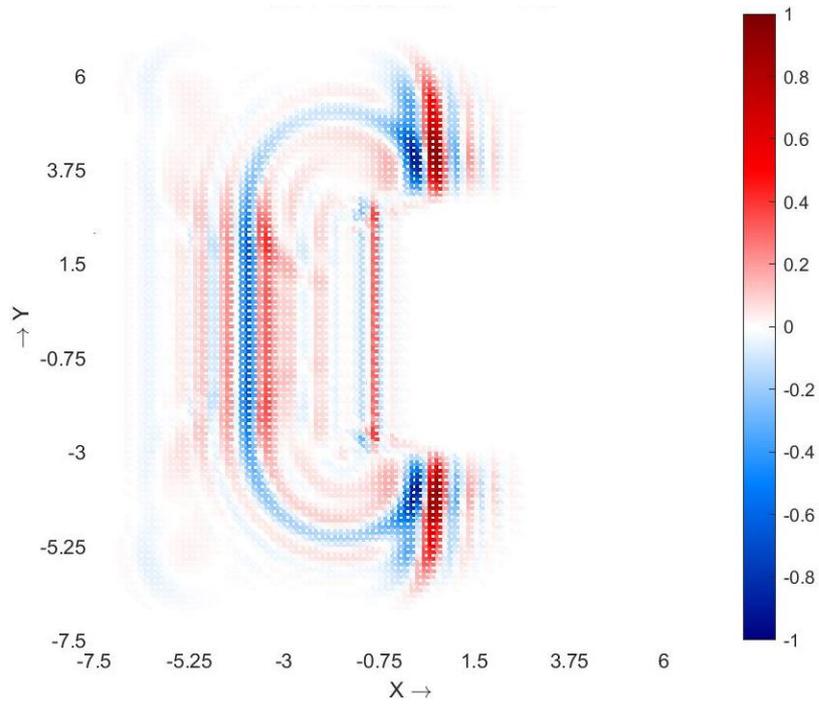
Fonte: Próprio autor.

Figura 41 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 75$ .

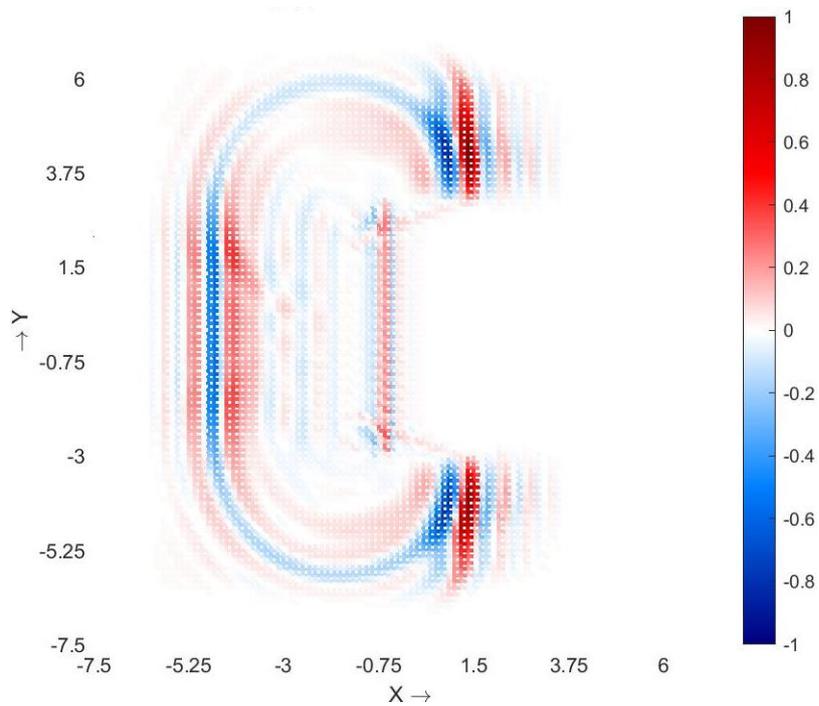
Fonte: Próprio autor.

Figura 42 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 100$ .

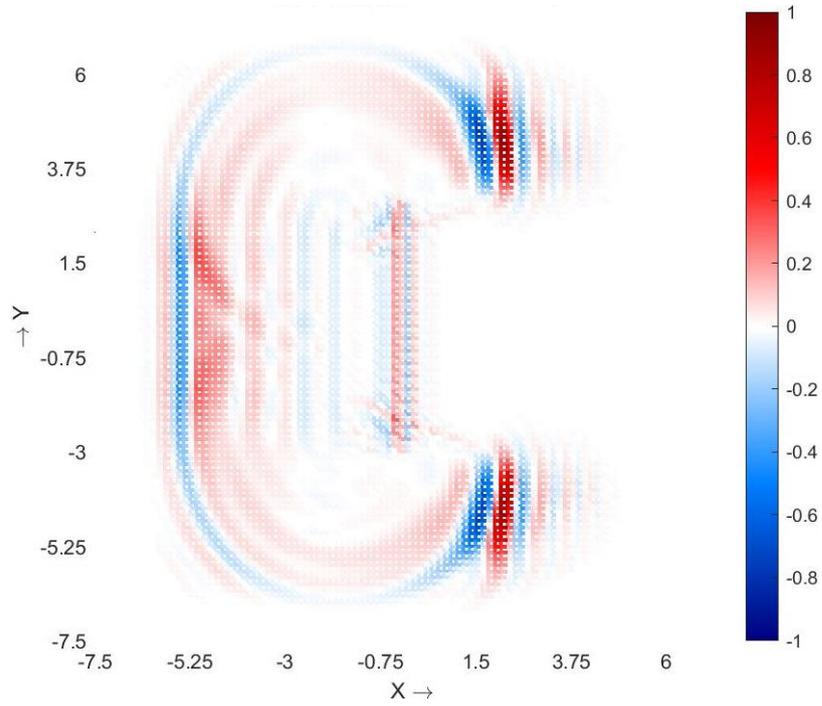
Fonte: Próprio autor.

Figura 43 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 125$ .

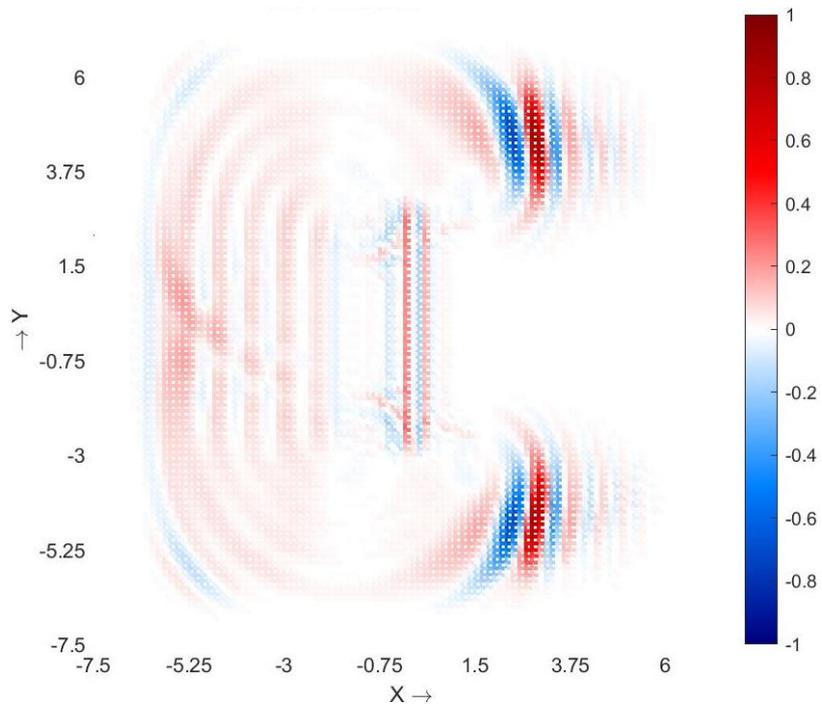
Fonte: Próprio autor.

Figura 44 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 150$ .

Fonte: Próprio autor.

Figura 45 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 175$ .

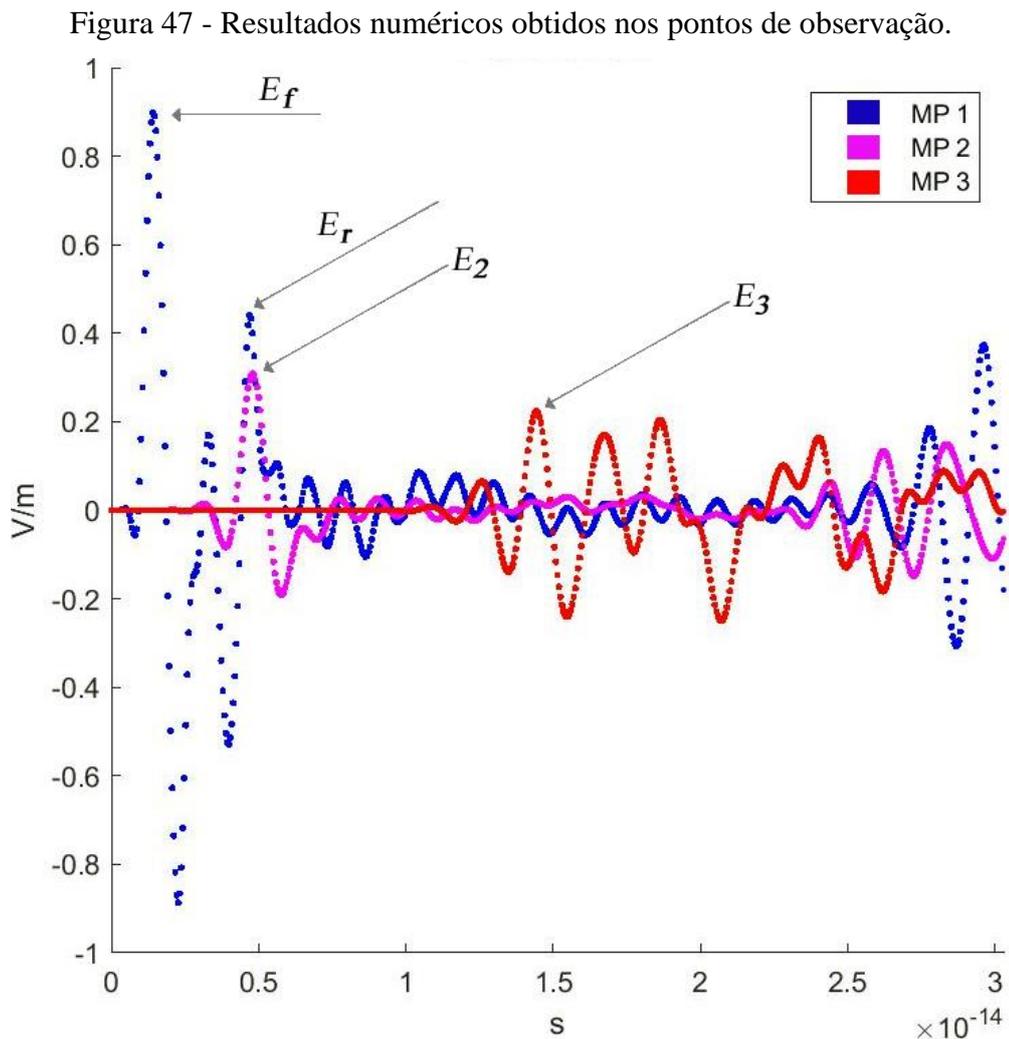
Fonte: Próprio autor.

Figura 46 - Campo elétrico  $|E_z|$  para  $n = 200$ .

Fonte: Próprio autor.

Observa-se nas imagens da simulação o fenômeno da reflexão eletromagnética, gerado na interface do meio com o material antirreflexivo (figura 41), e ainda a natureza dielétrica dos materiais da célula fotovoltaica que causa um atraso na propagação da onda transmitida (figura 41 a 46).

Os campos elétricos  $E_z$  obtidos nos pontos de observação  $MP$  da simulação são mostrados na figura 47.



A amplitude medida do campo elétrico vindo da fonte é de  $E_f = 0,89741 \text{ V/m}$ , e a amplitude medida do campo elétrico refletido é da ordem de  $E_r = 0,44031 \text{ V/m}$ .

O coeficiente de reflexão numérico pode ser quantificado pela expressão abaixo:

$$|\Gamma_{num}| = \frac{E_r}{E_f} \quad (173)$$

assim, obtém-se o coeficiente de reflexão numérica  $|\Gamma_{num}|$  igual a 0,4944.

A partir da equação (158) e substituindo os valores do coeficiente de reflexão numérico e teórico, obtém-se um erro numérico para a reflexão da ordem de 1,11%.

O campo elétrico medido no ponto *MP2*, dado por  $E_2$  é igual a 0,30817 V/m, relacionado com o campo elétrico vindo da fonte  $E_f$ , resulta no coeficiente de transmissão resultante, conforme expressão a seguir:

$$|T_{Rnum}| = \frac{E_2}{E_f} \quad (174)$$

aplicando os valores de  $E_2$  e  $E_f$  na equação (174), obtém-se como resultado o coeficiente de transmissão resultante igual a 0,3434. Desta forma, a partir da equação (158), comparando o coeficiente de transmissão resultante teórico e numérico, o erro obtido é da ordem de 27,01%. Este erro obtido é devido a baixa densidade de elementos finitos triangulares no interior da célula fotovoltaica, causado por limitações do ambiente computacional descrito na tabela 2.

Para esta simulação, dado que não há um resultado confiável dos campos elétricos transmitidos medidos no interior da célula fotovoltaica, a tensão elétrica torna-se imensurável devido a quantidade de ruídos medidos no ponto de observação *MP3*.

Em condições reais, o material semiconductor no interior das células fotovoltaicas comerciais possui espessuras que variam de 150  $\mu m$  a 300  $\mu m$ . Para tornar possível a simulação no ambiente computacional utilizado, limitou-se a espessura da célula fotovoltaica, conforme apresentado. Para realizar uma medição confiável da tensão elétrica deve-se obter elementos finitos da ordem de nanômetros para um domínio computacional na escala em micrômetros, ocasionando em até milhões de elementos finitos, inviável para o ambiente computacional utilizado, visto que o método dos elementos finitos utiliza matrizes quadradas. Com isso, também por esse motivo, torna a tensão elétrica imensurável no ambiente computacional utilizado.

## CONCLUSÃO

No decorrer desta pesquisa desenvolveu-se uma metodologia numérica eficiente e robusta para a análise de células fotovoltaicas, utilizando o método dos elementos finitos. Os principais objetivos foram alcançados durante o desenvolvimento desta pesquisa. Dentre eles, o principal objetivo consistiu em realizar a modelagem de um arranjo fotovoltaico aplicando o *FETD*, permitindo determinar a distribuição dos campos eletromagnéticos.

Os resultados obtidos foram satisfatórios, em geral, mostrando concordância com os obtidos através de solução analítica. Constatou-se que através dos experimentos realizados, o método dos elementos finitos permite solucionar a equação de onda escalar com uma excelente precisão. As principais características a serem ressaltadas nesta metodologia numérica são a obtenção de um passo temporal maior através do método Newmark- $\beta$  e a propagação de pulsos ultracurtos de elevadas frequências.

No capítulo 1, introduziu-se o método dos elementos finitos em duas dimensões, demonstrando a realização da interpolação através das funções de base, conceitos de eletromagnetismo avançado, e introduziu-se os fenômenos dos materiais semicondutores e das células fotovoltaicas.

No capítulo 2, demonstrou-se o desenvolvimento de um algoritmo baseado no *FETD* para a propagação de ondas eletromagnéticas e modelagem de materiais eletromagnéticos, utilizando camadas perfeitamente casadas para truncar o domínio computacional. Através do método de Newmark- $\beta$  o método numérico é incondicionalmente estável. Realizou-se também, experimentos para a validação do método numérico proposto.

O capítulo 3 dedicou-se a demonstrar a simulação de materiais semicondutores e células fotovoltaicas, obtendo-se como resultado os parâmetros da propagação de ondas eletromagnéticas. No experimento da célula fotovoltaica, obteve-se um excelente resultado para o campo elétrico refletido, por outro lado, a tensão elétrica não foi possível ser mensurada, devido a baixa densidade de elementos finitos no interior da célula fotovoltaica.

Houve dificuldades nas simulações realizadas, principalmente devido as limitações computacionais. Para o ambiente computacional utilizado, a quantidade máxima de elementos finitos observada foi de até 20 mil.

Sugere-se para a realização de trabalhos futuros, a implementação dos elementos finitos vetoriais 2D e 3D, possibilitando a modelagem tridimensional da célula fotovoltaica, e ainda, a implementação das camadas perfeitamente casadas uniaxiais, sugere-se a implementação do algoritmo computacional na linguagem de programação c++. Para a

obtenção de resultados numéricos excelentes no interior da célula fotovoltaica, sugere-se a implementação de um *cluster* computacional para a utilização de algoritmo de processamento paralelo. E ainda, para trabalhos futuros é sugerido a realização da modelagem eletrostática e magnetostática da célula fotovoltaica, utilizando elementos finitos.

## REFERÊNCIAS

- ACKERMANN, T.; ANDERSSON, G.; SÖ-DER, L. **Distributed Generation: A Definition**. Electric Power Syst. Research, v. 57, p. 195–204, 2001.
- BALANIS, C., **Advanced Engineering Electromagnetics**. Wiley, 1989.
- BERENGER, J.-P. **A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves**, J. Comput. Phys., vol. 114, 185-200, 1994.
- BOYLE, (ed.) G. **Renewable Energy: Power for a Sustainable Futures**. 3. ed. UK: Oxford University, 2012.
- CHEW, W. C.; WEEDON, W. H. **A 3D Perfectly Matched Medium from Modified Maxwell's Equation with Stretched Coordinates**, Microwave Opt. Tech. Lett., vol. 7, pp. 599-604, 1994.
- DIMROTH, F.; KURTZ, S. **High-Efficiency Multijunction Solar Cells**. MRS Bulletin, v. 32, 2007.
- ESQUERRE, V. F. **Modelagem de Estruturas Fotônicas por Elementos Finitos 2D no Domínio do Tempo**, Tese de Doutorado, UNICAMP/FEEC/Programa de Pós-Graduação, São Paulo, 2003.
- GONÇALVES, M. S. **Análise no Domínio do Tempo de Estruturas Eletromagnéticas Utilizando Elementos Finitos Vetoriais e Ortogonais**, Tese de Doutorado, UNICAMP/FEEC/Programa de Pós-Graduação, São Paulo, 2007.
- LEE, J. F.; LEE, R.; CANGELLARIS, A., **Time Domain Finite Element Methods**, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 45, No.3, pp. 430-442, março 1997.
- JIAO, D.; JIN, J.-M. **An Effective Algorithm for Implementing Perfectly Matched Layers in Time-Domain Finite-Element Simulation of Open-Region EM Problems**. IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol. 50, 1615-1623, 2002.
- JIN, J.-M. **The Finite Element Method in Electromagnetics**, 3rd ed., John Wiley and Sons, Inc., 2014.
- KRAUS, J. D. **Electromagnetics**, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, 1984.
- LUQUE, A.; HEGEDUS, S. **Handbook of Photovoltaic Science and Engineering**. John Wiley and Sons, Inc, 2003.
- MAXWELL, J. C. **A Dynamic Theory of the Electromagnetic Field**, Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Vol. 155, p. 459-512, 1864.
- MOEHLECKE, A.; ZANESCO, I. **Mercado, Física e Processamento de Células Solares**. Metalurgia e Sinais, v. 61, n. 557, 2005.
- NEWMARK, N. M. **A Method of Computation for Structural Dynamics**. J. Eng. Mech.

Div., Proc. Am. Soc. Civil Eng., vol. 85, no. EM 3, pp. 67-94, 1959.

OLDENBURG, **Photovoltaics Lectures**. Carl von Ossietzky Universität Oldenburg. Eldorado Summer School, 1994.

PEKEL, U.; MITTRA, R. **An Application of the Perfectly Matched Layer (PML) Concept to the Finite Element Method Frequency Domain Analysis of Scattering Problems**. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, Vol. 5, No. 8, 1995.

PINHO, J. T.; GALDINO, M. A. **Manual de Engenharia para Sistemas Fotovoltaicos**. CEPTEL-CRESESB, 2014.

SAKAMOTO, M. **Algoritmo de Refinamento de Delaunay a Malhas Sequenciais, Adaptativas e com Processamento Paralelo**, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo – Escola Politécnica, São Paulo, 2007.

SOUZA, M. **Inclusão do Meio UPML no Método dos Elementos Finitos no Domínio do Tempo Aplicado ao Eletromagnetismo**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná – Setor de Tecnologia, Paraná, 2008.

ZILLES, R.; MACÊDO, W. N.; GALHARDO, M.; de OLIVEIRA, S., **Sistemas Fotovoltaicos Conectados à Rede Elétrica**, Oficina de Textos, São Paulo, Brasil, 2012.